

Почти пустые шестиугольники*

В. А. КОШЕЛЕВ

Московский физико-технический институт
e-mail: koshelev@mccme.ru

УДК 519.154+519.146

Ключевые слова: выпуклые многоугольники, общее положение, проблема Эрдёша—Секереша, теория Рамсея.

Аннотация

В работе получены новые нетривиальные оценки для минимального числа точек общего положения на плоскости, среди которых непременно найдётся множество вершин выпуклого шестиугольника с не более чем одной точкой исходного множества внутри.

Abstract

V. A. Koshelev, *Almost empty hexagons*, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 14 (2008), no. 6, pp. 91–120.

In this work, new nontrivial bounds are obtained for the minimum number of points in general position on the plane, among which one certainly finds the set of vertices of a convex hexagon with not more than one point of the initial set inside.

1. Введение и формулировка результата

В 1935 году П. Эрдёш и Д. Секереш сформулировали следующую проблему (см. [5, 6]).

Первая проблема Эрдёша—Секереша. Для каждого целого $n \geq 3$ найти минимальное положительное число $g(n)$, такое что из любого множества точек на плоскости, находящегося в общем положении и содержащего по крайней мере $g(n)$ точек, можно выбрать подмножество мощности n , элементы которого являются вершинами выпуклого n -угольника.

В 1978 году Эрдёш предложил следующую модификацию первой проблемы (см. [4]).

Вторая проблема Эрдёша—Секереша. Для каждого целого $n \geq 3$ найти минимальное положительное число $h(n)$, такое что из любого множества точек \mathcal{X} на плоскости, находящегося в общем положении и содержащего по крайней мере $h(n)$ точек, можно выбрать подмножество мощности n , элементы которого являются вершинами выпуклого и пустого n -угольника, т. е. этот n -угольник не содержит внутри себя других точек из \mathcal{X} .

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 06-01-00383.

Напомним, что множество точек на плоскости находится в *общем положении*, если никакие три его элемента не лежат на одной прямой.

Эти проблемы являются классическими в комбинаторной геометрии и теории Рамсея (см. [3, 8, 11, 16]). Они обобщаются следующим образом.

Третья проблема типа Эрдёша—Секереша. Для любых целых $n \geq 3$ и $k \geq 0$ найти минимальное положительное число $h(n, k)$, такое что из любого множества точек \mathcal{X} на плоскости, находящегося в общем положении и содержащего по крайней мере $h(n, k)$ точек, можно выбрать подмножество мощности n , элементы которого являются вершинами выпуклого n -угольника C с условием $|(C \setminus \partial C) \cap \mathcal{X}| \leq k$, т. е. этот n -угольник содержит внутри себя не более k других точек из \mathcal{X} .

Первую проблему Эрдэш и Секереш рассмотрели в [5]. Они доказали существование $g(n)$ для произвольного n , обосновав верхнюю оценку $g(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1$, а также высказали следующую гипотезу: $g(n) = 2^{n-2} + 1$. Эта гипотеза подтверждена для $n \leq 6$. Здесь случай $g(3) = 3$ очевиден; равенство $g(4) = 5$ было доказано Э. Кляйн в 1935 году (см. рис. 1, на котором изображены все три принципиально различных способа расположения пяти точек на плоскости); выражение $g(5) = 9$ получил Э. Макаи (см. [5, 6, 11]); факт $g(6) = 17$ был установлен сравнительно недавно Д. Секерешем и Л. Питерсом в [17]. Кроме того, в 1961 году Эрдэш и Секереш доказали и нижнюю оценку $g(n) \geq 2^{n-2} + 1$ (см. [6]).

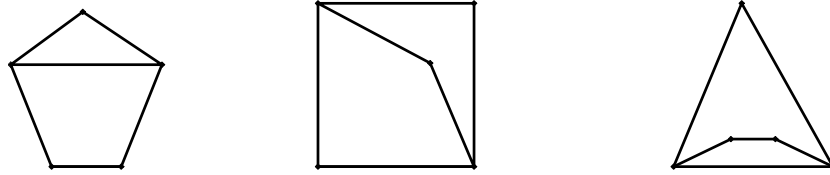


Рис. 1. Любое множество из пяти точек содержит выпуклый четырёхугольник

Неравенство $g(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1$ неоднократно улучшалось. Самый сильный результат был получен в 2005 году Г. Тотом и П. Вальтром: $g(n) \leq \binom{2n-5}{n-3} + 1$ (здесь $n \geq 5$; см. [18]). Таким образом, гипотеза Эрдёша—Секереша до сих пор не доказана и не опровергнута, известно лишь, что

$$2^{n-2} + 1 \leq g(n) \leq \binom{2n-5}{n-3} + 1.$$

Вторая проблема изучена более глубоко. Так, равенства $h(3) = 3$ и $h(4) = 5$ для неё очевидны (см. рис. 1). Выражение $h(5) = 10$ получил Х. Харборт в 1978 году (см. [9]). В 1983 году Дж. Хортон доказал, что $h(n)$ не существует при $n \geq 7$ (см. [10]). Фактически, Хортон доказал несуществование $h(n, 0)$ при $n \geq 7$. Вопрос о существовании и значении величины $h(6)$ (она же

$h(6, 0)$) долгое время оставался открытым. Лишь в 2006 году Т. Геркен доказал существование $h(6)$, обосновав верхнюю оценку $h(6) \leq g(9) \leq \binom{13}{6} + 1 = 1717$ (см. [7]). Независимо от него свои доказательства представили К. Николас [12] и Вальтр [19], но их верхние оценки хуже и составляют $g(25)$ и $g(15)$ соответственно. В 2007 году верхняя оценка была улучшена автором этой статьи: $h(6) \leq 463$ (см. [1]). В свою очередь, все нижние оценки для $h(6)$ были получены компьютерным перебором. Первая из них принадлежит М. Овермарсу, Б. Шолтен и И. Винсент и относится к 1988 году: $h(6) \geq 27$ (см. [15]). Следующая оценка была получена в 2001 году Овермарсом, она является самой лучшей на данный момент: $h(6) \geq 30$ (см. [14]). Таким образом, для $h(6)$ на сегодняшний день доказаны оценки $30 \leq h(6) \leq 463$.

Для третьей проблемы, как нетрудно убедиться, всегда выполнены неравенства $g(n) \leq h(n, k) \leq h(n)$, если соответствующие выражения существуют. Более того, $h(n) = h(n, 0) \geq h(n, 1) \geq h(n, 2) \geq \dots$ и существует такое k' , что $h(n, k) = g(n)$ при всех $k \geq k'$. Для малых значений n очевидны следующие результаты: $h(3, k) = 3$, $h(4, k) = 5$, $h(5, 0) = 10$, $h(5, \geq 1) = 9$. Последний результат следует из того факта, что выпуклый пятиугольник с двумя или более точками внутри всегда содержит меньший выпуклый пятиугольник.

Некоторые результаты по третьей проблеме получены в статье Б. Сендова [2]. В этой статье с использованием множества Хортон (см. [10]), с помощью которого было доказано несуществование $h(7)$, доказываемое несуществование $h(n, k)$ для определённых k при $n > 7$. Аналогичные результаты получены в статье Е. Ныкловой [13], кроме того, там доказано, что $h(6, \geq 6) = g(6)$, и представлен результат $h(6, 5) = 19$.

В связи с тем что все результаты для $g(6)$ и $h(6)$ были получены сравнительно недавно, представляет интерес изучение величины $h(6, 1)$ (значения k , отличные от единицы, могут быть не столь интересны ввиду гипотезы, которая приведена ниже). Нам удалось оценить сверху величину $h(6, 1)$ гораздо лучше, чем величину $h(6, 0)$.

Теорема. *Имеет место неравенство $h(6, 1) \leq g(7) \leq 127$.*

Таким образом, получается, что на сегодняшний день доказаны оценки $17 \leq h(6, 1) \leq 127$. Заметим, что если верна гипотеза Эрдёша—Секереша, то неравенство в теореме приобретает вид $h(6, 1) \leq g(7) = 33$.

На самом деле мы считаем, что верно более сильное утверждение.

Гипотеза. $h(6, 1) = g(6) = 17$.

Заметим, что из гипотезы сразу же следует, что

$$h(6, 1) = h(6, 2) = h(6, 3) = h(6, 4) = h(6, 5) = 17.$$

Предполагаемое равенство $h(6, 5) = 17$, очевидно, противоречит приведённому выше результату Ныкловой. Дело в том, что этот результат был доказан неаккуратно и к нему имеются контрпримеры.

С более полной и подробной историей проблем Эрдёша—Секереша можно ознакомиться, например, по обзору [11].

2. Схема доказательства теоремы

Скажем, что (конечное) множество точек на плоскости *содержит* данный k -угольник, если из него можно выбрать подмножество, элементы которого являются вершинами этого k -угольника.

Для доказательства теоремы необходимо убедиться в том, что любое множество точек на плоскости в общем положении мощности $g(7)$ или более содержит выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри. Зафиксируем произвольное такое множество \mathcal{X} . Заметим, что \mathcal{X} содержит по крайней мере один выпуклый семиугольник. Отношение вложенности на множестве всех выпуклых семиугольников, образованных точками из \mathcal{X} , есть отношение строгого порядка. Поэтому всегда можно говорить о минимальных семиугольниках в \mathcal{X} . Выберем один из них и обозначим множество его вершин через \mathcal{H} . Положим, что $\mathcal{I}' = (\text{conv}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{H}) \cap \mathcal{X}$ — множество точек из \mathcal{X} , лежащих внутри выпуклой оболочки \mathcal{H} . Либо \mathcal{I}' пусто (но тогда, впрочем, и обсуждать нечего), либо множество $\text{conv}(\mathcal{I}')$ является выпуклым многоугольником, отрезком («2-угольником») или точкой («1-угольником»); обозначим через \mathcal{I} множество его вершин ($\mathcal{I} = \partial(\text{conv}(\mathcal{I}')) \cap \mathcal{X}$). Если $|\mathcal{I}| > 2$, то можно определить $\mathcal{J}' = (\text{conv}(\mathcal{I}) \setminus \mathcal{I}) \cap \mathcal{X}$ как множество точек из \mathcal{X} , находящихся внутри выпуклой оболочки \mathcal{I} . Заметим, что если \mathcal{J}' непусто, то $\text{conv}(\mathcal{J}')$ также является выпуклым многоугольником (в частности, 1- или 2-угольником), поэтому можно определить \mathcal{J} как множество его вершин. Аналогичным образом строятся множества \mathcal{K} , \mathcal{L} и т. д., причём процесс в какой-то момент оборвется (рис. 2).

