Мультипликативная A_∞-структура в членах спектральных последовательностей расслоений*

С. В. ЛАПИН
Мордовский государственный педагогический институт им. М. Е. Евсевьева
e-mail: slapin@mail.ru

УДК 515.14

Ключевые слова: D_∞-дифференциальная A_∞-алгебра, фильтрация, спектральная последовательность расслоения.

Аннотация

В работе развита техника спектральных последовательностей с мультипликативными A_∞-структурами в членах для дифференциальных алгебр с фильтрациями. Даны применения этой техники к мультипликативным спектральным последовательностям расслоений. Показано, что структура градуированной A_∞-алгебры на втором члене спектральной последовательности расслоения со связной и односвязной базой является тензорным произведением A_∞-алгебр когомологий базы и слоя данного расслоения.

Abstract

S. V. Lapin, Multiplicative A_∞-structure in terms of spectral sequences of fibrations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 6, pp. 141—175.

In the present paper, the technique of spectral sequences with A_∞-structures in their terms is developed for differential algebras with filtrations. Applications of this technique to the multiplicative spectral sequences of fibrations are given. We show that if the base of fibration is connected and simply connected, then the structure graded A_∞-algebra in the second term of the spectral sequence of a fibration is the tensor product of the cohomology A_∞-algebra of the base and the cohomology A_∞-algebra of the fibre of this fibration.

В классической работе Серра [26] была построена мультипликативная когомологическая спектральная последовательность расслоения и, кроме того, было показано, что если база расслоения является односвязной, то второй член этой спектральной последовательности является тензорным произведением алгебр когомологий базы и слоя данного расслоения. При помощи мультипликативной структуры в членах когомологической спектральной последовательности расслоения и описания второго члена этой спектральной последовательности как тензорного произведения алгебр в [26] был сделан ряд вычислений для

*Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации «Ведущие научные школы» (проект № НШ-1562.2008.1).

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 6, с. 141—175.
© 2008 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

алгебр когомологий и групп гомотопий топологических пространств. К настоящему времени теория мультипликативных когомологических спектральных последовательностей расслоений стала одним из основных средств вычислений в алгебраической топологии, гомологической алгебре, а также во многих других областях математики и теоретической физики, использующих гомологии и когомологии с мультипликативными структурами.

С другой стороны, при изучении гомотопических свойств топологических моноидов Сташеффом в [27] было введено понятие A_∞-пространства, которое является гомотопическим аналогом топологического пространства с непрерывным ассоциативным умножением. Одним из основных свойств структуры A_∞-пространства, как было показано в [27], является её гомотопическая инвариантность, т. е. устойчивость этой структуры относительно произвольных гомотопических эквивалентностей топологических пространств.

Рассмотрение гомотопически инвариантных алгебраических структур принесло свои результаты также и для дифференциальной гомологической алгебры и, как следствие, для алгебраической топологии. В [27] Сташефф, кроме понятия A_∞-пространства, ввёл также понятие дифференциальной A_∞-алгебры, которое является гомотопически инвариантным аналогом понятия ассоциативной дифференциальной алгебры. Применения градуированных A_∞-алгебр к описанию гомологий дифференциальных алгебр и гомологий скрещённых тензорных произведений были даны в [2, 11]. Приложения дифференциальных A_∞-алгебр к топологии, геометрии и математической физике были даны в [21, 22]. В [4] было введено понятие D_∞-дифференциальной A_∞-алгебры, являющееся гомотопически инвариантным квантовым аналогом понятия дифференциальной A_∞-алгебры. Применения гомотопической теории D_∞-дифференциальных A_∞-алгебр к произвольным мультипликативным спектральным последовательностям над полями были рассмотрены в [3—10].

Данная работа посвящена построению на основе теории D_∞-дифференциальных A_∞-алгебр аппарата спектральных последовательностей с мультипликативными A_∞-структурами в членах для дифференциальных алгебр с (1)-фильтрациями и применению этого аппарата к когомологическим спектральным последовательностям расслоений. Основными результатами данной работы являются утверждения теорем 5.1 и 5.3, которые обобщают на мультипликативные A_∞-структуры над полями классические результаты Серра из [26] о мультипликативной структуре в членах когомологической спектральной последовательности расслоения.

1. D_∞-дифференциальные модули

В этом разделе напоминаются необходимые определения и утверждения из [3], связанные с понятием D_∞-дифференциального модуля, которое является квантовым гомотопически инвариантным аналогом понятия дифференциального модуля.

