Фильтрованные деформации алгебр Ли серии Y*

А. А. ЛАДИЛОВА
Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: ladilova@algebraic.ru

УДК 512.554.31

Ключевые слова: простые алгебры Ли, когомологии, деформации.

Аннотация

Доказана жёсткость простых градуированных алгебр Ли серии Y над алгебраически замкнутым полем характеристики 3.

Abstract

A. A. Ladilova, Filtered deformations of Lie algebras of series Y, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 6, pp. 135—140.

The rigidity of simple graded Lie algebras of the series Y over algebraically closed fields of characteristic 3 is proved.

В связи с проблемой классификации простых алгебр Ли малой характеристики представляет интерес исследование известных серий исключительных простых алгебр Ли.

В работе рассматриваются фильтрованные деформации алгебр Ли серии Y характеристики 3, геометрическая реализация которых построена в [3].

Для тройки натуральных чисел $\bar{m} = (m_1, m_2, m_3)$ рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-градуированное пространство $Y(\bar{m}) = Y_{\bar{0}} \oplus Y_{\bar{1}}$, где $Y_{\bar{0}} = W(\bar{m})$ — алгебра специальных дифференцирований алгебры разделённых степеней $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\bar{m})$, $Y_{\bar{1}} = \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1$. Умножение на $Y = Y(\bar{m})$ задано следующим образом:

1) $[\,,\,]\colon Y_{\bar{0}} \times Y_{\bar{0}} \to Y_{\bar{0}}$: стандартная операция умножения в алгебре $W(\bar{m})$;
2) $[\,,\,]\colon Y_{\bar{0}} \times Y_{\bar{1}} \to Y_{\bar{1}}$: стандартное действие $W(\bar{m})$ на $\Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1$;
3) $[\,,\,]\colon Y_{\bar{1}} \times Y_{\bar{1}} \to Y_{\bar{0}}$:
$$[f\omega \otimes \mathrm{d}x_i, g\omega \otimes \mathrm{d}x_j] = (fg\sigma_{ijk})\partial_k,$$
где $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$, $f\omega \otimes \mathrm{d}x_i, g\omega \otimes \mathrm{d}x_j \in \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}(\bar{m})} \Omega^1$, индексы i, j, k попарно отличны друг от друга, а σ_{ijk} определяет знак подстановки $(1,2,3) \mapsto (i,j,k)$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05-01-00580.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 6, с. 135—140.

Алгебры Ли серии Y обладают $\mathbb{Z}$-градуировкой

$$Y = Y_{-2} \oplus Y_{-1} \oplus Y_0 \oplus Y_1 \oplus Y_2 \oplus \ldots,$$

где

$$Y_{2i} = W(\bar{m})_i, \quad i \geqslant -1, \quad Y_{2i+1} = \bigl\{x^{(\alpha)}\omega \otimes \mathrm{d}x_k \colon 1 \leqslant k \leqslant 3,\ |\alpha| = i+1\bigr\}, \quad i \geqslant -1.$$

Указанной градуировке соответствует фильтрация

$$Y_{(-2)} \supset Y_{(-1)} \supset Y_{(0)} \supset Y_{(1)} \supset Y_{(2)} \supset \ldots,$$

где $Y_{(j)} = \sum\limits_{i \geqslant j} Y_i$.

Определение. Фильтрованная алгебра Ли $\mathcal{L}$ называется фильтрованной деформацией градуированной алгебры Ли L, если $\operatorname{gr} \mathcal{L} = L$.

Градуировка в когомологиях градуированной алгебры Ли с коэффициентами в градуированном модуле определяется естественным образом.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\mathrm{H}^2_+(W(\bar{m}), \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1)$ *— положительная часть естественной градуировки второй группы когомологий, где*

$$W(\bar{m}) = \bigoplus_{i \geqslant -1} W(\bar{m})_i, \quad \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1 = \bigoplus_{i \geqslant -1} (\Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1)_i.$$

Тогда $\mathrm{H}^2_+(W(\bar{m}), \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1) = 0$.