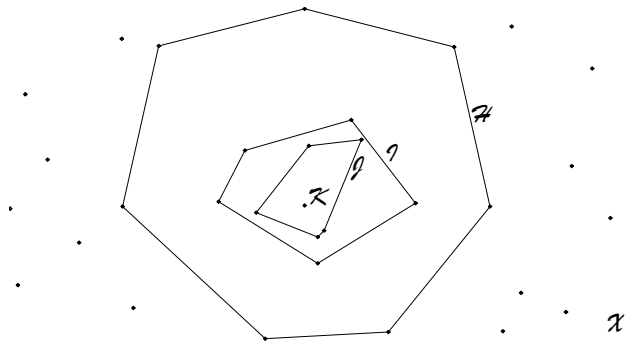


Рис. 2. Определение множеств \mathcal{H} , \mathcal{I} , \mathcal{J} и \mathcal{K}

Положим $i = |\mathcal{I}|$, $j = |\mathcal{J}|, \dots$. Скажем, что множество \mathcal{X} имеет *тип* $(7, i, j, \dots)$. В частности, в «вырожденных» случаях возникают типы $(7, 0, 0, \dots)$, $(7, i, 0, \dots)$ и пр. (рис. 3).

Заметим, что тип определён неоднозначно. Например, множество, изображённое на рис. 4, имеет тип $(7, 4, 1, \dots)$, если в качестве минимального выпуклого семиугольника в нём взять $A_1 A_2 \dots A_7$; оно же имеет тип $(7, 5, 2, \dots)$, если

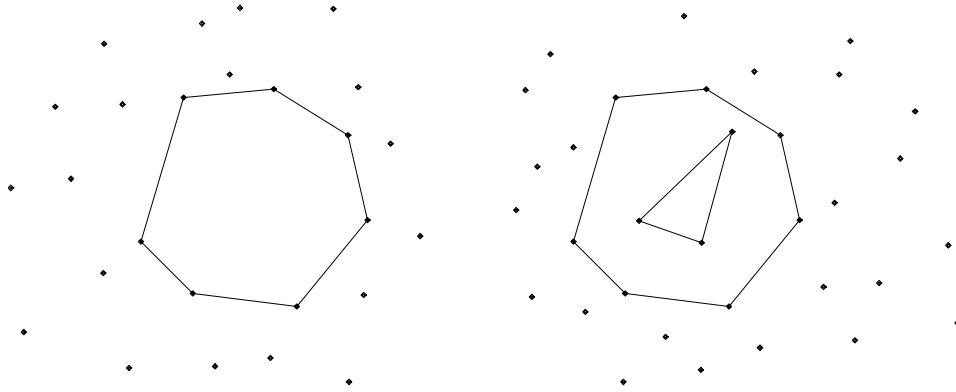


Рис. 3. Множества типа $(7, 0, 0, \dots)$ и $(7, 3, 0, \dots)$

рассмотреть семиугольник $B_1 B_2 \dots B_7$. В дальнейшем мы не станем пользоваться возможным многообразием выпуклых семиугольников в \mathcal{X} . Говоря о типе множества \mathcal{X} , мы будем лишь подразумевать, что в \mathcal{X} *есть* выпуклый семиугольник, относительно которого \mathcal{X} имеет данный тип.

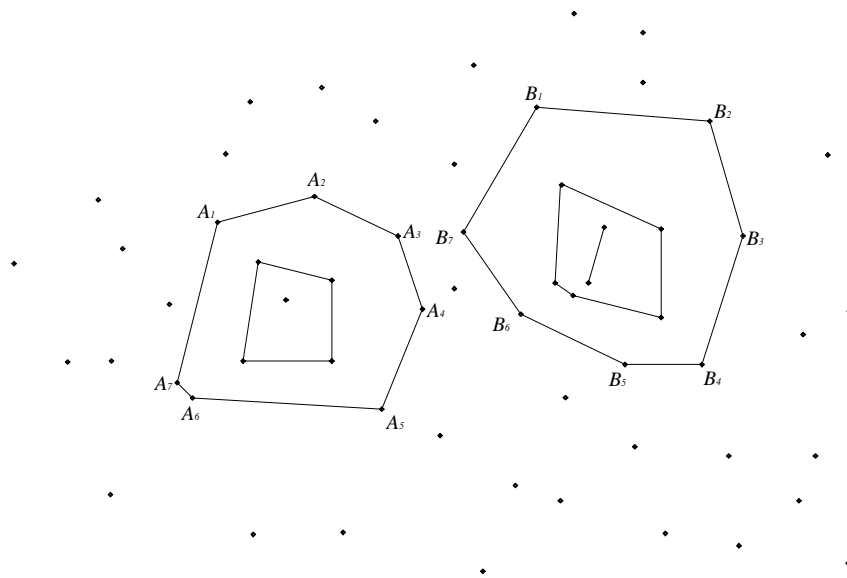


Рис. 4. Неоднозначность определения типа

Для доказательства наличия выпуклого шестиугольника с не более чем одной точкой внутри в множестве \mathcal{X} мы будем рассматривать только подмножество $\mathcal{H}' = \text{conv}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{X}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма (Вальтр [19]). Пусть \mathcal{X} , \mathcal{H} , \mathcal{I} , \mathcal{J} и \mathcal{K} такие же, как в определении, приведённом выше. Если $|\mathcal{H}| \geq 7$ и в \mathcal{X} нет выпуклых и пустых шестиугольников, то $\mathcal{K} = \emptyset$.

Выражение «такие же» из формулировки леммы, строго говоря, не вполне корректно, ведь до сих пор мы полагали $|\mathcal{H}| = 7$. Однако ясно, что определение вложенных друг в друга выпуклых оболочек (см. рис. 2) можно дать и для случаев, когда $|\mathcal{H}| \neq 7$.

Из леммы вытекает наличие выпуклого шестиугольника с не более чем одной точкой внутри (более того, существование выпуклого и пустого шестиугольника) в любом множестве типа $(7, i, j, k, \dots)$, где $k > 0$. Поэтому далее остаётся рассмотреть лишь множества типа $(7, i, j, 0, 0, \dots)$. Соответственно, для краткости мы будем говорить только о случаях (конфигурациях) «вида» $(7, i, j)$. Всего таких случаев будет 31, поскольку i и j могут меняться в следующих пределах: $0 \leq i \leq 2$, а также $3 \leq i \leq 6$ и $0 \leq j \leq 6$.

По идее, каждый из упомянутых случаев следует рассмотреть отдельно, однако нам удастся разбить множество всех случаев на четыре класса с тем, чтобы внутри каждого класса применить свой подход к обоснованию необходимого утверждения. При этом для всех четырёх классов мы тем или иным способом установим наличие выпуклого шестиугольника с не более чем одной точкой внутри в множестве \mathcal{H}' .

В связи со всем сказанным выше дальнейшая структура статьи такова: в третьем разделе мы введём ряд вспомогательных определений и обозначений; в четвёртом разделе мы изложим доказательство теоремы, причём каждому классу мы посвятим отдельный подраздел; в пятом разделе мы сделаем некоторые выводы.

3. Вспомогательные определения и обозначения

В этом разделе мы введём некоторые дополнительные геометрические объекты, которые будут существенно использованы в дальнейшем доказательстве.

3.1. Сектора и запрещённые зоны

Для произвольных трёх точек X, Y и Z на плоскости в общем положении определим $P_{XY}(Z)$ как открытую полуплоскость относительно прямой XY , содержащую точку Z . *Выпуклой цепью* назовём множество последовательных вершин выпуклого многоугольника. Для данной выпуклой цепи ABC определим *3-сектор* (рис. 5 слева)

$$(ABC) = (P_{AB}(C) \cap P_{BC}(A)) \setminus \text{conv}(\{A, B, C\}).$$

Для выпуклой цепи $ABCD$ определим *4-сектор* (рис. 5 посередине)

$$(ABCD) = ((ABC) \cap (BCD)) \setminus \text{conv}(\{A, B, C, D\}).$$

Для выпуклой цепи $ABCDE$ определим *5-сектор*, или *запрещённую зону*, пятиугольника (рис. 5 справа)

$$(ABCDE) = ((ABCD) \cap (BCDE)) \setminus \text{conv}(\{A, B, C, D, E\}).$$

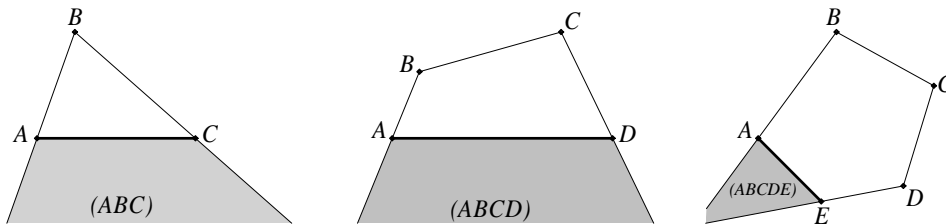


Рис. 5. Определение секторов

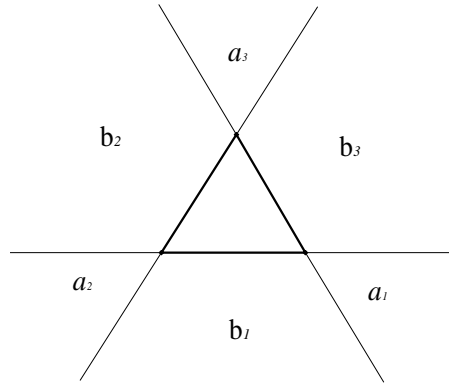
Скажем, что точка *отделяется* от данного выпуклого многоугольника какой-то прямой, содержащей его сторону, если она расположена в другой полуплоскости относительно этой прямой, чем сам многоугольник. Отметим, что любая запрещённая зона пятиугольника представляет собой множество точек, которые отделяются от него *ровно одной* прямой (см. рис. 5, где роль такой прямой играет прямая AE).

Любая прямая PQ задаёт две полуплоскости. Назовём одну из них *2-сектором* (PQ) , а другую *2-сектором* (QP) в соответствии со следующим принципом. Если для любой точки R из полуплоскости точки P, Q, R расположены друг за другом по часовой стрелке, то эта полуплоскость является *2-сектором* (PQ) ; в противном случае — *2-сектором* (QP) .

3.2. Расстановки

Пусть дана конфигурация произвольного вида $(7, i, j)$. Выделим в ней конструкцию, состоящую из промежуточного i -угольника и внутреннего j -угольника. Такая конструкция нам будет часто нужна в дальнейшем, поэтому рассмотрим её подробнее. Нам необходимо дать некоторую классификацию взаимных расположений множеств вершин i - и j -угольника. Будем считать, что $j = 3$, $j = 4$ или $j = 5$, поскольку иные случаи нам не понадобятся.

Пусть сперва $j = 3$. Три прямые, проходящие через стороны треугольника, разбивают плоскость вне треугольника на шесть частей. Три из них имеют «треугольную» форму, а другие три — «четырёхугольную». Скажем, что конструкция, состоящая из i -угольника и треугольника, является $(i, 3)$ -расстановкой вида $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3]$, если количества вершин i -угольника, расположенных в треугольных частях, — это a_1, a_2, a_3 , а количества вершин i -угольника,

Рис. 6. $(i, 3)$ -расстановка вида $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3]$

расположенных в четырёхугольных частях, — это b_1, b_2, b_3 (рис. 6). Вообще говоря, обозначение $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3]$ определено неоднозначно. Например, мы могли бы говорить о той же расстановке и как об $(i, 3)$ -расстановке вида $[a_2, b_2, a_3, b_3, a_1, b_1]$, и как об $(i, 3)$ -расстановке вида $[a_1, b_3, a_3, b_2, a_2, b_1]$. Однако для нас не принципиально, какую именно из перечисленных (и прочих возможных) записей рассматривать. Эти записи с нашей точки зрения эквивалентны, и мы в дальнейшем будем использовать любую из них. Здесь только важно подчеркнуть, что всякий раз фиксированная нами запись будет начинаться с величины вида a_i , т. е. с количества вершин i -угольника в некоторой треугольной части плоскости; величины вида a_i и b_j будут в этой записи чередоваться и следовать друг за другом в порядке расположения соответствующих частей плоскости.