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей. Все рассматриваемые в этом разделе модули и отображения модулей являются соответственно K-модулями и K-линейными отображениями модулей.

Напомним сначала, что дифференциальным градуированным модулем или, более кратко, просто дифференциальным модулем (X, d) называется произвольный градуированный модуль $X = \{X_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, снабжённый дифференциалом $d\colon X_\bullet \to X_{\bullet-1}$, который является отображением градуированных модулей степени -1 и для которого выполнено условие $d^2 = 0$. Отображением дифференциальных модулей $f\colon (X, d) \to (Y, d)$ называется отображение градуированных модулей $f\colon X_\bullet \to Y_\bullet$ степени 0, удовлетворяющее условию $df = fd$. Гомотопией $h\colon X \to Y$ между отображениями $f, g\colon (X, d) \to (Y, d)$ дифференциальных модулей называется отображение градуированных модулей $h\colon X_\bullet \to Y_{\bullet+1}$ степени 1, для которого выполнено условие $dh + hd = f - g$.

Пусть заданы отображения дифференциальных модулей $\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi$, удовлетворяющие условию $\eta\xi = 1_Y$, и задана гомотопия $h\colon X \to X$ между отображениями дифференциальных модулей $\xi\eta$ и 1_X, для которой выполнены условия $\eta h = 0$, $\xi h = 0$, $hh = 0$. Любая указанная выше тройка $(\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi, h)$ называется SDR-ситуацией дифференциальных модулей.

Многочисленные примеры SDR-ситуаций дифференциальных модулей появляются при рассмотрении гомологий заданных над полем дифференциальных модулей. Действительно, пусть $H(X) = \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$ — гомологический модуль любого заданного над полем дифференциального модуля (X, d). Если градуированный модуль $H(X)$ рассмотреть как дифференциальный модуль с нулевым дифференциалом, то при помощи фиксированного разложения в прямую сумму $\operatorname{Ker} d = H(X) \oplus \operatorname{Im} d$ получим SDR-ситуацию $(\eta\colon X \rightleftarrows H(X) : \xi, h)$ дифференциальных модулей. Полученную SDR-ситуацию дифференциальных модулей далее будем называть гомологической SDR-ситуацией дифференциального модуля (X, d).

Определение 1.1. $D_\infty^{(s)}$-дифференциалом градуированного модуля $X = \{X_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, где $s \geqslant 0$ — фиксированное целое число, называется семейство отображений модулей $\{d^{i+s}\colon X_\bullet \to X_{\bullet-1} \mid i \geqslant 0\}$, которые для каждого целого числа $k \geqslant 0$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s} d^{j+s} = 0.$$

$D_\infty^{(s)}$-дифференциальным модулем или, более кратко, $D_\infty^{(s)}$-модулем (X, d^{i+s}) называется произвольный градуированный модуль X, рассматриваемый вместе с некоторым фиксированным $D_\infty^{(s)}$-дифференциалом $\{d^{i+s}\colon X_\bullet \to X_{\bullet-1} \mid i \geqslant 0\}$ этого градуированного модуля.

Легко убедиться, что для любого $D_\infty^{(s)}$-модуля (X, d^{i+s}) определён дифференциальный модуль (X, d^s), поскольку выполнено соотношение $d^s d^s = 0$.

Определение 1.2. Морфизмом $D_\infty^{(s)}$-модулей $f\colon X\to Y$ называется семейство отображений модулей $f=\{f^i\colon X_\bullet\to Y_\bullet \mid i\geqslant 0\}$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k\geqslant 0$ соотношению

$$\sum_{i+j=k} f^i d^{j+s}=\sum_{i+j=k} d^{i+s} f^j.$$

Определение 1.3. Гомотопией $h\colon X\to Y$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$-модулей $f,g\colon X\to Y$ называется семейство гомоморфизмов $h=\{h^{i-s}\colon X_\bullet\to Y_{\bullet+1} \mid i\geqslant 0\}$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k\geqslant 0$ соотношению

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s}h^{j-s}+h^{j-s}d^{i+s}=f^k-g^k.$$

Напомним основные гомотопические свойства $D_\infty^{(s)}$-модулей. Пусть заданы произвольные морфизмы $D_\infty^{(s)}$-модулей $\eta\colon X\rightleftarrows Y:\xi$, удовлетворяющие условию $\eta\xi=1_Y$, и задана гомотопия $h\colon X\to X$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$-модулей $\xi\eta$ и 1_X, для которой выполнены условия $\eta h=0$, $\xi h=0$, $hh=0$. Любая указанная выше тройка $(\eta\colon X\rightleftarrows Y:\xi,h)$ называется SDR-ситуацией $D_\infty^{(s)}$-модулей.