Доказательство. Модуль $\Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1$ является коиндуцированным, поэтому согласно [2] имеет место следующая формула:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^2(W(\bar{m}), \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1) \cong \mathrm{H}^2(\Omega) \otimes \mathrm{H}^0\bigl(W_{(0)}, \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1 / \mathfrak{m}\Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1\bigr) \oplus \\ \oplus \mathrm{H}^1(\Omega) \otimes \mathrm{H}^1\bigl(W_{(0)}, \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1 / \mathfrak{m}\Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1\bigr) \oplus \\ \oplus \mathrm{H}^0(\Omega) \otimes \mathrm{H}^2\bigl(W_{(0)}, \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1 / \mathfrak{m}\Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1\bigr), \end{aligned}$$

где $\mathrm{H}^i(\Omega)$ — группа когомологий де Рама,

$$W_{(0)} = \sum_{i \geqslant 0} W(\bar{m})_i$$

и $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в алгебре $\mathcal{O}$.

Обозначим модуль $(\Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1)/(\mathfrak{m}\Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1)$ через M. Очевидно, что

$$\mathrm{H}^0\bigl(W_{(0)}, M\bigr) = \{v \in V \mid W_{(0)} v = 0\} = 0.$$

Тривиальность группы когомологий $\mathrm{H}^1\bigl(W_{(0)}, M\bigr)$ докажем, показав, что пространства $E_2^{0,1}$ и $E_2^{1,0}$ спектральной последовательности Серра—Хохшильда для алгебры $W_{(0)}$ и идеала

$$W_{(1)} = \sum_{i \geqslant 1} W(\bar{m})_i$$

равны нулю. Так как $W_{(1)}$ действует тривиально на пространстве M, то

$$E_2^{0,1} = \mathrm{H}^0\Big(W_0(\bar m), \mathrm{H}^1\big(W_{(1)}, M\big)\Big) = \mathrm{H}^0\Big(W_0(\bar m), \big(W_{(1)}/\big[W_{(1)}, W_{(1)}\big]\big)^* \otimes M\Big),$$
$$E_2^{1,0} = \mathrm{H}^1\Big(W_0(\bar m), \mathrm{H}^0\big(W_{(1)}, M\big)\Big) = \mathrm{H}^1(W_0(\bar m), M).$$

Поскольку элемент $x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3$ из центра универсальной обёртывающей алгебры Y действует на M нетривиально, то $\mathrm{H}^1(W_0(\bar m), M) = 0$.

Из [1] известно, что

$$W_{(1)}/\big[W_{(1)}, W_{(1)}\big] = W_1(\bar m) + \sum_k W'_{3^k-1},$$

где

$$W'_{3^k-1} = \big\langle x_i^{(3^k)}\partial_j,\ 1 \leqslant i,j \leqslant 3\big\rangle \subset W_{3^k-1}(\bar m),$$

поэтому

$$\mathrm{H}^0\Big(W_0(\bar m), \big(W_{(1)}/\big[W_{(1)}, W_{(1)}\big]\big)^* \otimes M\Big) = \\ = \mathrm{H}^0(W_0(\bar m), W_1^* \otimes M) + \sum_k \mathrm{H}^0(W_0(\bar m), W'^*_{3^k-1} \otimes M).$$

Элемент $x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3$ действует на $W'^*_{3^k-1} \otimes M$ умножением на ненулевой скаляр 2, поэтому $E_2^{0,1} = \mathrm{H}^0(W_0(\bar m), W(\bar m)_1^* \otimes M)$. Так как $x_3\partial_3$ действует на элементы вида $\big(x_1^{(2)}\partial_i\big)^* \otimes \omega \otimes \mathrm{d}x_j$, $1 \leqslant i,j \leqslant 2$, $(x_1x_2\partial_3)^* \otimes \omega \otimes \mathrm{d}x_i$, $\big(x_1^{(2)}\partial_i\big)^* \otimes \omega \otimes \mathrm{d}x_3$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, умножением на ненулевой скаляр, то только элемент

$$m = \alpha_{123}(x_1x_2\partial_3)^* \otimes \omega \otimes \mathrm{d}x_3 + \alpha_{231}(x_2x_3\partial_1)^* \otimes \omega \otimes \mathrm{d}x_1 + \alpha_{312}(x_3x_1\partial_2)^* \otimes \omega \otimes \mathrm{d}x_2$$

может обращаться в нуль при действии $W_0(\bar m)$. Действуя на m элементами $x_1\partial_2$, $x_2\partial_3$, $x_3\partial_1$, убеждаемся, что $m = 0$. Следовательно, $E_2^{0,1} = 0$.