Пусть теперь $j = 4$. Как и при $j = 3$, определим вид расстановки. Здесь это будет немного сложнее.

Четыре прямые, проходящие через стороны четырёхугольника, разбивают плоскость вокруг него на несколько частей. Возможны три принципиально различных вида указанного разбиения. Все они изображены на рис. 7. В первом случае четырёхугольник представляет собой параллелограмм, во втором — трапецию, а в третьем случае четырёхугольник не является ни параллелограммом, ни трапецией. В каждом из трёх случаев выделяем те области в разбиении плоскости вокруг четырёхугольника, которые условно обозначены на рис. 7 $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_4$. Для данной конструкции, состоящей из i -угольника и четырёхугольника, положим b_k равным числу вершин i -угольника, расположенных в области \mathcal{B}_k , $k = 1, \dots, 4$. В каждом из трёх случаев величины b_1, \dots, b_4 определены однозначно с точностью до того, в какой последовательности мы изначально вводим обозначения $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_4$. Разумеется, как области, так и количества вершин в них мы упорядочиваем (например, по часовой стрелке).

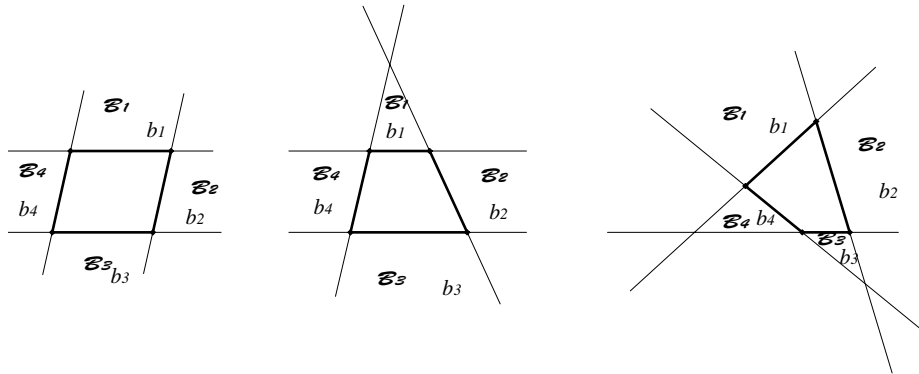


Рис. 7. Разбиения плоскости и определения множеств \mathcal{B}_i и чисел b_i

Когда расстановка величин b_1, \dots, b_4 для данной конструкции зафиксирована, расставим величины a_1, \dots, a_4 следующим образом.

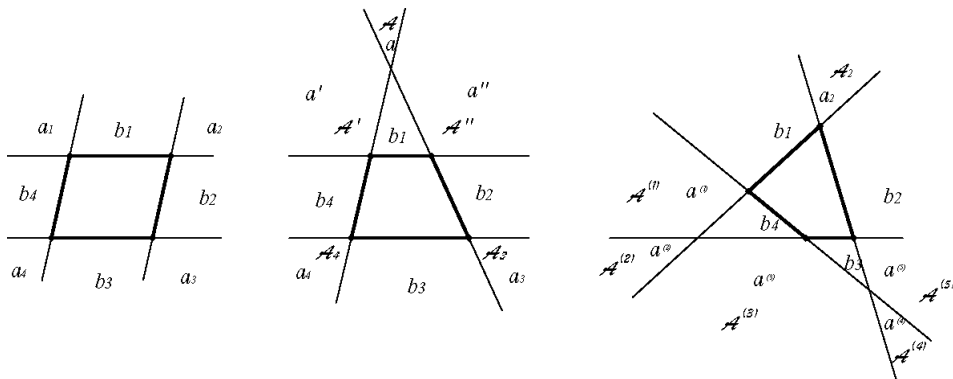


Рис. 8. Разбиения плоскости и определения множеств \mathcal{A}_i и чисел a_i

В случае когда четырёхугольник является параллелограммом, всё тривиально (см. рис. 8 слева): числа a_1, \dots, a_4 — это количества вершин i -угольника, попавших в соответствующие области.

Пусть четырёхугольник — это трапеция. Тогда без ограничения общности числа b_1, \dots, b_4 можно считать расставленными так, как это сделано на рис. 7 и 8. Рассмотрим «дополнительные» области \mathcal{A}' , \mathcal{A} , \mathcal{A}'' , \mathcal{A}_3 , \mathcal{A}_4 (см. рис. 8 посередине). Обозначим через a' , a , a'' , a_3 , a_4 количества вершин i -угольника в соответствующих областях. Возьмём произвольные неотрицательные целые

a_1, a_2 с условиями $a_1 + a_2 = a' + a + a''$, $a_1 \leq a' + a$, $a_2 \leq a + a''$ и расставим их так, как это показано на рис. 9 посередине. Иными словами, некоторые a_1 вершин i -угольника из множества $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{A}''$ мы относим к области $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}$, а оставшиеся a_2 вершины связываем с областью $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}''$. Таким образом, при определении вида расстановки мы пренебрегаем количеством вершин i -угольника в \mathcal{A} и лишь для большей определённости разносим его вершины по областям $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}''$. При этом не имеет значения, как именно мы осуществляем указанную операцию.

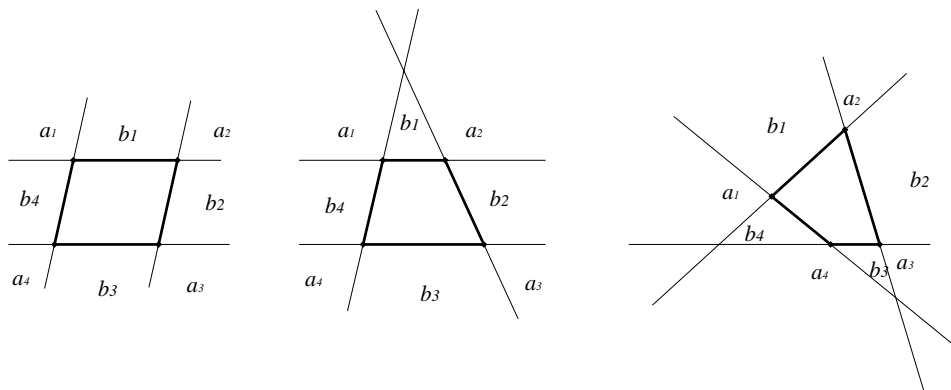


Рис. 9. Окончательное определение чисел a_i и b_i

Пусть, наконец, четырёхугольник не является ни параллелограммом, ни трапецией. Эта ситуация изображена на рис. 8 справа. Здесь, опять-таки без ограничения общности, возникают дополнительные области $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}^{(1)}, \dots, \mathcal{A}^{(5)}$, в которых лежат $a_2, a^{(1)}, \dots, a^{(5)}$ вершин i -угольника соответственно. Выберем произвольные неотрицательные целые a_1, a_4, a_3 , обладающие свойствами $a_1 + a_4 + a_3 = a^{(1)} + \dots + a^{(5)}$, $a_1 \leq a^{(1)} + a^{(2)}$, $a_4 \leq a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)}$, $a_3 \leq a^{(4)} + a^{(5)}$, и расставим их так, как это показано на рис. 9 справа. Иными словами, некоторые a_1 вершин i -угольника из множества $\mathcal{A}^{(1)} \cup \dots \cup \mathcal{A}^{(5)}$ мы относим к области $\mathcal{A}^{(1)} \cup \mathcal{A}^{(2)}$, некоторые другие a_4 его вершины связываем с областью $\mathcal{A}^{(2)} \cup \mathcal{A}^{(3)} \cup \mathcal{A}^{(4)}$, оставшиеся a_3 его вершины ассоциируем с областью $\mathcal{A}^{(4)} \cup \mathcal{A}^{(5)}$. Таким образом, на сей раз мы фактически не обращаем внимание на количества вершин i -угольника в пересечениях множеств $\mathcal{A}^{(1)} \cup \mathcal{A}^{(2)}$, $\mathcal{A}^{(2)} \cup \mathcal{A}^{(3)} \cup \mathcal{A}^{(4)}$ и $\mathcal{A}^{(4)} \cup \mathcal{A}^{(5)}$, но для удобства распределяем его вершины по этим множествам. Как и в случае с трапецией, способ упомянутого распределения нас не волнует.

Можно сказать, что каждая конструкция, состоящая из i -угольника и четырёхугольника, есть $(i, 4)$ -расстановка вида $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4]$. Понятно, что, как и в случае $(i, 3)$ -расстановок, вид здесь определён неоднозначно. Во-первых, имеется произвол в выборе порядка нумерации величин a_i, b_i ; во-вторых,

числа a_i могут принимать различные значения в рамках известных ограничений. Впрочем, как и прежде, мы будем чередовать a_i и b_i , всякий раз начиная запись расстановки с некоторого a_1 .

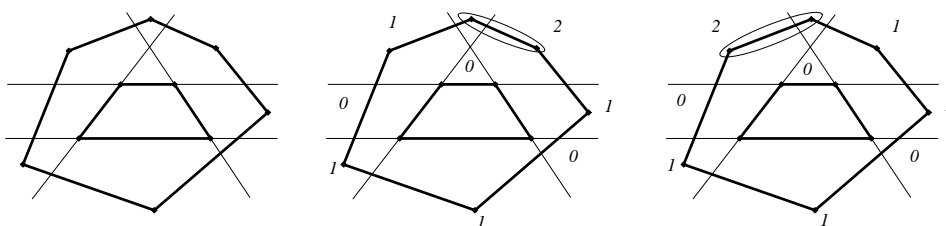


Рис. 10. Пример с неоднозначным определением вида расстановки

На рис. 10 слева изображена конструкция, состоящая из шестиугольника и четырёхугольника. Её можно интерпретировать, например, как $(6, 4)$ -расстановку вида $[2, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1]$ (см. рис. 10 посередине). Можно её представлять себе и как $(6, 4)$ -расстановку вида $[1, 0, 2, 0, 1, 1, 0, 1]$ (см. рис. 10 справа). Существует, конечно, ряд других интерпретаций, но каждая из них в равной мере адекватно отражает ту информацию о взаимном расположении вершин шестиугольника и четырёхугольника, которая нам понадобится в дальнейшем.