Теорема 1.1. *Пусть заданы произвольные $D_\infty^{(s)}$-модуль X, дифференциальный модуль Y и SDR-ситуация $(\eta\colon (X,d^s)\rightleftarrows (Y,d):\xi,h)$ дифференциальных модулей. Тогда семейство отображений модулей $\{d^{i+s}\colon Y_\bullet\to Y_{\bullet-1}\}$, определяемых формулами*

$$d^s=d,\quad d^{i+s}=\eta\left(\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i\\ i_1+\ldots+i_k=i\\ i_1\geqslant 1,\ldots,i_k\geqslant 1}} d^{i_1+s}\underbrace{(hd^{i_2+s})\ldots(hd^{i_k+s})}_{k-1}\right)\xi,\quad i\geqslant 1,\tag{1}$$

является $D_\infty^{(s)}$-дифференциалом градуированного модуля Y. Более того, имеется SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}$-модулей $(\tilde\eta\colon X\rightleftarrows Y:\tilde\xi,\tilde h)$, которая определяется формулами

$$\tilde\xi^0=\xi,\qquad \tilde\xi^i=h\left(\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i\\ i_1+\ldots+i_k=i\\ i_1\geqslant 1,\ldots,i_k\geqslant 1}} d^{i_1+s}\underbrace{(hd^{i_2+s})\ldots(hd^{i_k+s})}_{k-1}\right)\xi,\qquad i\geqslant 1,\tag{2}$$

$$\tilde\eta^0=\eta,\qquad \tilde\eta^i=\eta\left(\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i\\ i_1+\ldots+i_k=i\\ i_1\geqslant 1,\ldots,i_k\geqslant 1}} d^{i_1+s}\underbrace{(hd^{i_2+s})\ldots(hd^{i_k+s})}_{k-1}\right)h,\qquad i\geqslant 1,\tag{3}$$

$$\tilde{h}^{-s} = h, \quad \tilde{h}^{i-s} = h \left(\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant i \\ i_1 + \ldots + i_k = i \\ i_1 \geqslant 1, \ldots, i_k \geqslant 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(hd^{i_2+s}) \ldots (hd^{i_k+s})}_{k-1} \right) h, \quad i \geqslant 1, \tag{4}$$

и, следовательно, продолжает заданную SDR-ситуацию дифференциальных модулей $(\eta\colon (X, d^s) \rightleftarrows (Y, d) : \xi, h)$. □

Следствие 1.1. *Пусть над произвольным полем задан* $D_\infty^{(s)}$*-модуль* (X, d^{i+s}), *и пусть* $H(X)$ — *гомологический модуль дифференциального модуля* (X, d^s). *Тогда формулы* (1)—(4) *задают на* $H(X)$ *структуру* $D_\infty^{(s)}$*-модуля* $\{d^{i+s}\colon H_\bullet(X) \to H_{\bullet-1}(X)\}$, *где* $d^s = 0$, *и определяют SDR-ситуацию* $D_\infty^{(s)}$*-модулей* $(\tilde\eta\colon X \rightleftarrows H(X) : \tilde\xi, \tilde h)$, *которая продолжает гомологическую SDR-ситуацию дифференциального модуля* (X, d^s). □

Так как для $D_\infty^{(s)}$-модуля $H(X)$ из следствия 1.1 выполнено условие $d^s = 0$, то $H(X)$ является $D_\infty^{(s+1)}$-модулем. В частности, определён дифференциальный модуль $(H(X), d^{s+1})$, к которому можно снова применять следствие 1.1. Итерация применения следствия 1.1 к заданному над полем $D_\infty^{(1)}$-модулю приводит к следующему утверждению.

