

О некоторых группах, близких к нильпотентным

Л. А. КУРДАЧЕНКО

Днепропетровский национальный университет, Украина
e-mail: lkurdachenko@hotmail.com

И. Я. СУББОТИН

Национальный университет, Лос-Анджелес, США
e-mail: isubboti@nu.edu

В. А. ЧУПОРДЯ

Днепропетровский национальный университет, Украина
e-mail: vchupordya@hotmail.com

УДК 512.544

Ключевые слова: локально почти разрешимая группа, нильпотентная группа, пронормальная подгруппа, субнормальная подгруппа.

Аннотация

Изучаются локально почти разрешимые группы, всякая подгруппа которых либо пронормальна, либо субнормальна. Доказано, что если такая группа не имеет кручения, то она нильпотентна, и получен набросок структуры локально конечных групп такого типа.

Abstract

L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin, V. A. Chupordya, On some near to nilpotent groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 6, pp. 121–134.

Locally (soluble-by-finite) groups each of whose subgroups is either pronormal or subnormal are studied. It is proven that such torsion-free groups are nilpotent and a sketch of the structure of locally finite groups of this type is obtained.

Для многих важных типов подгрупп группы существуют их антиподы, т. е. подгруппы, свойства которых диаметрально противоположны данным. Так, антиподом нормальных подгрупп будут контранормальные подгруппы. Следуя Д. Роусу [19], подгруппу H группы G будем называть *контранормальной*, если $H^G = G$. Контранормальные подгруппы могут рассматриваться и как антиподы для таких обобщений нормальных подгрупп, как подгруппы, отличные от своих нормализаторов, и субнормальные подгруппы. На это указывают следующие известные критерии нильпотентности конечных групп:

- конечная группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда каждая её подгруппа субнормальна в G ;
- конечная группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда она не включает в себя собственных контранормальных подгрупп.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 6, с. 121–134.

© 2008 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Другим антиподом для подгрупп, отличных от своих нормализаторов, и субнормальных подгрупп будут *самонормализуемые подгруппы*, т. е. подгруппы, совпадающие со своими нормализаторами. Важным специфическим типом самонормализуемых подгрупп являются абнормальные подгруппы. Напомним, что подгруппа H группы G называется *абнормальной*, если для любого элемента g из G подгруппа $\langle H, H^g \rangle$ содержит этот элемент g . Отметим, что всякая абнормальная подгруппа будет также контранормальной. Образно говоря, подгруппы и их антиподы расположены на разных полюсах группы, между которыми расположены другие разнообразные промежуточные подгруппы. Чем меньше этих промежуточных подгрупп, тем отчетливее, определеннее становится структура группы. В частности, естественно рассмотреть ситуацию, когда среди подгрупп группы присутствуют только подгруппы определенного типа и их антиподы. Одной из первых работ, реализующей этот подход, была работа А. Фаттахы [8], в которой были описаны конечные группы, всякая подгруппа которых либо нормальна, либо абнормальна. Г. Эберт и С. Бауман [6] обобщили результаты [8], рассмотрев конечные группы, все подгруппы которых либо субнормальны, либо абнормальны. Изучение бесконечных групп с этим свойством проводилось позднее в работе [7]. В этой же работе также были рассмотрены группы, все подгруппы которых либо субнормальны, либо контранормальны. Позднее в [11] были рассмотрены группы, все подгруппы которых либо субнормальны, либо самонормализуемы. Естественно, задачи такого рода включает в себя задачи о строении групп, все подгруппы которых имеют один тип. Это одна из самых старых, классических задач теории групп. В частности, существенную роль в изучении отмеченных выше групп играют свойства групп, все подгруппы которых субнормальны. Эта проблематика имеет богатую историю, в этой области работали многие известные алгебраисты, в ней получено много интересных и глубоких результатов. Мы не будем касаться этой тематики, она очень хорошо представлена в [5]. Отметим в этой связи тот интересный факт, что для некоторых групп невозможно одновременное существование в них субнормальных подгрупп и их антиподов. Такого рода классы групп отмечались в [7, 11]. Такими оказались непериодические группы из изучаемых там классов, в частности, группы без кручения оказались нильпотентными. Другими словами, были получены некоторые критерии нильпотентности групп.

Пронормальные подгруппы являются обобщением абнормальных подгрупп. Напомним, что подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента g из G подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. Полное описание локально ступенчатых групп, все подгруппы которых пронормальны, было получено в [12].

Всякая пронормальная подгруппа будет контранормальной в своём нормальном замыкании, так что некоторые её свойства противоположны свойствам субнормальных подгрупп. Следует отметить, что между субнормальными и пронормальными подгруппами уже нет такого резкого контраста, как между субнормальными и абнормальными подгруппами. Пронормальная подгруппа может быть субнормальной, но в этом случае она нормальна. В [14, 15] изучались

конечные группы, все подгруппы которых либо субнормальны, либо пронормальны. В данной работе начинается изучение бесконечных групп такого рода. Как и для других бесконечных групп, сразу возникает вопрос, в каком классе возможно достаточно отчётливое описание таких групп. В этой связи отметим, что А. Ю. Ольшанским [1, гл. 9] были построены бесконечные p -группы для достаточно больших простых чисел p , все собственные неединичные подгруппы которых имеют простой порядок p . Поэтому всякая собственная неединичная подгруппа такой группы будет максимальной и ненормальной, т. е. абнормальной. В частности, все подгруппы такой группы пронормальны. Этот пример показывает, что реальное описание бесконечных групп, все подгруппы которых либо субнормальны, либо пронормальны, возможно только при наложении некоторых ограничений. В настоящей работе таким ограничением является локальная почти разрешимость группы. Это ограничение является достаточно типичным в такого рода исследованиях. Основной целью данной работы было рассмотрение непериодических групп, все подгруппы которых либо субнормальны, либо пронормальны. Как и в отмеченных выше работах, оказалось, что группы без кручения с таким свойством нильпотентны. Это фактически является основным результатом данной работы. Был получен также набросок структуры локально конечных групп такого типа.