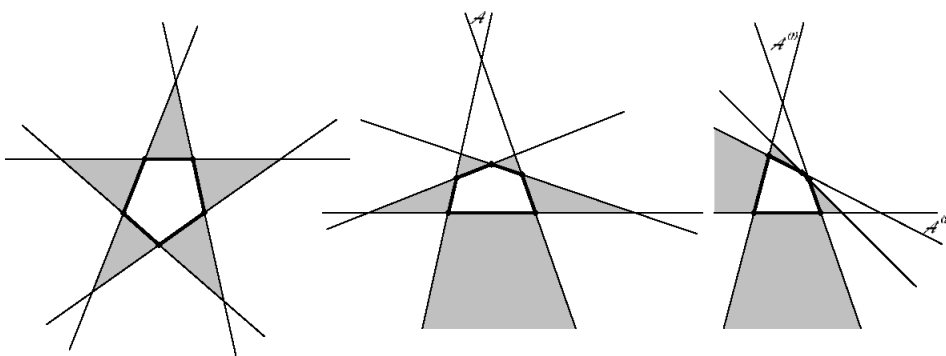


Рис. 11. Разбиения плоскости

Пусть, наконец, $j = 5$. На сей раз определение вида расстановки проще предыдущего. Существует всего три принципиально различных ситуации. Все они изображены на рис. 11. Разница между ними в том, что во второй и третьей ситуациях есть области \mathcal{A} и $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{(2)}$ соответственно, каждая точка которых отделена от пятиугольника ровно четырьмя прямыми, содержащими его стороны, а в первой ситуации такой области нет. Нетрудно убедиться, что всегда

подобных областей не больше двух. Заметим, что на рис. 11 закрашены те области, точки которых, напротив, отделены от пятиугольника ровно одной прямой, проходящей через его сторону. Смысл в том, что попадание вершины i -угольника в закрашенную область гарантирует наличие в конфигурации выпуклого шестиугольника с не более чем одной точкой внутри (пустого).

Как и во всех предшествующих случаях, осуществим расстановку символов a_i, b_i в каждой из ситуаций согласно рис. 12. Здесь в первой ситуации числа a_i, b_i однозначно выражают количества вершин i -угольника, попавших в соответствующие области, а во второй и в третьей ситуациях неоднозначность, возникающая как раз в областях $\mathcal{A}, \mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{A}^{(2)}$, разрешается с помощью таких же неравенств, какие мы выписывали при определении $(i, 4)$ -расстановки.

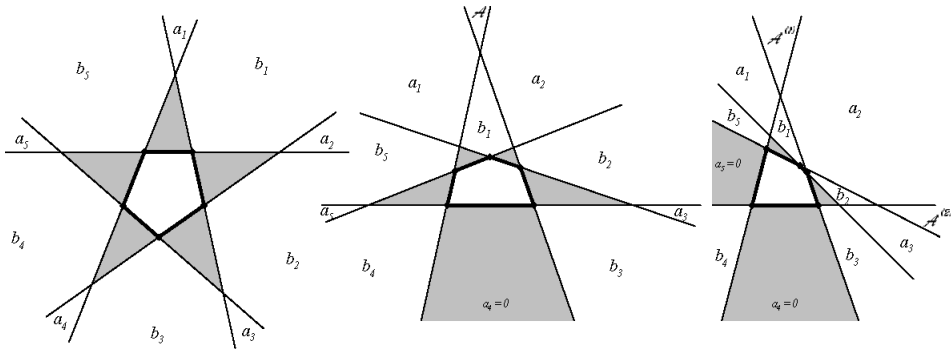


Рис. 12. Разбиения плоскости

Заметим, что, строго говоря, смысл обозначений a_i, b_i не совсем одинаков для $(i, 5)$ -расстановки и остальных расстановок. Дело в том, что раньше через b_i мы обозначали те области, в которых каждая точка отделена от j -угольника ровно одной прямой, проходящей через его сторону. Теперь же такие области у нас закрашены. Поскольку прежде мы ничего не говорили о природе областей с данным числом точек внутри, то и теперь мы не стали менять обозначения.

В любом случае у нас получается $(j, 5)$ -расстановка вида

$$[a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5].$$

4. Доказательство теоремы

В этом разделе мы рассмотрим четыре класса случаев (см. раздел 2). Каждому классу мы посвятим отдельный подраздел, а каждому случаю — пункт соответствующего подраздела. При этом всякий раз мы будем доказывать существование выпуклого и пустого шестиугольника в множестве $\mathcal{H}' \subset \mathcal{X}$.

4.1. «Тривиальные» случаи

Здесь мы рассмотрим конфигурации вида

$$(7, 0, 0), (7, 1, 0), (7, 6, 0), (7, 6, 1), (7, i, 6) \quad (3 \leq i \leq 6).$$

Очевидно, что в каждой такой конфигурации есть выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри. Всякий раз он просто является частью какого-то одного конкретного множества: \mathcal{H} , \mathcal{I} или \mathcal{J} .

4.2. Случаи с $j \leq 2$

Здесь будут рассмотрены все достаточно простые случаи, для которых $j \leq 2$. Случаи $(7, 3, 2)$ и $(7, 4, 2)$ рассмотрены в следующем подразделе.

4.2.1. Конфигурации вида $(7, 2, 0)$

Пусть внутренние точки — A и B . Прямая AB разбивает плоскость на две полуплоскости, и в одной из них расположены по крайней мере четыре вершины семиугольника (рис. 13). Как раз они вместе с точками A и B и образуют нужный нам шестиугольник (более того, пустой).

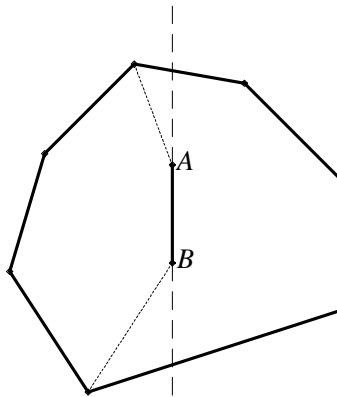
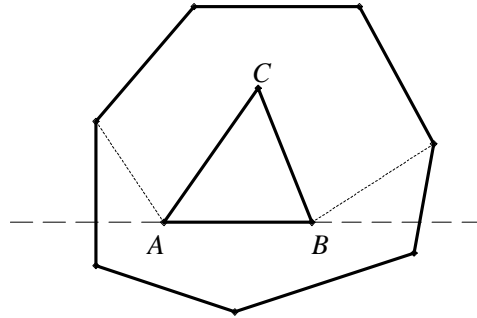


Рис. 13. Конфигурация вида $(7, 2, 0)$

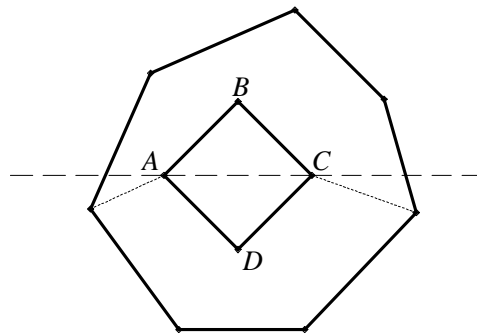
4.2.2. Конфигурации вида $(7, 3, 0)$

Пусть внутренний треугольник — это ABC . Прямая AB разбивает плоскость на две полуплоскости, и в одной из них расположены по крайней мере четыре вершины семиугольника (рис. 14). Вместе с точками A и B они образуют выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри.

Рис. 14. Конфигурация вида $(7, 3, 0)$

4.2.3. Конфигурации вида $(7, 4, 0)$

Пусть внутренний четырёхугольник — это $ABCD$. Применяя те же рассуждения, что и в предыдущем пункте, для прямой AC , убеждаемся в наличии выпуклого шестиугольника с не более чем одной точкой внутри и для этой конфигурации (рис. 15).

Рис. 15. Конфигурация вида $(7, 4, 0)$

4.2.4. Конфигурации вида $(7, 5, 0)$

Нетрудно убедиться, что если хотя бы одна вершина семиугольника попадает в закрашенную область (рис. 16), то это сразу гарантирует нам наличие выпуклого шестиугольника с не более чем одной точкой внутри. Таким образом, мы можем считать, что все вершины семиугольника находятся вне закрашенных областей. Взаимное расположение вершин семиугольника и пятиугольника порождает некий аналог $(7, 5)$ -расстановки вида $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5]$,

для которой выполнено условие $\sum(a_i + b_i) = 7$ (см. раздел 3.2). Мы говорим здесь именно об аналогии, поскольку термин «расстановка» мы использовали лишь в отношении взаимного расположения промежуточного i -угольника и внутреннего j -угольника. На сей раз речь идёт о внешнем семиугольнике и промежуточном i -угольнике, но сути дела это не меняет.

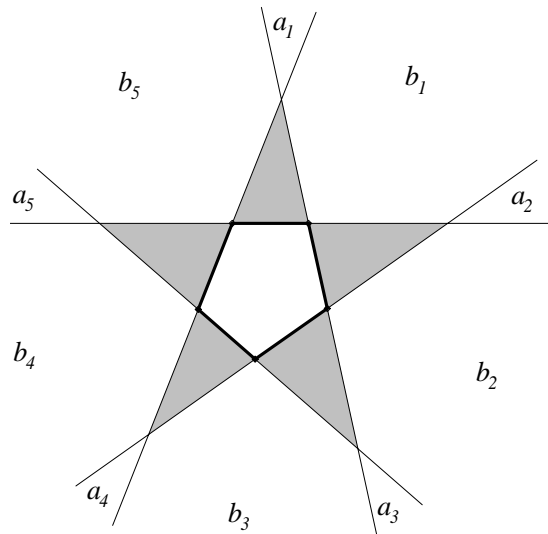


Рис. 16. Конфигурация вида (7, 5, 0)

Предположим, что в данной конфигурации нет выпуклого шестиугольника с не более чем одной точкой внутри. Тогда должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 &0 \leq b_i \leq 1 \quad (1 \leq i \leq 5), \\
 &a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 \leq 3, \quad a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + a_4 \leq 3, \\
 &a_3 + b_3 + a_4 + b_4 + a_5 \leq 3, \quad a_4 + b_4 + a_5 + b_5 + a_1 \leq 3, \\
 &a_5 + b_5 + a_1 + b_1 + a_2 \leq 3.
 \end{aligned}$$

Складывая их, получаем, что

$$3 \sum(a_i + b_i) \leq 20, -$$

противоречие с тем, что

$$\sum(a_i + b_i) = 7.$$

Это означает, что в нашей конструкции всегда есть выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри.

4.2.5. Конфигурации вида (7, 3, 1)

В этом случае всё пространство вокруг треугольника ABC разбивается на три области (AXB) , (BXC) и (AXC) , каждая из которых является 3-сектором (X — внутренняя точка треугольника) (рис. 17). Либо в одной из этих областей больше вершин семиугольника, чем отмечено на рисунке, и тогда выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри в конфигурации есть (более того, этот шестиугольник пустой), либо в каждой из областей (AXB) , (BXC) и (AXC) количество вершин семиугольника не превосходит указанной величины, но это невозможно, так как $2 + 2 + 2 = 6 < 7$.