Теорема 1.2. *Любой заданный над полем* $D_\infty^{(1)}$*-модуль* (X, d^{i+1}) *определяет спектральную последовательность* $\{(X_s, d_s)\}_{s \geqslant 1}$, *где* $(X_1, d_1) = (X, d^1)$. *Для каждого* $s \geqslant 1$ *член* (X_s, d_s) *этой спектральной последовательности имеет структуру* $D_\infty^{(s)}$*-модуля* (X_s, d_s^{i+s}), *где* $d_s^s = d_s$. *Структура* $D_\infty^{(s+1)}$*-модуля в члене* X_{s+1} *индуцирована при помощи следствия* 1.1 *структурой* $D_\infty^{(s)}$*-модуля в члене* X_s *и, в частности,* $D_\infty^{(s+1)}$*-модуль* X_{s+1}, *если рассматривать его как* $D_\infty^{(s)}$*-модуль, является гомотопически эквивалентным* $D_\infty^{(s)}$*-модулю* X_s. □

Определение 1.4. $D_\infty^{(s)}$-модуль (X, d^{i+s}) называется стабильным, если для каждого $x \in X$ найдётся номер $k \geqslant 0$, зависящий от элемента x, для которого выполнены условия $d^{i+s}(x) = 0$, $i > k$. Модулем гомологий $H(X)$ стабильного $D_\infty^{(s)}$-модуля X называется модуль гомологий $\operatorname{Ker} D_s / \operatorname{Im} D_s$ модуля X относительно суммарного дифференциала

$$D_s = (d^s + d^{1+s} + \ldots + d^{i+s} + \ldots)\colon X_\bullet \to X_{\bullet-1}.$$

Отметим, что суммарный дифференциал корректно определён только в случае стабильных $D_\infty^{(s)}$-модулей.

Легко убедиться, что если в условиях теоремы 1.1 данный $D_\infty^{(s)}$-модуль X является стабильным, то получаемый в этой теореме $D_\infty^{(s)}$-модуль Y также является стабильным. Применяя это наблюдение к спектральной последовательности стабильного $D_\infty^{(1)}$-модуля из теоремы 1.2, получаем следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Если заданный над полем* $D_\infty^{(1)}$*-модуль* X *является стабильным, то спектральная последовательность* $\{(X_s, d_s)\}_{s\geqslant}$ *этого* $D_\infty^{(1)}$*-модуля сходится к модулю его гомологий* $H(X) = \operatorname{Ker} D_1 / \operatorname{Im} D_1$. *Все члены* X_s, $s \geqslant 1$, *этой спектральной последовательности, если их рассматривать как дифференциальные модули с суммарными дифференциалами* $D_s\colon (X_s)_\bullet \to (X_s)_{\bullet-1}$, *гомотопически эквивалентны между собой и гомотопически эквивалентны дифференциальному модулю* $(H(X), d = 0)$. □

Рассмотрим теперь связь между заданными над полями дифференциальными модулями с фильтрациями и стабильными $D_\infty^{(s)}$-модулями.

Напомним сначала, что фильтрацией $\{X^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, дифференциального модуля (X, d) называется семейство градуированных подмодулей $X^n_\bullet \subseteq X_\bullet$, для которых выполнены следующие условия:

$$\ldots \subseteq X^n_\bullet \subseteq X^{n+1}_\bullet \subseteq \ldots, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} X^n = X, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} X^n = 0, \quad d(X^n) \subseteq X^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отображением $f\colon (X, \{X^n\}) \to (Y, \{Y^n\})$ дифференциальных модулей с фильтрациями называется отображение $f\colon X \to Y$ дифференциальных модулей, для которого выполнено условие $f(X^n) \subseteq Y^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Гомотопией h между отображениями $f, g\colon (X, \{X^n\}) \to (Y, \{Y^n\})$ дифференциальных модулей с фильтрациями называется гомотопия $h\colon X \to Y$ между отображениями $f, g\colon X \to Y$ дифференциальных модулей, для которой выполнено условие $h(X^n) \subseteq Y^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 1.5. (1)-фильтрацией дифференциального модуля (X, d) будем называть произвольную фильтрацию $\{X^n\}$ этого дифференциального модуля, удовлетворяющую условию $d(X^n) \subseteq X^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$. Отображениями дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями будем считать отображения дифференциальных модулей с фильтрациями. Гомотопией h между отображениями $f, g\colon (X, \{X^n\}) \to (Y, \{Y^n\})$ дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями будем называть гомотопию $h\colon X \to Y$ между отображениями $f, g\colon X \to Y$ дифференциальных модулей, для которой выполнено условие $h(X^n) \subseteq Y^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Легко убедиться, что категория дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями является полной подкатегорией категорией дифференциальных модулей с фильтрациями. Однако функтор вложения из категории дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями в категорию дифференциальных модулей с фильтрациями не сохраняет гомотопии между морфизмами и, следовательно, не индуцирует никакого функтора, а тем более функтора вложения, между соответствующими гомотопическими категориями.