Лемма 1. Пусть G — группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны.

1. Если H — подгруппа G , то всякая подгруппа H либо пронормальна, либо субнормальна.
2. Если L — нормальная подгруппа G , то всякая подгруппа G/L либо пронормальна, либо субнормальна.
3. Если U, V — подгруппы G , причём U нормальна в V , то всякая подгруппа V/U либо пронормальна, либо субнормальна.

Доказательство. В самом деле, если K — подгруппа H , то H либо субнормальна, либо пронормальна во всей группе G . Если K субнормальна (пронормальна) в G , то K субнормальна (соответственно пронормальна) и в H .

Подобным образом, если K субнормальна (пронормальна) в G , то KL/L субнормальна (соответственно пронормальна) в G/L .

Утверждение 3 является непосредственным следствием утверждений 1 и 2. $\square$

Следующий результат, который был доказан в [13], очень полезен для наших рассуждений.

Лемма 2. Пусть G — локально нильпотентная группа. Если подгруппа H пронормальна в группе G , то она нормальна в G .

Следствие 1. Пусть G — группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Если H — локально нильпотентная подгруппа G , то всякая подгруппа H субнормальна в H .

Доказательство. В самом деле, пусть K — произвольная подгруппа H . Если K субнормальна в G , то K будет субнормальной и в H . Если же K пронормальна в G , то K пронормальна в H . Тогда ввиду леммы 2 K будет нормальной в H . $\square$

Следствие 2. Пусть G — группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Если H — локально нильпотентная подгруппа G , то H разрешима.

Доказательство. В самом деле, из следствия 1 леммы 2 получаем, что всякая подгруппа H будет субнормальной. Из главного результата работы [17] вытекает теперь, что H разрешима. $\square$

Если G — группа, то положим

$$\mathbf{B}(G) = \langle g \in G \mid \langle g \rangle \text{ — субнормальная подгруппа } G \rangle.$$

Подгруппа $\mathbf{B}(G)$ называется *радикалом Бэра* группы G . Отметим, что подгруппа $\mathbf{B}(G)$ локально нильпотентна (см., например, [16, теорема 2.5.1]).

Лемма 3. Пусть G — группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Если локально нильпотентная подгруппа H содержит элемент $g \notin \mathbf{B}(G)$, то циклическая подгруппа $\langle g \rangle$ нормальна в H и $H/\langle g \rangle$ будет дедекиндовой группой.

Доказательство. Поскольку подгруппа $\langle g \rangle$ не является субнормальной, она пронормальна в G . Тогда $\langle g \rangle$ также пронормальна в H . Ввиду леммы 2 $\langle g \rangle$ будет нормальной в H . Пусть F — произвольная конечно порождённая подгруппа H , содержащая элемент g . Тогда $\langle g \rangle$ нормальна и в F . Будучи конечно порождённой, F нильпотентна. Если предположить теперь, что F субнормальна в G , то и подгруппа $\langle g \rangle$ должна быть субнормальной в G , а это противоречит выбору элемента g . Полученное противоречие показывает, что F пронормальна в G . В этом случае F будет пронормальной и в H , и ввиду леммы 2 F нормальна в H . Таким образом, каждая конечно порождённая подгруппа $H/\langle g \rangle$ нормальна в $H/\langle g \rangle$. Отсюда вытекает, что и всякая подгруппа $H/\langle g \rangle$ будет нормальной в $H/\langle g \rangle$, так что $H/\langle g \rangle$ — дедекиндова группа. $\square$

Следствие 1. Пусть G — группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Если $\mathbf{B}(G)$ не включает локально нильпотентную подгруппу H , то H нильпотентна.

Доказательство. Выберем элемент $g \in H \setminus \mathbf{B}(G)$. Ввиду леммы 3 $\langle g \rangle$ — нормальная подгруппа H , и фактор-группа $H/\langle g \rangle$ будет дедекиндовой. В частности, $H/\langle g \rangle$ нильпотентна. Предположим сначала, что g имеет конечный порядок. Так как $\langle g \rangle$ — конечная нормальная подгруппа H , то $\langle g \rangle$ имеет конечный ряд

$$\langle 1 \rangle = L_0 \leq L_1 \leq \dots \leq L_{n-1} \leq L_n = \langle g \rangle,$$

составленный из H -инвариантных подгрупп, факторы которого будут H -главными. Отметим теперь, что главные факторы локально нильпотентной группы

являются центральными (см., например, [2, предложение 1.16]). Отсюда вытекает, что гиперцентр с номером n подгруппы H включает в себя $\langle g \rangle$. Поскольку $H/\langle g \rangle$ нильпотентна, H также будет нильпотентной.