Таким образом, $\mathrm{H}^1\big(W_{(0)}, M\big) = 0$, и, так как $\mathrm{H}^0(\Omega) \cong F$, получаем, что

$$\mathrm{H}^2(W(\bar m),\, \Omega^3 \otimes_{\mathcal O} \Omega^1) \cong \mathrm{H}^2\big(W_{(0)},\, \Omega^3 \otimes_{\mathcal O} \Omega^1/\mathfrak{m}\Omega^3 \otimes_{\mathcal O} \Omega^1\big),$$

откуда немедленно следует утверждение леммы. □

Лемма 2. *Если $\mathcal L$ — фильтрованная деформация алгебры Ли $Y(\bar m)$, то $\mathcal L \cong W(\bar m) \oplus \Omega^3 \otimes_{\mathcal O} \Omega^1$ как $W(\bar m)$-модуль.*

Доказательство. Выберем подпространства $V_i \subset \mathcal L_{(i)}$ так, чтобы $\mathcal L_{(i)} = V_i \oplus \mathcal L_{(i+1)}$. Пусть $\pi_i\colon \mathcal L_{(i)} \to V_i$ — проекция. Тогда $[\pi_i(x), \pi_j(y)] - \pi_{i+j}([x,y]) \in \mathcal L_{(i+j+1)}$ для всех $x \in \mathcal L_{(i)}$ и $y \in \mathcal L_{(j)}$. Введём отображение $\lambda_i\colon \mathrm{gr}_i\,\mathcal L \to V_i$, такое что $\lambda_i\big(x + \mathcal L_{(i+1)}\big) = \pi_i(x)$. Тогда $[\lambda_i(u), \lambda_j(v)] = \lambda_{i+j}([u,v]) + \sum\limits_{r>0} \mu_r(u,v)$ для $u \in \mathrm{gr}_i\,\mathcal L$ и $v \in \mathrm{gr}_j\,\mathcal L$, где $\mu_r \in \mathrm{Hom}\big(\mathrm{gr}\,\mathcal L \wedge \mathrm{gr}\,\mathcal L, \bigoplus V_l\big)_r$ — однородное отображение степени r.

Пусть $u \in \mathrm{gr}_i \mathcal{L}$, $v \in \mathrm{gr}_j \mathcal{L}$ и $w \in \mathrm{gr}_k \mathcal{L}$, тогда

$$\begin{aligned}\big[[\lambda_i(u), \lambda_j(v)], \lambda_k(w)\big] &= \left[\lambda_{i+j}([u,v]) + \sum_{r>0} \mu_r(u,v),\ \lambda_k(w)\right] = \\ &= \lambda_{i+j+k}\big([[u,v],w]\big) + \sum_{s>0} \mu_s([u,v],w) + \\ &+ \sum_{r>0} \lambda_{i+j+r+k}\big([\lambda^{-1}_{i+j+r}\big(\mu_r(u,v)\big), w]\big) + \sum_{r>0}\sum_{s>0} \mu_s\big(\lambda^{-1}_{i+j+r}\big(\mu_r(u,v)\big), w\big).\end{aligned}$$

Используя тождество Якоби и сравнивая однородные слагаемые степени $i+j+$ $+k+t$ для $t>0$, мы получаем

$$\begin{aligned}0 &= \mu_t([u,v],w) + \mu_t([v,w],u) + \mu_t([w,u]v) + \lambda_{i+j+k+t}\big([\lambda^{-1}_{i+j+t}\big(\mu_t(u,v)\big), w]\big) + \\ &+ \lambda_{i+j+k+t}\big([\lambda^{-1}_{i+j+t}\big(\mu_t(v,w)\big), u]\big) + \lambda_{i+j+k+t}\big([\lambda^{-1}_{i+j+t}\big(\mu_t(w,u)\big), v]\big) + \\ &+ \sum_{r=1}^{t-1} \mu_{t-r}\big(\lambda^{-1}_{i+j+r}\big(\mu_r(u,v)\big), w\big) + \sum_{r=1}^{t-1} \mu_{t-r}\big(\lambda^{-1}_{i+j+r}\big(\mu_r(v,w)\big), u\big) + \\ &+ \sum_{r=1}^{t-1} \mu_{t-r}\big(\lambda^{-1}_{i+j+r}\big(\mu_r(w,u)\big), v\big).\end{aligned}$$