Под SDR-ситуацией дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями будем понимать SDR-ситуацию $(\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi, h)$ дифференциальных модулей, в которой отображения $\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi$ являются морфизмами дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями и гомотопия $h\colon X \to X$ является гомотопией между морфизмами дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями.

Пусть задан произвольный дифференциальный модуль X с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$, и пусть $i^n\colon H(X^n)\to H(X)$ — отображение модулей гомологий, индуцированное вложением $X^n\subseteq X$. Тогда семейство подмодулей $H(X)^n\subseteq H(X)$, $n\in\mathbb{Z}$, где $H(X)^n=\operatorname{Im}(i^n)$, является фильтрацией $\{H(X)^n\}$ гомологического модуля $H(X)$, которую можно считать (1)-фильтрацией. Легко убедиться, что если дифференциальный модуль X с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$ задан над полем, то гомологическая SDR-ситуация $(\eta\colon X\rightleftarrows H(X):\xi,h)$ является SDR-ситуацией дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями $\{X^n\}$ и $\{H(X)^n\}$. Эту SDR-ситуацию дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями далее будем называть гомологической SDR-ситуацией дифференциального модуля (X,d) с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$.

Легко убедиться, что любая (1)-фильтрация $\{X^n\}$ дифференциального модуля X индуцирует (1)-фильтрацию $\{(X^*)^{-n}\}$ на сопряжённом дифференциальном модуле X^*, где $(X^*)^{-n}=(X/X^n)^*$. Ясно, что каждая SDR-ситуация дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями $(\eta\colon X\rightleftarrows Y:\xi,h)$ определяет SDR-ситуацию $(\xi^*\colon X^*\rightleftarrows Y^*:\eta^*,h^*)$ дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями.

Опишем теперь связь между заданными над полем дифференциальными модулями с (1)-фильтрациями и стабильными $D_\infty^{(1)}$-модулями. Пусть над полем задан произвольный дифференциальный модуль (X,d) с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$. Обозначим через Z_X^k подмодуль градуированного модуля X^k, для которого выполнено условие $X^k=Z_X^k\oplus X^{k-1}$. При помощи условия $d(X_\bullet^k)\subseteq X_{\bullet-1}^{k-1}$ определим стабильный $D_\infty^{(1)}$-модуль (X,d^{i+1}), полагая

$$d^{i+1}=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}d_k^{i+1}\colon X_\bullet\to X_{\bullet-1},\quad i\geqslant 0,$$

где отображение

$$d_k^{i+1}\colon (Z_X^k)_\bullet\to\bigl(Z_X^{k-(i+1)}\bigr)_{\bullet-1}$$

является компонентой отображения

$$d\colon (Z_X^k)_\bullet\to X_{\bullet-1}^{k-1}=\bigl((Z_X^{k-1})_{\bullet-1}\oplus\ldots\oplus\bigl(Z_X^{k-(i+1)}\bigr)_{\bullet-1}\oplus\ldots\bigr).$$

Легко убедиться, что $D_\infty^{(1)}$-модуль (X,d^{i+1}) является стабильным $D_\infty^{(1)}$-модулем, для которого выполнено условие $(X,D_1)=(X,d)$, где D_1 — суммарный дифференциал $D_\infty^{(1)}$-модуля (X,d^{i+1}). Аналогично показывается, что любое отображение заданных над полем дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями и любая гомотопия между отображениями заданных над полем дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями однозначно определяют соответственно морфизм $D_\infty^{(1)}$-модулей и гомотопию между морфизмами $D_\infty^{(1)}$-модулей. Таким образом, имеем следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Каждый заданный над полем дифференциальный модуль (X,d) с (1)-фильтрацией однозначно определяет на градуированном модуле X структуру стабильного $D_\infty^{(1)}$-модуля (X,d^{i+1}), для которого $(X,D_1)=(X,d)$,* *где D_1 — суммарный дифференциал $D_\infty^{(1)}$-модуля (X, d^{i+1}). Более того, каждая заданная над полем SDR-ситуация дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями однозначно определяет SDR-ситуацию стабильных $D_\infty^{(1)}$-модулей, для которой суммарная SDR-ситуация дифференциальных модулей совпадает с исходной SDR-ситуацией дифференциальных модулей.* □