Предположим, что g имеет бесконечный порядок. Если p — произвольное простое число, то $\langle g \rangle/\langle g^p \rangle$ будет H -главным фактором. Следовательно, он H -централен, так что $[\langle g \rangle, H] \leq \langle g^p \rangle$. Так как это имеет место для любого простого числа p , то

$$[\langle g \rangle, H] \leq \bigcap_{p \in \mathbf{P}} \langle g^p \rangle = \langle 1 \rangle$$

(здесь через $\mathbf{P}$ обозначено множество всех простых чисел). Другими словами, центр H включает в себя $\langle g \rangle$, что снова влечёт нильпотентность подгруппы H . $\square$

Следствие 2. Пусть G — группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Тогда её радикал Бэра совпадает с локально нильпотентным радикалом.

Доказательство. Пусть L — локально нильпотентный радикал группы G . Допустим, что $L \neq \mathbf{B}(G)$. Используя тогда следствие 1 леммы 3, получим, что L нильпотентна. Но в этом случае следствие 1 леммы 2 показывает, что всякая подгруппа L будет субнормальной, в частности, $L \leq \mathbf{B}(G)$. Полученное противоречие доказывает равенство $L = \mathbf{B}(G)$. $\square$

Напомним, что группа G называется T -группой, если каждая её субнормальная подгруппа будет нормальной в G . Группа G называется $\bar{T}$ -группой, если всякая подгруппа G является T -группой.

Лемма 4. Пусть G — группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Тогда группа $G/\mathbf{B}(G)$ будет $\bar{T}$ -группой.

Доказательство. Пусть $B = \mathbf{B}(G)$. Если $g \notin B$, то подгруппа $\langle g \rangle$ не может быть субнормальной. Поэтому $\langle g \rangle$ пронормальна в G . Но тогда и $\langle g \rangle B/B$ пронормальна в фактор-группе G/B . Другими словами, всякая циклическая подгруппа G/B будет пронормальной. В этом случае G/B является $\bar{T}$ -группой [22]. $\square$

Следствие. Пусть G — локально почти разрешимая группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны, $B = \mathbf{B}(G)$.

1. Если G/B не является периодической, то G/B абелева.
2. Если G/B периодическая, то G/B включает в себя такую абелеву нормальную подгруппу L/B , что каждая подгруппа L/B является G -инвариантной, G/L — дедекиндова группа, $2 \notin \Pi(L/B)$ и $\Pi(L/B) \cap \Pi(G/L) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть F/B — произвольная конечно порождённая подгруппа G/B . Будучи почти разрешимой, F/B имеет разрешимую нормальную подгруппу S/B конечного индекса. Отметим, что конечные $\bar{T}$ -группы метабелевы, поэтому F/B разрешима. Будучи разрешимой, F/B метабелева [18, теорема 2.3.1.]. Отсюда вытекает, что G/B метабелева. Теперь можно применить [18, теорема 6.1.1]. $\square$

Лемма 5. Пусть G — локально конечная группа и H — нормальная подгруппа G . Пусть π — множество простых чисел. Предположим, что всякая силовская π -подгруппа G будет локально нильпотентной. Если G имеет пронормальную силовскую π -подгруппу S , то SH/H является силовской π -подгруппой G/H .

Доказательство. Обозначим через P/H силовскую π -подгруппу G/H , которая включает в себя SH/H . Выберем в P/H произвольную конечную подгруппу F/H . Существует такая конечная подгруппа K , что $F = KH$. Нетрудно показать, что $F = RH$, где R — силовская π -подгруппа K . Поскольку каждая π -подгруппа G является локально нильпотентной, R нильпотентна. Отсюда вытекает, что и группа $F/H = RH/H \cong R/(R \cap H)$ будет нильпотентной. Другими словами, P/H локально нильпотентна. Так как S пронормальна в G , то SH/H будет пронормальной подгруппой в G/H . Так что SH/H пронормальна в P/H . Ввиду леммы 2 SH/H будет нормальной в P/H . Будучи пронормальной, S удовлетворяет свойству Фраттини, так что $P = (SH)N_P(S)$. Поскольку S нормальна в $L = N_P(S)$, то S содержит все π -элементы L , а потому L/S будет π' -группой. Тогда и

$$P/SH = (SH)L/(SH) \cong L/(L \cap SH) = L/(S(L \cap H))$$

будет π' -группой. С другой стороны, P/H является π -группой, поэтому и её фактор-группа $(P/H)/(SH/H) \cong P/SH$ будет π -группой. Будучи одновременно π -группой и π' -группой, P/SH должна быть единичной, т. е. $P = SH$. $\square$

Предложение 1. Пусть G — локально почти разрешимая группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Тогда всякая подгруппа $G/\mathbf{B}(G)$ будет пронормальной.

Доказательство. Положим $B = \mathbf{B}(G)$. Если G/B не является периодической, то ввиду следствия леммы 4 G/B абелева, в частности, каждая подгруппа G/B будет нормальной и, следовательно, пронормальной.

Предположим теперь, что группа G/B периодическая. Снова используя следствие леммы 4, получим, что G/B включает в себя такую абелеву нормальную подгруппу L/B , что каждая подгруппа L/B G -инвариантна, G/L — дедекиндова группа, $2 \notin \Pi(L/B)$ и $\Pi(L/B) \cap \Pi(G/L) = \emptyset$. Пусть $\pi = \Pi(G/L)$. Если S/B — силовская π -подгруппа G/B , то $(S/B) \cap (L/B) = \langle 1 \rangle$, так что S/B будет дедекиндовой. В частности, S/B нильпотентна. Если допустить, что S субнормальна, то S/B будет нормальной в G/B . В этом случае $G/B = L/B \times S/B$ — дедекиндова группа, в частности, каждая подгруппа G/B является нормальной и, следовательно, пронормальной. Предположим, что S пронормальна. Тогда S/B также пронормальна. Ввиду леммы 5 $(S/B)(L/B)/(L/B)$ является силовской π -подгруппой $(G/B)/(L/B)$. Однако $(G/B)/(L/B)$ — π -группа, так что $(S/B)(L/B)/(L/B) = (G/B)/(L/B)$, или $(S/B)(L/B) = G/B$. Используя теперь основной результат статьи [12], получим, что каждая подгруппа G/B будет пронормальной. $\square$

Лемма 6. Пусть G — локально почти разрешимая группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Тогда радикал Бэра группы G неединичен.