Индукцией по нечётным r покажем, что подпространства V_i можно выбрать так, чтобы $\mu_r\big(W(\bar m), W(\bar m)\big) = 0$. Пусть μ_r обращается в нуль на $W(\bar m) \wedge W(\bar m)$ для всех $r \leqslant l$, таких что $r \not\equiv 0\ (2)$. Для $l = 0$ утверждение, очевидно, выполнено. Докажем, что оно имеет место при $r = l+1$. Можно считать, что $l = 2k$. Рассмотрим отображение

$$\varphi_r\colon W(\bar m) \wedge W(\bar m) \to \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1,$$

заданное формулой $\varphi_r(u,v) = \lambda^{-1}_{2i+2j+r}\mu_r(u,v)$ для $u \in \mathrm{gr}_{2i} \mathcal{L}$ и $v \in \mathrm{gr}_{2j} \mathcal{L}$. Из полученных выше свойств отображения μ_r следует, что φ_r является коциклом, т. е. $\bar\varphi_r \in \mathrm{H}^2_{k+1}(W(\bar m),\ \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1)$. Согласно лемме 1 $\mathrm{H}^2_{k+1}(W(\bar m),\ \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1) = 0$, поэтому существует линейное отображение $\psi\colon W(\bar m) \to \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1$, такое что $\mathrm{d}\psi = \varphi_r$. Это равносильно тому, что $[u, \psi(v)] - [v, \psi(u)] - \psi([u,v]) = \varphi_r(u,v)$.

Выберем подпространства $V'_{2i} = (\mathrm{Id} - \lambda_{2i+r} \circ \psi \circ \lambda^{-1}_{2i})(V_{2i})$, $V'_{2i+1} = V_{2i+1}$ и $\lambda'_{2i} = \lambda_{2i} - \lambda_{2i+r} \circ \psi$, $\lambda'_{2i+1} = \lambda_{2i+1}$. Тогда для $u \in W_i$, $v \in W_j$ справедливы формулы

$$\begin{aligned}[\lambda'_{2i}(u), \lambda'_{2j}(v)] &= [\lambda_{2i}(u) - \lambda_{2i+r} \circ \psi(u), \lambda_{2j}(v) - \lambda_{2j+r} \circ \psi(v)] \equiv \\ &\equiv \lambda_{2(i+j)}([u,v]) + \sum_{s \leqslant l} \mu_s(u,v) + \mu_r(u,v) - \lambda_{2(i+j)+r}([\psi(u), v] + [u, \psi(v)]) \equiv \\ &\equiv \lambda'_{2(i+j)}([u,v]) + \sum_{s \leqslant l} \mu_s(u,v) + \mu_r(u,v) - \lambda_{2(i+j)+r}\big(\varphi_r(u,v)\big) \equiv \\ &\equiv \lambda'_{2(i+j)}([u,v]) + \sum_{s \leqslant l} \mu_s(u,v) \equiv \lambda'_{2(i+j)}([u,v])\ (\mathcal{L}_{(2i+2j+r+1)}).\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что $\mu_r(u,v)=0$ для всех $r\leqslant l+1$. Это в точности означает, что пространства V_s можно выбрать так, чтобы $[V_{2i},V_{2j}]\subset\sum\limits_{k\geqslant -1}V_{2k}$, т. е. $\mathcal{W}=\sum\limits_{i\geqslant -1}V_{2i}$ является подалгеброй, изоморфной $W(\bar m)$.

Пусть $\mathcal{L}_{(s)}$ — последний ненулевой член фильтрации. Тогда $\mathcal{L}_{(s-1)}=V_{s-1}\oplus V_s$ и индуцированные модули $U\big(W(\bar m)\big)\otimes_{U(\hat W_{(0)})}V_{s-1}$ и $U\big(W(\bar m)\big)\otimes_{U(\hat W_{(0)})}V_s$ изоморфны неприводимым $W(\bar m)$-модулям $W(\bar m)$ и $\Omega^3\otimes_{\mathcal{O}}\Omega^1$. По свойству универсальности индуцированных модулей существует нетривиальный гомоморфизм $W(\bar m)$-модулей

$$\varphi\colon W(\bar m)\oplus\Omega^3\otimes_{\mathcal{O}}\Omega^1\to\mathcal{L},$$

который в действительности является изоморфизмом по соображениям размерности. $\square$

Теорема. *Если $\mathcal{L}$ — фильтрованная алгебра Ли, такая что* $\operatorname{gr}\mathcal{L}=Y(\bar m)$, *то* $\mathcal{L}\cong Y(\bar m)$.