Если рассмотреть спектральную последовательность дифференциального модуля с (1)-фильтрацией [23] и сравнить её с указанной в теореме 1.2 спектральной последовательностью $D_\infty^{(1)}$-модуля, определяемого данным дифференциальным модулем с (1)-фильтрацией, то получим следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Пусть $\{(X_s, d_s)\}_{s\geqslant 1}$ — спектральная последовательность произвольного заданного над полем дифференциального модуля (X, d) с (1)-фильтрацией. Тогда на каждом члене (X_s, d_s) этой спектральной последовательности имеется структура стабильного $D_\infty^{(s)}$-модуля (X_s, d_s^{i+s}), которая связана с дифференциалом d_s в этом члене равенством $d_s^s = d_s$. Если (1)-фильтрация дифференциального модуля X является ограниченной снизу, то для каждого $s \geqslant 1$ модуль гомологий $H(X_s) = \operatorname{Ker} D_s / \operatorname{Im} D_s$ стабильного $D_\infty^{(s)}$-модуля (X_s, d_s^{i+s}) изоморфен предельному члену X_∞ спектральной последовательности $\{(X_s, d_s)\}_{s\geqslant 1}$ и, следовательно, изоморфен модулю гомологий $H(X) = \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$.* □

Следствие 1.2. *Пусть $\{(X_s, d_s)\}_{s\geqslant 1}$ — заданная над полем (ко)гомологическая спектральная последовательность произвольного расслоения Серра $p\colon E \to B$. Тогда на каждом члене (X_s, d_s) этой спектральной последовательности имеется структура стабильного $D_\infty^{(s)}$-модуля (X_s, d_s^{i+s}), которая связана с дифференциалом d_s в этом члене равенством $d_s^s = d_s$. Для каждого $s \geqslant 1$ модуль гомологий $H(X_s) = \operatorname{Ker} D_s / \operatorname{Im} D_s$ стабильного $D_\infty^{(s)}$-модуля (X_s, d_s^{i+s}) изоморфен модулю (ко)гомологий $H(E)$ тотального пространства данного расслоения.* □

2. Дифференциальные A_∞-алгебры

В этом разделе напоминаются необходимые определения и утверждения из [2, 11, 14], связанные с понятиями дифференциальной A_∞-алгебры и дифференциальной A_∞-коалгебры, которые соответственно являются гомотопически инвариантными аналогами понятий ассоциативной дифференциальной алгебры и ассоциативной дифференциальной коалгебры.

Определение 2.1. Дифференциальный градуированный модуль (X, d), рассматриваемый вместе с семейством отображений

$$\Big\{\pi_n\colon X^{\otimes(n+2)} \to X \;\Big|\; \pi_n\Big(\big(X^{\otimes(n+2)}\big)_\bullet\Big) \subseteq X_{\bullet+n},\ n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0\Big\},$$

называется дифференциальной A_∞-алгеброй, если для любых целых $n \geqslant -1$ выполнены соотношения

$$d\pi_{n+1}+(-1)^n\pi_{n+1}d=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{t(m+1)+n}\pi_{n-m}(1\otimes\ldots\otimes 1\otimes\pi_m\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1),$$

где сумма берётся также по всем местам t, на которых может стоять π_m.

Легко убедиться, что каждую дифференциальную алгебру (X,d,π), где отображение дифференциальных модулей $\pi\colon (X\otimes X)_\bullet\to X_\bullet$ является умножением в алгебре X, можно рассматривать как дифференциальную A_∞-алгебру (X,d,π_n), если положить $\pi_0=\pi$ и $\pi_n=0$, $n>0$.

Определение 2.2. Морфизмом $f\colon (X,d,\pi_n)\to(Y,d,\pi_n)$ дифференциальных A_∞-алгебр называется такое семейство отображений

$$f=\Big\{f_n\colon X^{\otimes(n+1)}\to Y\ \Big|\ f_n\Big(\big(X^{\otimes(n+1)}\big)_\bullet\Big)\subseteq Y_{\bullet+n},\ n\in\mathbb{Z},\ n\geqslant 0\Big\},$$

что для любых целых чисел $n\geqslant -1$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned}&df_{n+1}+(-1)^nf_{n+1}d=\\&\quad=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{t(m+1)+n}f_{n-m}(1\otimes\ldots\otimes 1\otimes\pi_m\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1)+\\&\quad+\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n_2+n_4+\ldots}\pi_m(f_{n_1}\otimes\ldots\otimes f_{n_{m+2}}),\end{aligned}$$

где $n_1+\ldots+n_{m+2}=n-m$ и сумма берётся также по всем местам t, на которых может стоять π_m.