Доказательство. Если группа G имеет такой элемент g , что циклическая подгруппа $\langle g \rangle$ субнормальна, то $\mathbf{B}(G) \neq \langle 1 \rangle$. Поэтому предположим, что никакая циклическая подгруппа G не может быть субнормальной. Это означает, что всякая циклическая подгруппа G является пронормальной. Тогда G будет $\bar{T}$ -группой [22]. Как и в доказательстве следствия леммы 4, мы можем увидеть, что G метабелева. Но в этом случае G имеет субнормальные циклические подгруппы. Полученное противоречие показывает, что $\mathbf{B}(G) \neq \langle 1 \rangle$. $\square$

Предложение 2. Пусть G — локально почти разрешимая группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Тогда G разрешима.

Доказательство. Ввиду леммы 6 $\mathbf{B}(G) \neq \langle 1 \rangle$. Следствие 2 леммы 2 обеспечивает разрешимость подгруппы $\mathbf{B}(G)$. Ввиду следствия леммы 4 фактор-группа $G/\mathbf{B}(G)$ будет абелевой или метабелевой. Следовательно, G разрешима. $\square$

Лемма 7. Пусть G — группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Пусть $g \in G \setminus \mathbf{B}(G)$. Предположим, что G включает такие $\langle g \rangle$ -инвариантные подгруппы A и B , что A нормальна в B и B/A — абелева группа без кручения. Если элемент g имеет конечный порядок, то $g \in C_G(B/A)$.

Доказательство. Чтобы не усложнять обозначений, положим $A = \langle 1 \rangle$. Как будет видно из дальнейшего, это не ограничит общности рассуждений. Также можно допустить, что g является p -элементом для некоторого простого числа p . Положим $C = C_B(g)$. Предположим противное, пусть $C \neq B$. Заметим, что подгруппа C $\langle g \rangle$ -инвариантна. Пусть b — такой элемент подгруппы B , что $b^k \in C$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Положим $b_1 = b^g$, тогда $b_1^k = (b^g)^k = (b^k)^g = b^k$. Так как B — абелева подгруппа без кручения, отсюда получаем равенство $b^g = b_1 = b$, которое показывает, что $b \in C$. Другими словами, фактор-группа B/C не имеет кручения. Пусть $u \in B \setminus C$, $U = \langle u \rangle^{\langle g \rangle}$. Очевидно, U — конечно порождённая подгруппа и по доказанному выше $U/(U \cap C)$ не имеет кручения. Будучи конечно порождённой, группа $U/(U \cap C)$ является свободной абелевой. В частности, $U \cap C$ имеет дополнение в U . Тогда U включает в себя такую $\langle g \rangle$ -инвариантную подгруппу V , что $V \cap (U \cap C) = \langle 1 \rangle$ и $V(U \cap C)$ имеет конечный индекс в U [10, следствие 5.10]. В частности, V неединична. Поскольку $g \notin \mathbf{B}(G)$, то подгруппа $\langle g \rangle$ будет пронормальной. Поэтому $\langle g \rangle$ пронормальна и в $V\langle g \rangle$. Положим $V_1 = V^p$, $V_2 = V_1^p$, $V_{n+1} = V_n^p$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда V/V_n является конечной p -группой, а потому $\langle V/V_n, gV_n \rangle$ будет нильпотентной. Будучи пронормальной в $\langle V/V_n, gV_n \rangle$, подгруппа $\langle gV_n \rangle$ нормальна в $\langle V/V_n, gV_n \rangle$. Отсюда вытекает, что $[V, g] \leq \langle g \rangle V_n$. Так как это имеет место для всех $n \in \mathbb{N}$, то $[V, g] \leq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \langle g \rangle V_n$. Равенство $\langle 1 \rangle = V \cap (U \cap C)$ влечёт $V \cap \langle g \rangle = \langle 1 \rangle$. Учитывая, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \langle 1 \rangle$, получаем, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \langle g \rangle V_n = \langle g \rangle$. Следовательно, $[V, g] \leq \langle g \rangle$. С другой стороны,

V является $\langle g \rangle$ -инвариантной подгруппой, так что $[V, g] \leq V$. Поэтому $[V, g] \leq V \cap \langle g \rangle = \langle 1 \rangle$. В свою очередь, отсюда вытекает, что $V \leq C$, и мы получаем противоречие. Полученное противоречие доказывает равенство $A = C_A(g)$, что и требовалось. $\square$

Лемма 8. Пусть G — группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Пусть g — элемент бесконечного порядка и $g \notin \mathbf{B}(G)$. Предположим, что G включает в себя такие $\langle g \rangle$ -инвариантные подгруппы A и B , что A нормальна в B и B/A — абелева группа без кручения. Если существует такое натуральное число k , что $g^k \in C_G(B/A)$, то $g \in C_G(B/A)$.