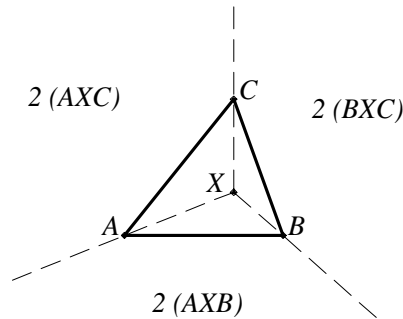


Рис. 17. Конфигурация вида (7, 3, 1)

Далее будут часто использоваться аналогичные рассуждения и в таких случаях будет предъявляться рисунок с указанием областей, на которые разбивается плоскость или которыми она покрывается. В каждой области будет указано максимальное количество вершин семиугольника $\text{conv}(\mathcal{H})$, которые могут располагаться внутри неё без появления в рамках конструкции выпуклого шестиугольника с не более чем одной точкой внутри. Всякий раз сумма таких количеств окажется меньше семи.

4.2.6. Конфигурации вида (7, 4, 1)

Проведём в четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD и зафиксируем, в каком из треугольников, ABD или BDC , находится внутренняя точка X . Без ограничения общности будем считать, что она лежит в треугольнике ABD . Всё пространство вокруг четырёхугольника $ABCD$ разбивается на три области (AXB) , (BXD) и (AXD) , каждая из которых является 3-сектором (рис. 18) и задаёт соответствующее ограничение на количество вершин семиугольника в ней. Согласно логике из предыдущего пункта выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри в конфигурации найдётся.

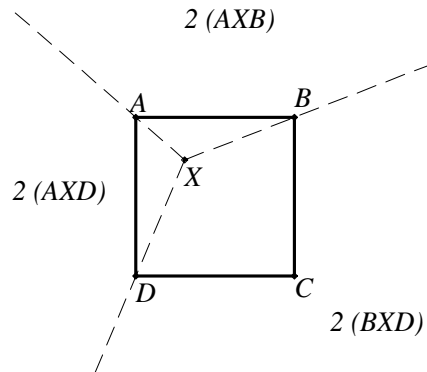


Рис. 18. Конфигурация вида $(7, 4, 1)$

4.2.7. Конфигурации вида $(7, 5, 1)$

В этом пункте взаимное расположение пятиугольника $ABCDE$ и внутренней точки X позволяет построить разбиение плоскости вокруг $ABCDE$ на 3-сектора (AXC) , (CXD) и (AXD) (рис. 19) с соответствующими ограничениями. Согласно логике из пункта 4.2.5 выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри в конфигурации найдётся.

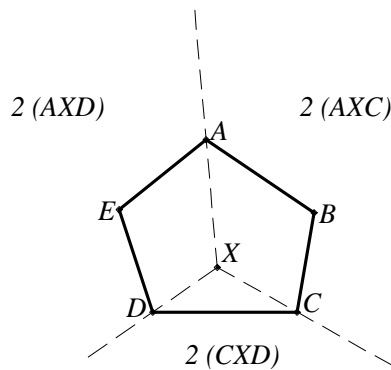


Рис. 19. Конфигурация вида $(7, 5, 1)$

4.2.8. Конфигурации вида $(7, 5, 2)$

Вначале заметим, что прямая, проведённая через две внутренние точки X и Y , (разумеется) пересекает пятиугольник $ABCDE$ и что в одной полуплос-

кости относительно неё должны оказаться две, а в другой — три вершины пятиугольника (случай с одной и четырьмя вершинами тривиален, и о нём можно сразу забыть). Таким образом, без ограничения общности будем считать, что в нашем пятиугольнике вершины разделены прямой XU на множества $\{C, D\}$ и $\{A, B, E\}$ (рис. 20). Также будем предполагать, что точка X расположена «ближе» к точке D , а точка Y — «ближе» к точке C (т. е. что четырёхугольник $CYXD$ выпуклый).

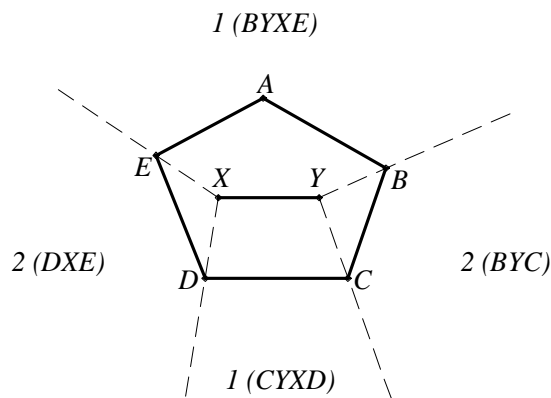


Рис. 20. Конфигурация вида (7, 5, 2)

Согласно сделанным предположениям плоскость вокруг пятиугольника разбивается на сектора $(BYXE)$, (BYC) , $(CYXD)$ и (DXE) . В соответствии с логикой из пункта 4.2.5 выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри найдётся.

4.2.9. Конфигурации вида (7, 6, 2)

Прежде всего заметим, что прямая XU пересекает две стороны шестиугольника. Если эти две стороны не являются противоположными (например, как стороны AB и CD), то выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри обязательно найдётся (в данном случае это $AXYDEF$). Далее без ограничения общности будем считать, что прямая XU пересекает две противоположные стороны шестиугольника AB и DE . Теперь легко построить разбиение плоскости вокруг шестиугольника на сектора (AXB) , $(BXYD)$, (DYE) и $(AXYE)$ с соответствующими ограничениями на число вершин семиугольника в них (рис. 21). Согласно логике из пункта 4.2.5 выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри найдётся.

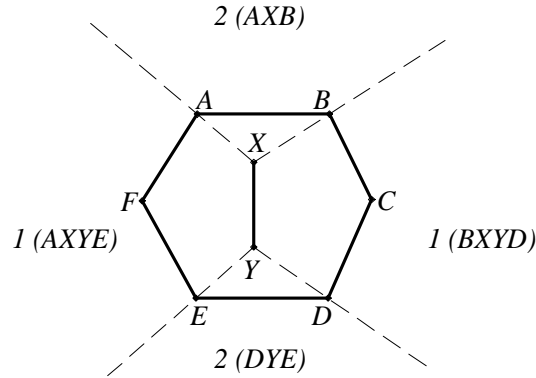


Рис. 21. Конфигурация вида (7, 6, 2)

4.3. Случаи, опирающиеся на минимальность семиугольника

В этом подразделе мы рассмотрим конфигурации вида

$$(7, 3, \geq 2), \quad (7, 4, \geq 2), \quad (7, 5, \geq 4).$$

Метод, который мы будем использовать ниже, позволит нам установить даже более сильное утверждение, чем то, которое мы стремимся получить. А именно, мы докажем существование выпуклого и пустого шестиугольника.

Всякий раз, доказывая наличие выпуклого и пустого шестиугольника в данной конфигурации, мы будем использовать следующие утверждения, фактически полученные в [7].

Утверждение 1. Предположим, что в какой-либо конфигурации вида $(7, i, j)$ выполнено $j \geq 2$, и пусть $2 \leq t \leq \min\{i - 1, j\}$. Рассмотрим t последовательных вершин V_1, \dots, V_t многоугольника $\text{conv}(\mathcal{J})$. Обозначим через \mathcal{T}_n множество вершин i -угольника $\text{conv}(\mathcal{I})$, лежащих в той полуплоскости относительно прямой $V_n V_{n+1}$, которая не содержит других точек из $\text{conv}(\mathcal{J})$ (при $j = 2$ берём любую из двух полуплоскостей). Если $\left| \bigcup_{n=1}^{t-1} \mathcal{T}_n \right| < t$, то в конфигурации есть выпуклый и пустой шестиугольник.

Утверждение 1'. Предположим, что в какой-либо конфигурации вида $(7, i, j)$ выполнено $j \geq 2$, и пусть $2 \leq t \leq \min\{i - 1, j\}$. Рассмотрим t последовательных вершин V_1, \dots, V_t многоугольника $\text{conv}(\mathcal{J})$. Обозначим через \mathcal{T}'_n множество сторон i -угольника $\text{conv}(\mathcal{I})$, лежащих в той полуплоскости относительно прямой $V_n V_{n+1}$, которая не содержит других точек из $\text{conv}(\mathcal{J})$ (при $j = 2$ берём любую из двух полуплоскостей). Если $\left| \bigcup_{n=1}^{t-1} \mathcal{T}'_n \right| < t - 1$, то в конфигурации есть выпуклый и пустой шестиугольник.

Доказательства утверждений в существенной мере опираются на минимальность семиугольника в конфигурации вида $(7, i, j)$.

4.3.1. Конфигурации вида $(7, 3, \geq 2)$

Применим утверждение 1 с $t = 2 \leq \min\{i - 1, j\}$. Зафиксируем две последовательные вершины j -угольника $P = V_1$ и $Q = V_2$. Обозначим через \mathcal{T}_{PQ} множество \mathcal{T}_1 . Согласно утверждению 1, если $|\mathcal{T}_{PQ}| < 2$, то в конфигурации есть выпуклый и пустой шестиугольник, и всё в порядке. Таким образом, остаётся рассмотреть случай $|\mathcal{T}_{PQ}| \geq 2$.

В упомянутом случае выберем две последовательные вершины треугольника ABC (скажем, B и C) из множества \mathcal{T}_{PQ} . Рассмотрим сектора $(CPQB)$, (APC) , (AQB) , покрывающие плоскость вокруг треугольника ABC (рис. 22). Внутри четырёхугольника $CPQB$ точек из \mathcal{J} нет. Однако внутри треугольников AQB и APC такие точки находиться могут. Пусть, например, $P' \in APC$. Тогда заменим сектор (APC) сектором $(AP'C) \supset (APC)$. Аналогично поступим, если $Q' \in AQB$, $P'' \in AP'C$ и т. д. В результате получим покрытие плоскости вокруг треугольника ABC одним 4-сектором и двумя 3-секторами. При этом в каждом из этих секторов возникнет ограничение числа вершин семиугольника, изображённое на рис. 22. В соответствии с логикой пункта 4.2.5 выпуклый и пустой шестиугольник в конфигурации опять-таки есть.

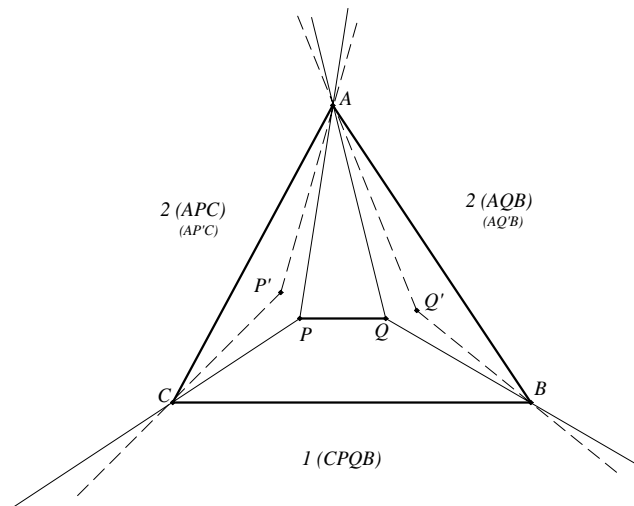


Рис. 22. Конфигурации вида $(7, 3, \geq 2)$

4.3.2. Конфигурации вида $(7, 4, \geq 2)$

Применим утверждение 1 с $t = 2 \leq \min\{i - 1, j\}$. Зафиксируем три последовательные вершины j -угольника $P = V_1, Q = V_2$ и $R = V_3$ (здесь $P = R$, если $j = 2$). Обозначим через \mathcal{T}_{PQ} множество \mathcal{T}_1 , а через \mathcal{T}_{QR} множество \mathcal{T}_2 . Согласно утверждению 1, если $|\mathcal{T}_{PQ}| < 2$ или $|\mathcal{T}_{QR}| < 2$, то в конфигурации есть выпуклый и пустой шестиугольник, и всё в порядке. Таким образом, остаётся рассмотреть случай $|\mathcal{T}_{PQ}| \geq 2, |\mathcal{T}_{QR}| \geq 2$.