Без труда проверяется, что каждое отображение дифференциальных алгебр $f\colon (X,d,\pi)\to(Y,d,\pi)$, т. е. отображение дифференциальных модулей, удовлетворяющее условию $f\pi=\pi(f\otimes f)$, можно рассматривать как морфизм дифференциальных A_∞-алгебр, если положить $f_0=f$ и $f_n=0$, $n>0$.

Композиция $gf=\{(gf)_n\}\colon (X,d,\pi_n)\to(Z,d,\pi_n)$ морфизмов дифференциальных A_∞-алгебр $f=\{f_n\}\colon X\to Y$ и $g=\{g_n\}\colon Y\to Z$ определяется следующей формулой:

$$(gf)_n=\sum_{m=0}^{n}g_m(f_{n_1}\otimes\ldots\otimes f_{n_{m+1}}),\quad n\geqslant 0,$$

где $n_1+\ldots+n_{m+1}=n-m$. Тождественным морфизмом $1_X\colon X\to X$ для дифференциальной A_∞-алгебры X служит семейство отображений

$$1_X=\big\{(1_X)_n\colon \big(X^{\otimes(n+1)}\big)_\bullet\to X_{\bullet+n}\ \big|\ n\in\mathbb{Z},\ n\geqslant 0\big\},$$

где $(1_X)_0\colon X_\bullet\to X_\bullet$ — тождественное отображение градуированного модуля X и $(1_X)_n=0$, $n>0$. Таким образом, дифференциальные A_∞-алгебры и их морфизмы образуют категорию, подкатегорией которой является категория дифференциальных алгебр.

Определение 2.3. Гомотопией $h\colon X\to Y$ между морфизмами дифференциальных A_∞-алгебр $f=\{f_n\}$, $g=\{g_n\}\colon (X,d,\pi_n)\to(Y,d,\pi_n)$ называется такое семейство отображений

$$h=\Big\{h_n\colon X^{\otimes(n+1)}\to Y\ \Big|\ h_n\Big(\big(X^{\otimes(n+1)}\big)_\bullet\Big)\subseteq Y_{\bullet+n+1},\ n\in\mathbb{Z},\ n\geqslant 0\Big\},$$

что для любых целых $n\geqslant -1$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned}dh_{n+1}+(-1)^{n+1}h_{n+1}d&=f_{n+1}-g_{n+1}+\\&+\sum_{m=0}^{n}(-1)^{t(m+1)+n+1}h_{n-m}(1\otimes\ldots\otimes1\otimes\pi_m\otimes1\otimes\ldots\otimes1)+\\&+\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m+1+\varepsilon(t)}\pi_m(g_{n_1}\otimes\ldots\otimes g_{n_{t-1}}\otimes h_{n_t}\otimes f_{n_{t+1}}\otimes\ldots\otimes f_{n_{m+2}}),\end{aligned}$$

где $n_1+\ldots+n_{m+2}=n-m$ и суммы берутся также по всем местам t, на которых могут стоять соответственно π_m и h_{n_t};

$$\varepsilon(t)=n_2+n_4+\ldots+n_{2[\frac{t}{2}]}+n_{2[\frac{t+1}{2}]+1}+n_{2[\frac{t+1}{2}]+3}+\ldots+n_{2[\frac{m+1}{2}]+1}.$$

Легко убедиться, что любую гомотопию $h\colon X\to Y$ между отображениями дифференциальных алгебр $f,g\colon X\to Y$ можно считать гомотопией между морфизмами соответствующих дифференциальных A_∞-алгебр, если положить $h_0=h$ и $h_n=0$, $n>0$.

Рассмотрим основные гомотопические свойства дифференциальных A_∞-алгебр. Пусть заданы отображения дифференциальных A_∞-алгебр $\eta\colon X\rightleftarrows Y:\xi$, удовлетворяющие условию $\eta\xi=1_Y$, и задана гомотопия $h\colon X\to X$ между отображениями дифференциальных A_∞-алгебр $\xi\eta$ и 1_X, для которой выполнены условия $\eta h=0$, $\xi h=0$, $hh=0$. Любая указанная выше тройка $(\eta\colon X\rightleftarrows Y:\xi,h)$ называется SDR-ситуацией дифференциальных A_∞-алгебр.