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей леммы, можно предположить, что $A = \langle 1 \rangle$. Очевидно $g = g_1 \cdots g_m$, где $[g_j, g_t] = 1$ и $g_j C_G(B/A)$ является p_j -элементом для некоторого простого числа p_j , $1 \leq j, t \leq m$. Поэтому можно предполагать в дальнейшем, что $g C_G(B/A)$ — p -элемент для некоторого простого числа p . Пусть $s = |g C_G(B/A)|$ и $h = g^s$. Положим $C = C_B(g)$ и допустим, что $C \neq B$. Заметим, что подгруппа C является $\langle g \rangle$ -инвариантной. Как и выше, фактор-группа B/C не имеет кручения. Пусть $u \in B \setminus C$, $U = \langle u \rangle^{\langle g \rangle}$. Очевидно, что U — конечно порождённая подгруппа и, как и выше, фактор $U/(U \cap C)$ не имеет кручения. Будучи конечно порождённой, $U/(U \cap C)$ является свободной абелевой. В частности, $U \cap C$ имеет дополнение в U . Тогда U включает в себя такую $\langle g \rangle$ -инвариантную подгруппу V , что $V \cap (U \cap C) = \langle 1 \rangle$ и $V(U \cap C)$ имеет конечный индекс в U [10, следствие 5.10]. В частности, V неединична. Поскольку $g \notin \mathbf{B}(G)$, подгруппа $\langle g \rangle$ будет пронормальной. Поэтому $\langle g \rangle$ пронормальна и в $V \langle g \rangle$. Положим $V_1 = V^p$, $V_2 = V_1^p$, $V_{n+1} = V_n^p$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда V/V_n является конечной p -группой. Мы имеем соотношение $hV_n \in \zeta(\langle V/V_n, gV_n \rangle)$, и фактор-группа $\langle V/V_n, gV_n \rangle / \langle hV_n \rangle$ будет конечной p -группой. Это влечёт нильпотентность $\langle V/V_n, gV_n \rangle$. Будучи пронормальной в $\langle V/V_n, gV_n \rangle$, подгруппа $\langle gV_n \rangle$ нормальна в $\langle V/V_n, gV_n \rangle$. Тогда получаем, что $[V, g] \leq \langle g \rangle V_n$. Снова используя рассуждения, которые приводились выше при доказательстве леммы 7, получим противоречие. Это противоречие доказывает равенство $A = C_A(g)$, что и требовалось. $\square$

Напомним некоторые понятия из теории модулей, которые понадобятся далее.

Пусть R — кольцо и A — R -модуль. Положим

$$\text{Тог}_R(A) = \{a \in A \mid \text{Ann}_R(a) \neq \langle 0 \rangle\}.$$

Если R — область целостности, то $\text{Тог}_R(A)$ будет подмодулем A . Подмодуль $\text{Тог}_R(A)$ называется R -периодической частью A . Модуль A называется R -периодическим, если $A = \text{Тог}_R(A)$, и будем говорить, что A не имеет R -кручения, если $\text{Тог}_R(A) = \langle 0 \rangle$.

Лемма 9. Пусть G — группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Пусть g — такой элемент бесконечного порядка, что $\langle g \rangle \cap \mathbf{B}(G) = \langle 1 \rangle$. Предположим, что G включает в себя такие $\langle g \rangle$ -инвариантные

подгруппы A и B , что A нормальна в B и B/A является абелевой группой без кручения. Тогда $g \in C_G(B/A)$.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 7, можно допустить, что $A = \langle 1 \rangle$. Если $\langle g \rangle \cap B \neq \langle 1 \rangle$, то $g^k \in C_G(B)$ для некоторого натурального числа k , и мы можем применить лемму 8. Поэтому далее мы можем предполагать, что $\langle g \rangle \cap B = \langle 1 \rangle$. Можно рассматривать B как $\mathbb{Z}\langle g \rangle$ -модуль, если определить действие g на B как сопряжение. Предположим сначала, что $\mathbb{Z}\langle g \rangle$ -модуль B не является периодическим. Тогда существует такой элемент $a \in B$, что $\langle 0 \rangle = \text{Ann}_{\mathbb{Z}\langle g \rangle}(a)$. Отсюда следует, что

$$A_1 = \langle a \rangle^{\langle g \rangle} = a\mathbb{Z}\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}\langle g \rangle.$$

Пусть p — простое число и $h = g^p$. Тогда

$$\mathbb{Z}\langle g \rangle = \mathbb{Z}\langle h \rangle \oplus (\mathbb{Z}\langle h \rangle)g \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}\langle h \rangle)g^{p-1}.$$

Положим $B_1 = \langle a \rangle^{\langle h \rangle}$. Используя изоморфизм $A_1 \cong \mathbb{Z}\langle g \rangle$, мы получим теперь разложение

$$A_1 = B_1 \times g^{-1}B_1g \times \dots \times g^{1-p}B_1g^{p-1}.$$

Положим $B_2 = g^{-1}B_1g$. Предположим, что подгруппа $B_1\langle h \rangle$ пронормальна. Это означает, что подгруппы $B_1\langle h \rangle$ и $g^{-1}B_1\langle h \rangle g = B_2\langle h \rangle$ должны быть сопряжёнными в $\langle B_1\langle h \rangle, B_2\langle h \rangle \rangle$. Пусть $x \in B\langle h \rangle$, тогда $x = yb$, где $b \in B$, $y \in \langle h \rangle$. Имеем

$$(B_1\langle h \rangle)^x = B_1^x\langle h \rangle^x = B_1^y\langle h \rangle^b = B_1\langle h \rangle^b,$$