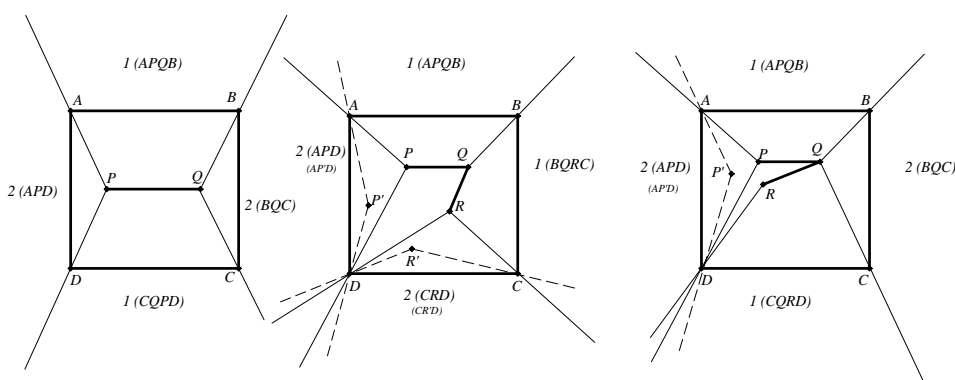


Рис. 23. Конфигурации вида $(7, 4, \geq 2)$

Заметим, что при $P = R$ ($j = 2$) условия $|\mathcal{T}_{PQ}| \geq 2, |\mathcal{T}_{QR}| \geq 2$ означают, что имеет место ситуация, изображённая на рис. 23 слева, и снова всё в порядке (пункт 4.2.5).

Теперь применим утверждение 1 с $t = 3 \leq \min\{i - 1, j\}, j \geq 3$. В соответствии с ним, если $|\mathcal{T}_{PQ} \cup \mathcal{T}_{QR}| < 3$, то в конфигурации есть выпуклый и пустой шестиугольник. Предположим, что $|\mathcal{T}_{PQ} \cup \mathcal{T}_{QR}| \geq 3$.

Упомянутые выше условия означают, что с точки зрения расположения вершин четырёхугольника $ABCD$ без ограничения общности возможны две ситуации: либо $\{A, B\} \subset \mathcal{T}_{PQ}$ и $\{B, C\} \subset \mathcal{T}_{QR}$ (см. рис. 23 посередине), либо $\{A, B\} \subset \mathcal{T}_{PQ}$ и $\{C, D\} \subset \mathcal{T}_{QR}$ (см. рис. 23 справа).

В первой ситуации нужно рассмотреть сектора $(APQB), (BQRC), (CRD), (APD)$, покрывающие плоскость вокруг четырёхугольника $ABCD$. При необходимости два последних сектора можно заменить на $(CR'D)$ и $(AP'D)$ в соответствии с логикой из предыдущего пункта (см. рис. 23). При этом вполне может случиться, что $R' = P$ или что $P' = R$. Таким образом, при любом раскладе получается покрытие плоскости вокруг четырёхугольника $ABCD$ двумя 3-секторами и двумя 4-секторами с надлежащими ограничениями числа вершин семиугольника в каждом из них (см. рис. 23).

Во второй ситуации имеем другой набор секторов: $(APQB), (BQC), (CQRD), (APD)$. Как и прежде, можно при необходимости заменить сектор

(APD) сектором ($AP'D$) (или сектором (ARD), если $R \in APD$) и снова получить нужное покрытие.

В обеих ситуациях применяем логику из пункта 4.2.5 и находим выпуклый и пустой шестиугольник в данной конфигурации.

Заметим, что в обеих ситуациях, которые мы только что рассмотрели, используется одинаковое количество 3- и 4-секторов. Аналогичная картина будет наблюдаться и в дальнейшем.

4.3.3. Конфигурации вида $(7, 5, \geq 4)$

На самом деле в этом пункте нужно рассмотреть только два случая: $(7, 5, 4)$ и $(7, 5, 5)$.

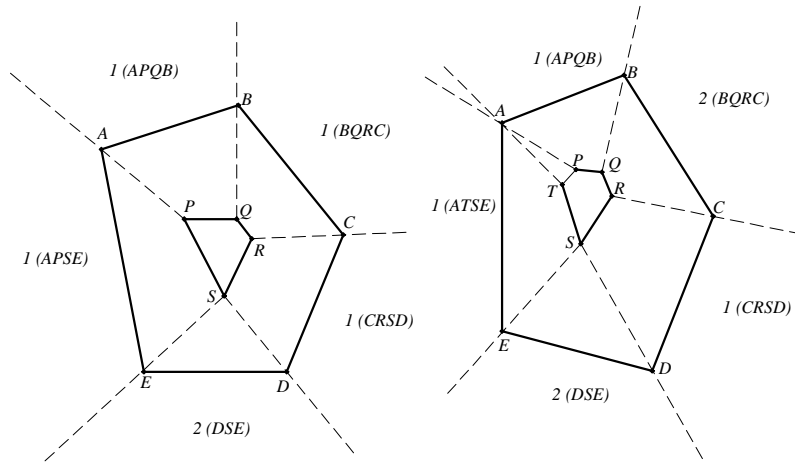


Рис. 24. Конфигурации вида $(7, 5, \geq 4)$

Зафиксируем пять последовательных вершин j -угольника $P = V_1, Q = V_2, R = V_3, S = V_4$ и $T = V_5$ (здесь $P = T$, если $j = 4$). Обозначим через \mathcal{T}'_{PQ} множество \mathcal{T}'_1 , через \mathcal{T}'_{QR} множество \mathcal{T}'_2 , через \mathcal{T}'_{RS} множество \mathcal{T}'_3 , а через \mathcal{T}'_{ST} множество \mathcal{T}'_4 .

Согласно утверждению 1' при $t = 2$, если выполнено хотя бы одно из неравенств

$$|\mathcal{T}'_{PQ}| < 1, \quad |\mathcal{T}'_{QR}| < 1, \quad |\mathcal{T}'_{RS}| < 1, \quad |\mathcal{T}'_{ST}| < 1,$$

то в конфигурации есть выпуклый и пустой шестиугольник, и всё в порядке. Таким образом, остаётся рассмотреть случай

$$|\mathcal{T}'_{PQ}| \geq 1, \quad |\mathcal{T}'_{QR}| \geq 1, \quad |\mathcal{T}'_{RS}| \geq 1, \quad |\mathcal{T}'_{ST}| \geq 1. \tag{1}$$

Сперва рассмотрим ситуацию, когда $P = T$. Применим утверждение 1' с $t = 3$ и $t = 4$. Получаем, что

$$|\mathcal{T}'_{PQ} \cup \mathcal{T}'_{QR}| \geq 2, \quad |\mathcal{T}'_{QR} \cup \mathcal{T}'_{RS}| \geq 2, \quad |\mathcal{T}'_{RS} \cup \mathcal{T}'_{ST}| \geq 2, \quad (2)$$

$$|\mathcal{T}'_{PQ} \cup \mathcal{T}'_{QR} \cup \mathcal{T}'_{RS}| \geq 3, \quad |\mathcal{T}'_{QR} \cup \mathcal{T}'_{RS} \cup \mathcal{T}'_{ST}| \geq 3. \quad (3)$$

Покажем, что

$$|\mathcal{T}'_{PQ} \cup \mathcal{T}'_{QR} \cup \mathcal{T}'_{RS} \cup \mathcal{T}'_{ST}| \geq 4. \quad (4)$$

Предположим противное. Тогда ввиду утверждения 1'

$$|\mathcal{T}'_{PQ} \cup \mathcal{T}'_{QR} \cup \mathcal{T}'_{RS} \cup \mathcal{T}'_{ST}| = 3.$$

Обозначим последовательные стороны пятиугольника $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_5$ (например, $\mathcal{L}_1 = AB$, и нумерация идёт по часовой стрелке). Аналогично упорядочим стороны четырёхугольника, полагая $\mathcal{M}_1 = PQ$ и т. д. вплоть до \mathcal{M}_4 (двигаемся по часовой стрелке).

Снова апеллируем к утверждению 1' и замечаем, что объединение любых трёх множеств типа \mathcal{T}'_{PQ} имеет мощность 3, а значит, все такие объединения совпадают между собой. Без ограничения общности можно считать, что они имеют один из следующих двух видов:

$$\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_4\}, \quad \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3\}.$$

Ясно, что каждое множество типа \mathcal{T}'_{PQ} содержит последовательные стороны пятиугольника. Это наблюдение вместе с утверждением 1' немедленно приводит нас к противоречию в первой из ситуаций, рассмотренных выше. Действительно, любое \mathcal{T}' является либо подмножеством в $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$, либо подмножеством в $\{\mathcal{L}_4\}$. Согласно утверждению 1' такое возможно лишь тогда, когда $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ содержит не более двух, а $\{\mathcal{L}_4\}$ не более одного множества \mathcal{T}' . Противоречие.

Остаётся изучить вторую ситуацию. Обозначим через \mathcal{M}_i последнюю (по нумерации) сторону четырёхугольника, такую что в отвечающем ей множестве \mathcal{T}' лежит сторона \mathcal{L}_3 . Тогда возможны пять различных ситуаций расположения сторон $\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_{i+1}$ ($i+1$ берём по модулю 5, если необходимо), и все они изображены на рис. 25. Здесь в первом случае прямая, проходящая через \mathcal{M}_{i+1} , пересекает только сторону \mathcal{L}_3 , во втором — стороны $\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_5$, и т. д. В первых трёх случаях имеем противоречие с предположением о том, что $\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5$ не принадлежат никакому \mathcal{T}' . В последних двух случаях получаем противоречие с утверждением 1.

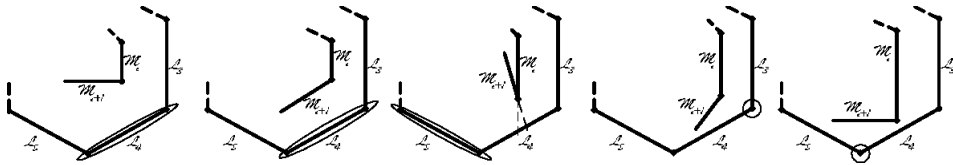


Рис. 25. Пять различных ситуаций расположения сторон

Итак, имеем совокупность из четырёх множеств $T'_{PQ}, T'_{QR}, T'_{RS}, T'_{ST}$, удовлетворяющую системе неравенств (1)–(4). Применим к ней теорему Ф. Холла [3] и найдём систему различных представителей, состоящую из сторон $\mathcal{L}_{PQ}, \mathcal{L}_{QR}, \mathcal{L}_{RS}, \mathcal{L}_{ST}$. Пары сторон $(PQ, \mathcal{L}_{PQ}), \dots, (ST, \mathcal{L}_{ST})$ порождают четыре 4-сектора, изображённые на рис. 24 слева. Чтобы полностью покрыть плоскость вокруг пятиугольника $ABCDE$, нужно добавить к этим 4-секторам ещё один 3-сектор (см. рис. 24 слева, 3-сектор (DSE)). Ввиду пункта 4.2.5 выпуклый и пустой шестиугольник в конфигурации заведомо есть.