Доказательство. Согласно лемме 2 алгебра $\mathcal{L}$ равна $\bigoplus\limits_{i\geqslant -2}V_i$, где $\bigoplus\limits_{j\geqslant -1}V_{2j}=W(\bar m)$, $\bigoplus\limits_{j\geqslant -1}V_{2j+1}=M$. Данное разложение согласовано с фильтрацией, т. е. $\mathcal{L}_{(i)}=\bigoplus\limits_{j\geqslant i}V_j$. Кроме того, M является $W(\bar m)$-модулем, поэтому справедливо включение $[V_{2i},V_j]\subset V_{2i+j}$. Покажем, что набор пространств $\{V_i\}$ задаёт градуировку в $\mathcal{L}$, иными словами, что $[V_i,V_j]\subset V_{i+j}$ для всех $i,j\geqslant -2$.

Элемент $x_1\partial_1+x_2\partial_2+x_3\partial_3$ действует на элементы из V_{2i} умножением на i и на элементы из V_{2i+1} — умножением на $i-1$, поэтому

$$[v_{2i+1},v_{2j+1}]=w_{2(i+j+1)}+\sum_{k>i+j+1,\ i+j+1\equiv k\ (3)}w_{2k}+\sum_{l>i+j+1,\ i+j+1\equiv l-1\ (3)}v_{2l+1},$$

где $w_{2k}\in V_{2k}$ и $v_{2l+1}\in V_{2l+1}$.

Индукцией по i, j покажем, что $[V_{2i+1},V_{2j+1}]\subset V_{2(i+j+1)}=W_{i+j+1}(\bar m)$. Докажем сначала, что $[\omega\otimes \mathrm{d}x_j,v_{2l+1}]\in W(\bar m)_l$ для всех $v_{2l+1}\in V_{2l+1}$ и $l\geqslant -1$. Пусть $\mathcal{L}=\bigoplus\limits_{k=-1}^{s}(V_{2k}\oplus V_{2k+1})$, где $s=p^{m_1}+p^{m_2}+p^{m_3}-4$. Тогда очевидно, что $[\omega\otimes \mathrm{d}x_j,x_1^{p^{m_1}-1}x_2^{p^{m_2}-1}x_3^{p^{m_3}-1}\omega\otimes \mathrm{d}x_k]\in W(\bar m)_s$. Теперь, так как $[V_{-2},V_{2i+1}]=V_{2i-1}$ и

$$\Big[\partial_t,\big[\omega\otimes \mathrm{d}x_j,x^{(\alpha)}\omega\otimes \mathrm{d}x_k\big]\Big]=\big[\omega\otimes \mathrm{d}x_j,\partial_t x^{(\alpha)}\omega\otimes \mathrm{d}x_k\big],$$

то $[\omega\otimes \mathrm{d}x_j,V_{2l+1}]\in W(\bar m)_l$ для всех $l\geqslant -1$. Пусть утверждение справедливо для всех $i,j,i<q$ и $i=q$, $j<r$. Поскольку

$$\big[\partial_k,[v_{2i+1},v_{2j+1}]\big]=\big[v_{2i+1},[\partial_k,v_{2j+1}]\big]+\big[[\partial_k,v_{2i+1}],v_{2j+1}\big],$$

утверждение верно и для $i=r$, $j=q$. Следовательно, утверждение справедливо для всех $i\geqslant -1$, $j\geqslant -1$.

Следовательно, $\mathcal{L}$ и $Y(\bar m)$ изоморфны как алгебры Ли. $\square$

Литература

[1] Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1969. — Т. 33. — С. 251—322.

[2] Кузнецов М. И. Усечённые индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1989. — Т. 53. — С. 557—589.

[3] Скрябин С. М. Новые серии простых алгебр Ли // Мат. сб. — 1992. — Т. 183, № 8. — С. 3—22.