поскольку подгруппа B_1 является $\langle h \rangle$ -инвариантной. Отсюда вытекает, что $(B_1\langle h \rangle)^x \neq B_2\langle h \rangle$, так как $(B_1\langle h \rangle^b) \cap B = B_1$ и $(B_2\langle h \rangle) \cap B = B_2 \neq B_1$. Это доказывает тот факт, что $B_1\langle h \rangle$ не может быть пронормальной. Таким образом, эта подгруппа субнормальна. По той же самой причине подгруппа $B_2\langle h \rangle$ также субнормальна. Имеем теперь

$$(B_1\langle h \rangle) \cap (B_2\langle h \rangle) = \langle h \rangle(B_1\langle h \rangle \cap B_2) = \langle h \rangle\langle 1 \rangle = \langle h \rangle.$$

Напомним, что пересечение двух субнормальных подгрупп также является субнормальной подгруппой (см., например, [16, предложение 1.1.2]). Итак, подгруппа $\langle g^p \rangle$ субнормальна в G . Пусть q — другое простое число. Используя приводимые выше аргументы, получим, что и подгруппа $\langle g^q \rangle$ будет субнормальной в G . Так как числа p и q взаимно просты, $\langle g \rangle = \langle g^p \rangle \langle g^q \rangle$. Отсюда вытекает, что подгруппа $\langle g \rangle$ субнормальна в G (см., например, [16, теорема 1.2.5]), а это противоречит выбору элемента g . Полученное противоречие доказывает, что $\mathbb{Z}\langle g \rangle$ -модуль B будет периодическим.

Пусть D — делимая оболочка B . Обычным способом можно расширить действие $\mathbb{Z}\langle g \rangle$ на B до действия $\mathbb{Q}\langle g \rangle$ на D . Поскольку модуль B является $\mathbb{Z}\langle g \rangle$ -периодическим, то модуль D будет $\mathbb{Q}\langle g \rangle$ -периодическим. Тогда для каждого элемента $u \in B$ имеем $\text{Ann}_{\mathbb{Q}\langle g \rangle}(u) \neq \langle 0 \rangle$. Отсюда вытекает конечность $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\langle g \rangle / \text{Ann}_{\mathbb{Q}\langle g \rangle}(u))$. Другими словами, $u\mathbb{Q}\langle g \rangle \cong \mathbb{Q}\langle g \rangle / \text{Ann}_{\mathbb{Q}\langle g \rangle}(u)$ имеет конечный 0-ранг. Поэтому и $U = \langle u \rangle^{\langle g \rangle} = u\mathbb{Z}\langle g \rangle \leq u\mathbb{Q}\langle g \rangle$ имеет конечный 0-ранг.

С другой стороны, U включает в себя такую свободную абелеву подгруппу W , что U/W является периодической и множество $\Pi(U/W)$ будет конечным (см., например, [9, следствие 1.8]). Так как U — абелева группа без кручения конечного 0-ранга, получаем, что W — конечно порождённая свободная абелева подгруппа и U/W — черниковская группа. Другими словами, подгруппа U минимаксна.

Пусть $p \notin \Pi(U/W)$, и положим $U_1 = U^p$, $U_2 = U_1^p$, $U_{n+1} = U_n^p$, $W_1 = W^p$, $W_2 = W_1^p$, $W_{n+1} = W_n^p$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда W/W_n будет конечной силовой p -подгруппой в U/W_n , так что $U/W_n = W/W_n \times Y/W_n$, где Y/W_n — силовая p' -подгруппа U/W_n . Пусть $r = p^n$, тогда $(U/W_n)^r = Y/W_n$. Отсюда вытекает соотношение $U^r \leq Y$, а потому $U^r \cap W = U_n \cap W \leq Y \cap W = W_n$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что подгруппы W_n , $n \in \mathbb{N}$, являются $\langle g \rangle$ -инвариантными. Пусть $\langle z \rangle = C_{\langle g \rangle}(U/W_1)$. Поскольку U/W_1 конечна, то $\langle z \rangle \neq \langle 1 \rangle$, так что $\langle z \rangle$ имеет конечный индекс в $\langle g \rangle$.

Отображение $u \mapsto u^p$, $u \in U$, является $\langle g \rangle$ -эндоморфизмом. Так как U не имеет кручения, оно будет $\langle g \rangle$ -мономорфизмом. Оно индуцирует $\langle g \rangle$ -изоморфизм между U/U_1 и U_1/U_2 . В частности, $\langle z \rangle \leq C_{\langle g \rangle}(U_1/U_2)$. Используя подобные рассуждения, получим соотношение $\langle z \rangle \leq C_{\langle g \rangle}(U_n/U_{n+1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это показывает, что фактор-группа $\langle U/U_n, zU_n \rangle$ является нильпотентной. Равенство $\langle g \rangle \cap \mathbf{B}(G) = \langle 1 \rangle$ показывает, что $z \notin \mathbf{B}(G)$. Таким образом, подгруппа $\langle z \rangle$ пронормальна в G . Отсюда вытекает, что $\langle zU_n \rangle$ будет пронормальной в $\langle U/U_n, zU_n \rangle$. Будучи пронормальной подгруппой нильпотентной группы $\langle U/U_n, zU_n \rangle$, $\langle zU_n \rangle$ нормальна в $\langle U/U_n, zU_n \rangle$. Получаем соотношение $[U, z] \leq \langle z \rangle U_n$. Так как оно имеет место при всех $n \in \mathbb{N}$, то $[U, z] \leq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \langle z \rangle U_n$. Из равенства $\langle 1 \rangle = \langle z \rangle \cap U$ вытекает, что $[U, z] \leq \langle z \rangle \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \right)$. Из соотношений $U_n \cap W \leq W_n$, $n \in \mathbb{N}$, следует, что

$$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) \cap W = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n \cap W) \leq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n = \langle 1 \rangle.$$