Теперь, если $P \neq T$, то картинка формально выглядит так, как показано на рис. 24 справа. Однако вид её (т. е. наличие на ней четырёх 4-секторов и одного 3-сектора) обусловлен ровно теми же соображениями, что и те, которые мы применяли выше. Завершение доказательства очевидно.

4.4. Индивидуальные случаи

В этом подразделе будут рассмотрены оставшиеся случаи вида $(7, 6, 3)$, $(7, 6, 4)$, $(7, 6, 5)$ и $(7, 5, 3)$. К каждому случаю потребуется индивидуальный подход, также необходимо применить подробный перебор нескольких возможностей.

4.4.1. Конфигурации вида $(7, 6, 3)$

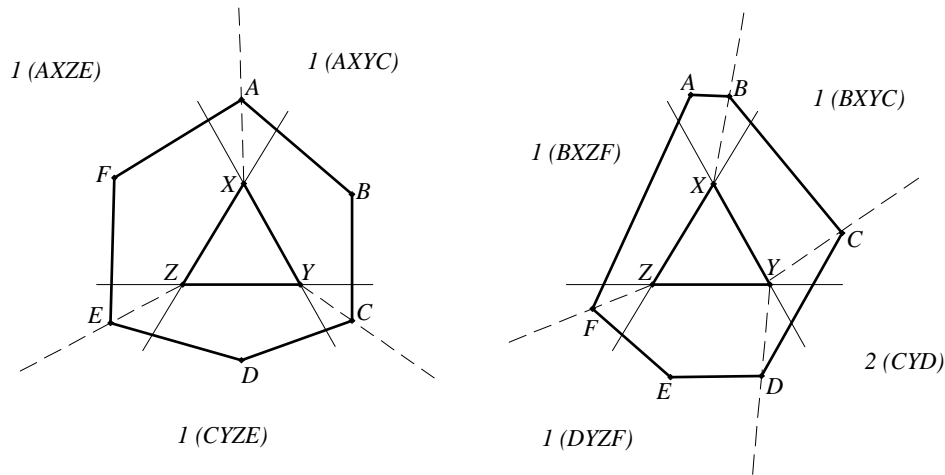


Рис. 26. Конфигурация вида $(7,6,3)$

Шестиугольник $ABCDEF$ с треугольником XYZ внутри образуют $(6, 3)$ -расстановку вида $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3]$, для которой выполнено равенство

$\sum(a_i + b_i) = 6$. Заметим, что если хотя бы одно из неравенств (см. рис. 6)

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + a_2 &\leq 3, & a_2 + b_2 + a_3 &\leq 3, & a_3 + b_3 + a_1 &\leq 3, \\ b_1 + a_2 + b_2 &\leq 3, & b_2 + a_3 + b_3 &\leq 3, & b_3 + a_1 + b_1 &\leq 3, \\ b_i &\leq 2 \quad (1 \leq i \leq 3) \end{aligned}$$

не выполняется, то выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри заведомо есть. Если же все неравенства выполнены, то, как нетрудно заметить, первые шесть из них обращаются в равенства. Из этого следует, что $a_1 = b_2$, $a_2 = b_3$ и $a_3 = b_1$. Таким образом, остаётся изучить только две расстановки, а именно $[1, 1, 1, 1, 1, 1]$ и $[2, 1, 0, 2, 1, 0]$ (см. рис. 26). Для каждой из них легко строится нужное разбиение плоскости вокруг шестиугольника $ABCDEF$ на сектора (см. рис. 26). В соответствии с логикой из пункта 4.2.5 приходим к выводу, что выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри всегда найдётся.

4.4.2. Конфигурации вида (7, 6, 4)

Рассмотрим шестиугольник $ABCDEF$ с четырёхугольником $PQRS$ как $(6, 4)$ -расстановку $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4]$, для которой $\sum(a_i + b_i) = 6$. Заметим, что если не выполнено хотя бы одно из неравенств (см. рис. 9)

$$\begin{aligned} b_1 + a_2 + b_2 &\leq 2, & b_2 + a_3 + b_3 &\leq 2, & b_3 + a_4 + b_4 &\leq 2, & b_4 + a_1 + b_1 &\leq 2, \\ b_1 + b_3 &\leq 1, & b_2 + b_4 &\leq 1, \end{aligned}$$

то выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри заведомо есть. Если же выполнены все неравенства, то из первых четырёх из них следует, что $a_1 + a_3 \geq 2$ и $a_2 + a_4 \geq 2$. Более того, случай $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ невозможен, так как приводит к нарушению какого-то из неравенств. Таким образом, по крайней мере одно из a_i равно 2.

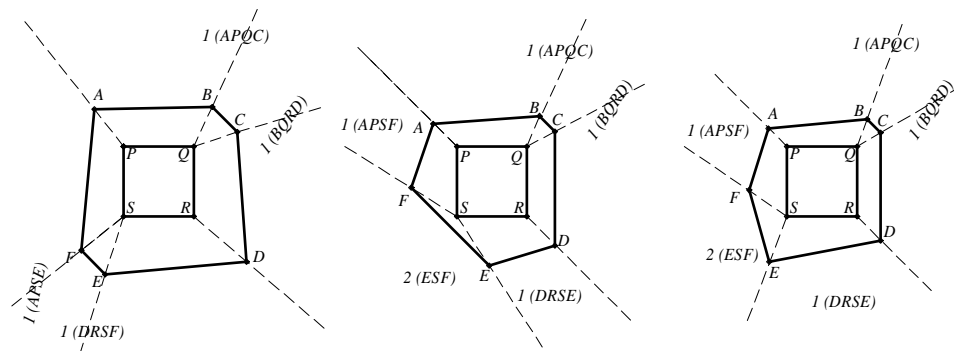


Рис. 27. Конфигурация вида (7, 6, 4)

Без ограничения общности будем считать, что $a_1 = 2$, тогда (по соответствующему неравенству) $b_1 = b_4 = 0$. Заметим, что если не выполнены неравенства $a_1 + b_1 + a_2 \leq 3$ и $a_1 + b_4 + a_4 \leq 3$, то выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри снова есть. Эти неравенства вместе с $a_2 + a_4 \geq 2$ позволяют заключить, что $a_2 = a_4 = 1$. Таким образом, остаётся рассмотреть расстановки вида $[2, 0, 1, ?, ?, ?, 1, 0]$. Всего таких расстановок существует только три ($[2, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0]$, $[2, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0]$, $[2, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0]$), и для каждой из них можно построить покрытие плоскости вокруг шестиугольника $ABCDEF$ секторами с соответствующими ограничениями (см. рис. 27). Согласно логике из пункта 4.2.5 приходим к выводу, что выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри в этой конфигурации всегда есть.

4.4.3. Конфигурации вида (7, 6, 5)

Шестиугольник $ABCDEF$ вместе с пятиугольником $PQRST$ образуют (6, 5)-расстановку вида $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5]$, для которой $\sum(a_i + b_i) = 6$. Достаточно рассмотреть случаи, когда выполнены неравенства (см. рис. 12)

$$\begin{aligned} 0 \leq b_i \leq 1 \quad (1 \leq i \leq 5), \\ a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 \leq 3, \quad a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + a_4 \leq 3, \\ a_3 + b_3 + a_4 + b_4 + a_5 \leq 3, \quad a_4 + b_4 + a_5 + b_5 + a_1 \leq 3, \\ a_5 + b_5 + a_1 + b_1 + a_2 \leq 3 \end{aligned}$$

(если хотя бы одно из них не выполнено, то выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри заведомо есть). Из этих неравенств следует, что $3 \sum a_i + 2 \sum b_i \leq 15$, а значит, $5 \geq \sum b_i \geq 3$ и, соответственно, $1 \leq \sum a_i \leq 3$. Подробно рассмотрим все возможные значения для суммы $\sum b_i$.

Если $\sum b_i = 5$, то расстановка $[?, 1, ?, 1, ?, 1, ?, 1, ?, 1]$ без ограничения общности единственным образом достраивается до $[1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]$. Если

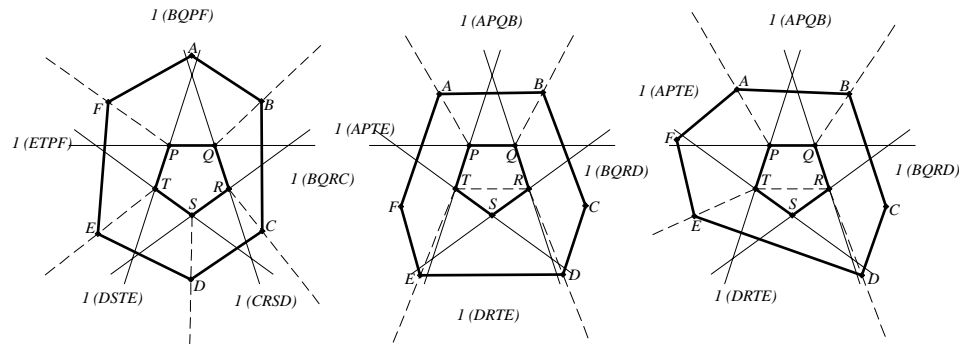


Рис. 28. Конфигурации вида (7, 6, 5)

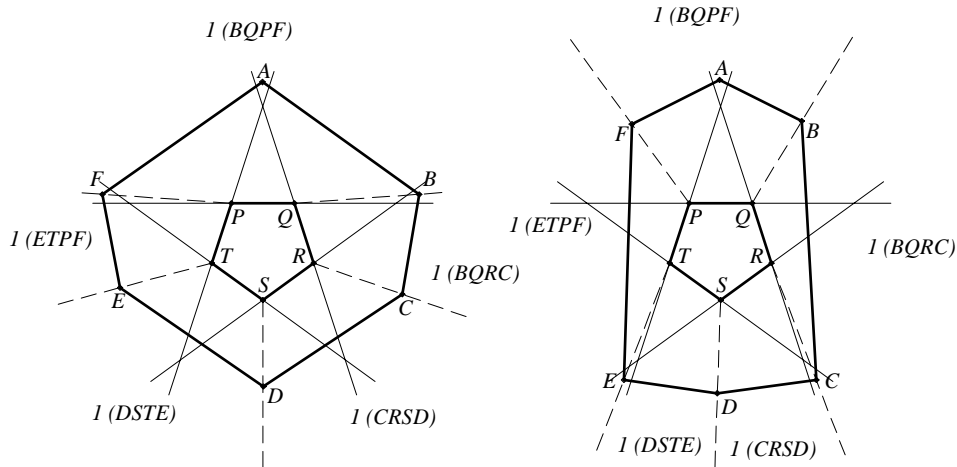


Рис. 29. Конфигурации вида (7, 6, 5)

$\sum b_i = 4$, то расстановка $[?, 1, ?, 1, ?, 1, ?, 1, ?, 0]$ без ограничения общности достраивается (с учётом неравенств) двумя способами: $[1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0]$ или $[1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0]$. Если же $\sum b_i = 3$, то имеем две возможные расстановки, $[?, 1, ?, 1, ?, 1, ?, 0, ?, 0]$ и $[?, 1, ?, 1, ?, 0, ?, 1, ?, 0]$, каждая из которых без ограничения общности достраивается одним способом: $[1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0]$ и $[0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0]$ соответственно. Все пять расстановок изображены на рис. 28 и 29, для каждой из них указаны сектора с соответствующими ограничениями на число вершин семиугольника в них. Согласно логике из пункта 4.2.5 заключаем, что при любом расположении точек выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри найдётся.

4.4.4. Конфигурации вида (7, 5, 3)

Прежде всего заметим, что конструкция, состоящая из пятиугольника $ABCDE$ и треугольника PQR , при условии отсутствия в ней выпуклого шестиугольника с не более чем одной точкой внутри (должны выполняться те же неравенства, что и для случая (7, 6, 3)), может представлять собой (5, 3)-расстановку только одного из следующих семи видов с точностью до эквивалентности записи (см. раздел 3.2):

$$[2, 1, 0, 2, 0, 0], [2, 1, 0, 1, 1, 0], [2, 0, 1, 2, 0, 0], [2, 0, 1, 1, 1, 0], \\ [1, 1, 1, 1, 1, 0], [1, 1, 0, 2, 1, 0], [3, 0, 0, 2, 0, 0].$$

Доказательство этого факта сводится к простому перебору случаев, который мы здесь не осуществляем. Для большей наглядности мы лишь указываем

на рис. 30 схемы каждой из $(5, 3)$ -расстановок, перечисленных выше (ср. раздел 3.2): здесь a_1 — количество точек в верхней части схемы, запись $[a_1, b_1, \dots]$ производится против часовой стрелки.

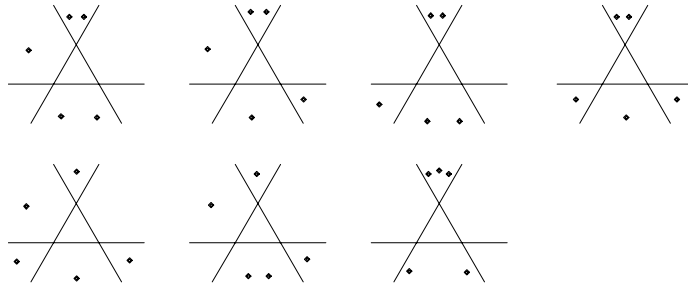


Рис. 30. Схемы всех возможных расстановок для конфигураций вида $(7, 5, 3)$

На рисунках 31, 32 и 33 разобраны все семь ситуаций и указаны соответствующие покрытия плоскости вокруг пятиугольника секторами с ограничениями. Согласно логике из пункта 4.2.5 выпуклый шестиугольник с не более чем одной точкой внутри в конфигурации всегда найдётся. Теорема доказана.

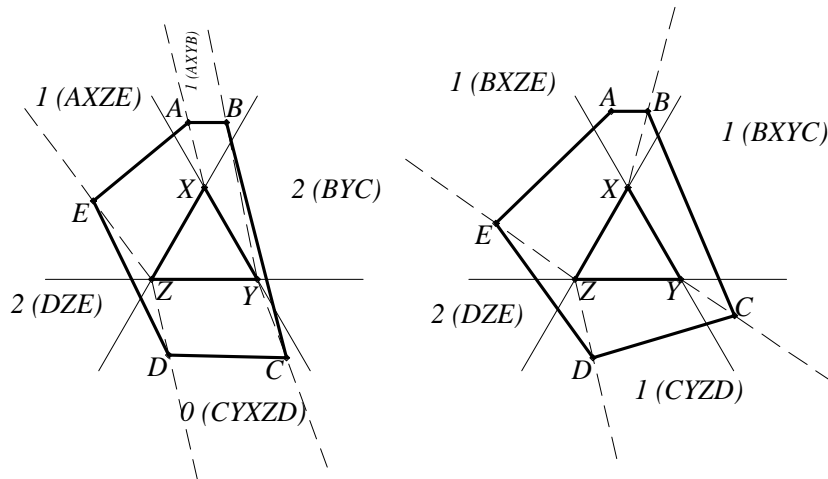


Рис. 31. Конфигурации вида $(7, 5, 3)$

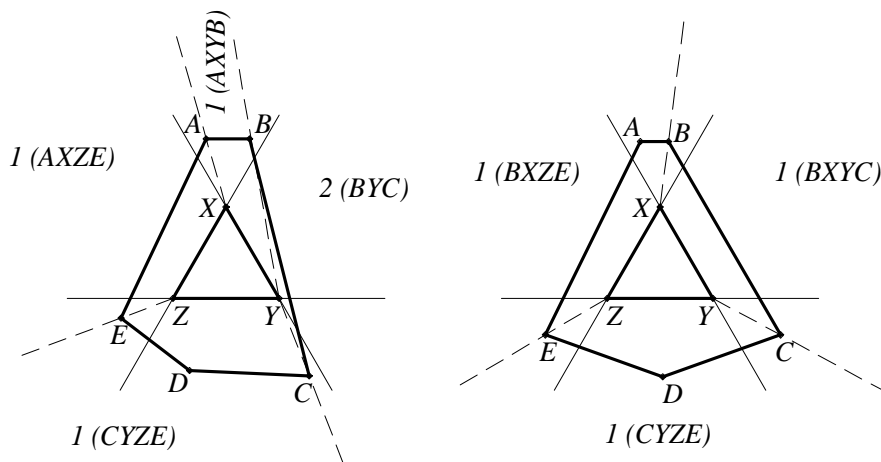


Рис. 32. Конфигурации вида (7, 5, 3)

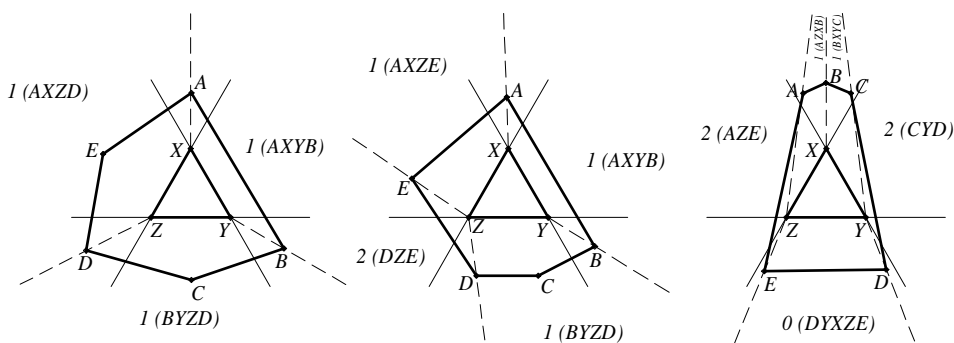


Рис. 33. Конфигурации вида (7, 5, 3)

5. Выводы

В контексте изучения величины $h(6)$ представляет интерес вопрос, в каких из разобранных нами случаев можно гарантировать наличие выпуклого и *пустого* шестиугольника. По доказательству теоремы можно проследить, что выпуклый и пустой шестиугольник гарантированно есть во всех случаях из раздела 4.3 (минимальность), в случаях (7, 2, 0) и (7, 3, 1) (раздел 4.2) и в следующих тривиальных случаях (раздел 4.1): (7, 0, 0), (7, 6, 0) и (7, i , 6) ($3 \leq i \leq 6$) — всего 18 из рассмотренных случаев. Кроме того, по лемме Вальтра, выпуклый и пустой шестиугольник есть во всех конфигурациях типа (7, i , j , k , ...), где

$k > 0$. Во всех остальных случаях (всего их 13) существование выпуклого и пустого шестиугольника не гарантируется, т. е. всегда существует такое расположение точек в соответствующих конфигурациях, что выпуклого и пустого шестиугольника нет.

Литература

- [1] Кошелев В. А. Задача Эрдёша—Секереша о пустых шестиугольниках на плоскости // *Мат. сб.* — В печати.
- [2] Сендов Бл. Обязательные конфигурации точек на плоскости // *Фундамент. и прикл. мат.* — 1995. — Т. 1, вып. 2. — С. 491—516.
- [3] Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970.
- [4] Erdős P. Some more problems in elementary geometry // *Austral. Math. Soc. Gaz.* — 1978. — Vol. 5. — P. 52—54.
- [5] Erdős P., Szekeres G. A combinatorial problem in geometry // *Compositio Math.* — 1935. — Vol. 2. — P. 463—470.
- [6] Erdős P., Szekeres G. On some extremum problems in elementary geometry // *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* — 1961. — No. 3-4. — P. 53—62.
- [7] Gerken T. On empty convex hexagons in planar point set // *Discrete Comput. Geom.* — 2008. — Vol. 39. — P. 239—272.
- [8] Graham R. L., Rothschild B. L., Spencer J. H. *Ramsey Theory.* — New York: Wiley, 1990.
- [9] Harborth H. Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen // *Elem. Math.* — 1978. — Vol. 33. — P. 116—118.
- [10] Horton J. D. Sets with no empty 7-gons // *Can. Math. Bull.* — 1983. — Vol. 26. — P. 482—484.
- [11] Morris W., Soltan V. The Erdős—Szekeres problem on points in convex position // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 2000. — Vol. 37, No. 4. — P. 437—458.
- [12] Nicolas C. The empty hexagon theorem // *Discrete Comput. Geom.* — 2007. — Vol. 38, No. 2. — P. 389—397.
- [13] Nyklova H. Almost empty polygons // *Studia Sci. Math. Hungar.* — 2003. — Vol. 40, no. 3. — P. 269—286.
- [14] Overmars M. Finding sets of points without empty convex 6-gons // *Discrete Comput. Geom.* — 2003. — Vol. 29. — P. 153—158.
- [15] Overmars M., Scholten B., Vincent I. Sets without empty convex 6-gons // *Bull. European Assoc. Theoret. Comput. Sci.* — 1989. — Vol. 37. — P. 160—168.
- [16] Ramsey F. P. On a problem of formal logic // *Proc. London Math. Soc. Ser. 2.* — 1930. — Vol. 30. — P. 264—286.
- [17] Szekeres G., Peters L. Computer solution to the 17-point Erdős—Szekeres problem // *ANZIAM J.* — 2006. — Vol. 48. — P. 151—164.
- [18] Tóth G., Valtr P. The Erdős—Szekeres theorem: Upper bounds and related results // *Combinatorial and Computational Geometry.* — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. — (Math. Sci. Res. Inst. Publ.; Vol. 52). — P. 557—568.
- [19] Valtr P. On the empty hexagons. — <http://kam.mff.cuni.cz/~valtr/h.ps>.