Поскольку группа U/W периодическая, а U не имеет кручения, то $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \langle 1 \rangle$. Таким образом, мы получаем соотношение $[U, z] \leq \langle z \rangle$. С другой стороны, U является $\langle z \rangle$ -инвариантной подгруппой, так что $[U, z] \leq U$. Следовательно, $[U, z] \leq U \cap \langle z \rangle = \langle 1 \rangle$. Другими словами, $z \in C_G(U)$. Используя теперь лемму 8, получим, что $g \in C_G(U)$ и $[u, g] = 1$. Так как u — это произвольный элемент B , отсюда следует, что $g \in C_G(B)$, что и требовалось. $\square$

Следствие 1. Пусть G — группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Пусть $g \in G \setminus \mathbf{B}(G)$, и предположим, что G включает в себя такие $\langle g \rangle$ -инвариантные подгруппы A и B , что A нормальна в B и B/A является абелевой группой без кручения. Тогда $g \in C_G(B/A)$.

Следствие 2. Пусть G — группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Предположим, что $\mathbf{B}(G)$ включает в себя такие G -инвари-

антные подгруппы A и B , что $A \leq B$ и B/A — абелева группа без кручения. Если фактор B/A централен в $\mathbf{B}(G)$, то B/A централен и в G .

Теорема 1. Пусть G — локально почти разрешимая группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Тогда G включает в себя такую нормальную периодическую подгруппу T , что группа G/T нильпотентна и не имеет кручения.

Доказательство. Ввиду предложения 2 группа G будет разрешимой. Отсюда вытекает, что её радикал Бэра неединичен. Как уже отмечалось выше, подгруппа B локально нильпотентна, так что множество P всех элементов B , имеющих конечный порядок, является характеристической подгруппой B . В частности, P нормальна в G . Достаточно доказать, что множество всех элементов G/B , имеющих конечный порядок, является подгруппой G/B . Все последующие рассуждения мы будем проводить в фактор-группе G/P и, чтобы не усложнять обозначений, положим $P = \langle 1 \rangle$. Как будет видно из дальнейшего, это не ограничит общности рассуждений. Будучи подгруппой без кручения, B является нильпотентной [3, 21]. Напомним, что каждый член верхнего центрального ряда нильпотентной группы без кручения будет сервантной подгруппой, поэтому B имеет конечный ряд

$$\langle 1 \rangle = Z_0 \leq Z_1 \leq \dots \leq Z_{n-1} \leq Z_n = B,$$

состоящий из G -инвариантных подгрупп, факторы Z_{j+1}/Z_j , $0 \leq j \leq n-1$, которого B -центральный и не имеют кручения.

Обозначим через R/B множество всех элементов G/B , имеющих конечный порядок. Ввиду предложения 1 каждая подгруппа G/B будет пронормальной. Поэтому если G/B не является периодической, то она абелева [12], в частности, R/B будет подгруппой G/B и G/R не имеет кручения. Естественно, если же G/B является периодической, то $R/B = G/B$. Ввиду следствия 2 леммы 9, фактор $B/Z_{n-1} = Z_n/Z_{n-1}$ будет G -центральный.

Пусть F/B — конечная подгруппа R/B , тогда F/Z_{n-1} конечна над центром и по классической теореме Шура [20] её коммутант $[F/Z_{n-1}, F/Z_{n-1}]$ конечен. Так как R/B локально конечна, то нетрудно доказать, что $[R/Z_{n-1}, R/Z_{n-1}]$ локально конечна. Поскольку $(R/Z_{n-1})/[R/Z_{n-1}, R/Z_{n-1}]$ абелева, то множество U/Z_{n-1} всех её элементов, имеющих конечный порядок, будет подгруппой. Более того, R/U не имеет кручения, так что в случае если $R = G$, фактор-группа G/U является абелевой и не имеет кручения. Если же $G \neq R$, то G/U также не имеет кручения, поскольку G/R не имеет кручения. Отсюда вытекает, что U/Z_{n-1} содержит каждый элемент конечного порядка группы G/Z_{n-1} .

Допустим, что $G \neq R$. В этом случае абелева группа без кручения $(R/Z_{n-1})/(U/Z_{n-1})$ включает в себя такую подгруппу $(BU/Z_{n-1})/(U/Z_{n-1})$, что R/B периодическая. Так как фактор B/Z_{n-1} является G -центральный, то и фактор $(BU/Z_{n-1})/(U/Z_{n-1})$ также G -централен. Напомним, что извлечение корней в абелевых группах без кручения является однозначным, поэтому нетрудно показать, что и фактор R/U является G -центральный. В частности,

G/U — нильпотентная группа без кручения. Пусть g — произвольный элемент $G \setminus R$. Соотношение $\mathbf{B}(G) \leq R$ влечёт тот факт, что $g \notin \mathbf{B}(G)$. Более того, $\langle g \rangle \cap \mathbf{B}(G) = \langle 1 \rangle$, так как G/R не имеет кручения.

Пусть $h = g^8$. Тогда $h \notin \mathbf{B}(G)$ и применение леммы 3 показывает, что $G/\langle h, U \rangle$ будет дедекиндовой группой. Заметим, что неабелевы дедекиндовы группы не содержат элементов порядка 8. Таким образом, $G/\langle h, U \rangle$ абелева. По той же причине и $G/\langle h^q, U \rangle$ будет абелевой для каждого простого числа q . Так как $\bigcap_{q \in P} \langle h^q \rangle = \langle 1 \rangle$, из теоремы Ремака получим, что G/U абелева.

Используя аналогичные аргументы и спускаясь вниз по ряду подгрупп $\{Z_j \mid 0 \leq j \leq n\}$, через конечное число шагов найдём такую периодическую характеристическую подгруппу T , что G/T нильпотентна и не имеет кручения. $\square$

Следствие. Пусть G — локально почти разрешимая группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Если G не имеет кручения, то G нильпотентна.

В общих чертах можно получить картину строения локально конечной группы, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны.

Теорема 2. Пусть G — локально конечная группа, все подгруппы которой либо пронормальны, либо субнормальны. Тогда G имеет подгруппы $K \leq B \leq G$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) B — радикал Бэра группы G , K — такая нильпотентная нормальная подгруппа B , что B/K — делимая абелева группа конечного специального ранга;
- 2) каждая подгруппа G/B пронормальна, так что либо G/B — дедекиндова группа, либо G/B включает в себя нормальную абелеву подгруппу L/B , удовлетворяющую следующим условиям:
 - а) каждая подгруппа L/B является G -инвариантной;
 - б) $G/B = L/B \rtimes D/B$, где D/B — дедекиндова группа;
 - в) $2 \notin (L/B)$;
 - г) $\Pi(L/B) \cap \Pi(D/B) = \emptyset$.

Доказательство. Ввиду предложения 2 группа G будет разрешимой. Отсюда вытекает, что её радикал Бэра неединичен. Следствие 1 леммы 2 обеспечивает субнормальность каждой подгруппы B . Тогда B включает в себя такую нормальную нильпотентную подгруппу K , что G/K — делимая абелева группа конечного специального ранга [4, теорема 1]. Ввиду предложения 1 каждая подгруппа G/B является пронормальной, и мы можем применить основной результат работы [12]. $\square$

Детализация строения локально конечных групп, все подгруппы которых либо пронормальны, либо субнормальны, требует специального отдельного рассмотрения.

Литература

- [1] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. — М.: Наука, 1989.
- [2] Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. — М.: Наука, 1980.
- [3] Casolo C. Torsion-free groups in which every subgroup is subnormal // *Rend. Circ. Mat. Palermo*. — 2001. — Vol. 50. — P. 321–324.
- [4] Casolo C. On the structure of groups with all subgroups subnormal // *J. Group Theory*. — 2002. — Vol. 5. — P. 293–300.
- [5] Casolo C. Groups with all subgroups subnormal // *Conf. «Advances in Group Theory and Applications 2007»*, Otranto, 4–8 June 2007, Italy.
- [6] Ebert G., Bauman S. A note of subnormal and abnormal chains // *J. Algebra*. — 1975. — Vol. 36. — P. 287–293.
- [7] De Falco M., Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya. Groups with only abnormal and subnormal subgroups // *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*. — 1998. — Vol. 47. — P. 435–442.
- [8] Fattahi A. Groups with only normal and abnormal subgroups // *J. Algebra*. — 1974. — Vol. 28, no. 1. — P. 15–19.
- [9] Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya. Groups with Prescribed Quotient Groups and Associated Module Theory. — New Jersey: World Scientific, 2002.
- [10] Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya. *Artinian Modules over Group Rings*, Basel: Birkhäuser, 2007.
- [11] Kurdachenko L. A., Smith H. Groups with all subgroups either subnormal or self-normalizing // *J. Pure Appl. Algebra*. — 2005. — Vol. 196. — P. 271–278.
- [12] Kuzennyi N. F., Subbotin I. Ya. Groups in which all subgroups are pronormal // *Ukr. Mat. Zh.* — 1987. — Vol. 39, no. 3. — P. 325–329.
- [13] Kuzennyi N. F., Subbotin I. Ya. New characterization of locally nilpotent $\overline{TH}$ -groups // *Ukr. Mat. Zh.* — 1988. — Vol. 40. — P. 322–326.
- [14] Legovini P. Gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali // *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*. — 1977. — Vol. 58. — P. 129–147.
- [15] Legovini P. Gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali // *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*. — 1981. — Vol. 65. — P. 47–51.
- [16] Lennox J. C., Stonehewer S. E. *Subnormal Subgroups of Groups*. — Oxford: Clarendon Press, 1992.
- [17] Möhres W. Auflösbarkeit von Gruppen deren Untergruppen alle subnormal sind // *Arch. Math.* — 1990. — Vol. 54. — P. 232–235.
- [18] Robinson D. J. S. Groups in which normality is a transitive relation // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1964. — Vol. 60. — P. 21–38.
- [19] Rose J. S. Nilpotent subgroups of finite soluble groups // *Math. Z.* — 1968. — Vol. 106. — P. 97–112.
- [20] Schur I. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen // *J. Reine Angew. Math.* — 1904. — Vol. 127. — P. 20–50.
- [21] Smith H. Torsion-free groups with all subgroups subnormal // *Arch. Math.* — 2001. — Vol. 76, no. 1. — P. 1–6.

- [22] Subbotin I. Ya., Kuzenny N. F. Locally soluble groups in which all infinite subgroups are pronormal // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.* — 1988. — Vol. 32, no. 11. — P. 126—131.