Теорема 2.1. *Пусть заданы произвольная дифференциальная A_∞-алгебра (X,d,π_n) и произвольная SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta\colon X\rightleftarrows Y:\xi,h)$. Тогда на Y можно ввести структуру дифференциальной A_∞-алгебры (Y,d,π_n), для которой имеет место SDR-ситуация дифференциальных A_∞-алгебр $(\{\eta_n\}\colon(X,d,\pi_n)\rightleftarrows(Y,d,\pi_n):\{\xi_n\},\{h_n\})$ с начальными условиями $\eta_0=\eta$, $\xi_0=\xi$, $h_0=h$.* □

Следствие 2.1. *Пусть над произвольным полем задана произвольная дифференциальная A_∞-алгебра (X,d,π_n), и пусть $H(X)$ — гомологический модуль дифференциального модуля (X,d). Тогда на градуированном модуле $H(X)$ имеется структура дифференциальной A_∞-алгебры $(H(X),d,\pi_n)$, где $d=0$, и определена SDR-ситуация дифференциальных A_∞-алгебр $(\{\eta_n\}\colon(X,d,\pi_n)\rightleftarrows(H(X),d=0,\pi_n):\{\xi_n\},\{h_n\})$, которая продолжает SDR-ситуацию $(\eta\colon(X,d)\rightleftarrows(H(X),d=0):\xi,h)$.* □

Следствие 2.2. *Пусть заданы произвольная дифференциальная алгебра (X,d,π) и произвольная SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta\colon X\rightleftarrows Y:\xi,h)$. Тогда на Y можно ввести структуру дифференциальной*

A_∞-алгебры (Y, d, π_n), для которой имеет место SDR-ситуация дифференциальных A_∞-алгебр $(\{\eta_n\}\colon (X, d, \pi) \rightleftarrows (Y, d, \pi_n) :\{\xi_n\}, \{h_n\})$ с начальными условиями $\eta_0 = \eta$, $\xi_0 = \xi$, $h_0 = h$. □

Следствие 2.3. *Пусть над произвольным полем задана произвольная дифференциальная алгебра (X, d, π), и пусть $H(X)$ — гомологический модуль дифференциального модуля (X, d). Тогда на градуированном модуле $H(X)$ имеется структура дифференциальной A_∞-алгебры $(H(X), d, \pi_n)$, где $d = 0$, и определена SDR-ситуация дифференциальных A_∞-алгебр $(\{\eta_n\}\colon (X, d, \pi) \rightleftarrows (H(X), d = 0, \pi_n) :\{\xi_n\}, \{h_n\})$, которая продолжает SDR-ситуацию $(\eta\colon (X, d) \rightleftarrows (H(X), d = 0) :\xi, h)$.* □

Определение 2.4. Дифференциальный градуированный модуль (X, d), рассматриваемый вместе с семейством отображений

$$\left\{\nabla_n\colon X \to X^{\otimes(n+2)} \mid \nabla_n(X_\bullet) \subseteq \left(X^{\otimes(n+2)}\right)_{\bullet+n},\ n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0\right\},$$

называется дифференциальной A_∞-коалгеброй, если для любых целых $n \geqslant -1$ выполнены соотношения

$$d\nabla_{n+1} + (-1)^n \nabla_{n+1} d = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{(m+1)(n+t+1)} (1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \nabla_m \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1) \nabla_{n-m},$$

где сумма берётся также по всем местам t, на которых может стоять ∇_m.

Определение 2.5. Морфизмом $f\colon (X, d, \nabla_n) \to (Y, d, \nabla_n)$ дифференциальных A_∞-коалгебр называется такое семейство отображений

$$f = \left\{f_n\colon X \to Y^{\otimes(n+1)} \mid f_n(X_\bullet) \subseteq \left(Y^{\otimes(n+1)}\right)_{\bullet+n},\ n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0\right\},$$

что для любых целых $n \geqslant -1$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &df_{n+1} + (-1)^n f_{n+1} d = \\ &\quad = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{(m+1)(n+t)} (1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \nabla_m \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1) f_{n-m} + \\ &\quad + \sum_{m=0}^{n} (-1)^{mn+n_2+n_4+\cdots} (f_{n_1} \otimes \ldots \otimes f_{n_{m+2}}) \nabla_m, \end{aligned}$$

где $n_1 + \ldots + n_{m+2} = n - m$ и сумма берётся также по всем местам t, на которых может стоять ∇_m.

Композиция $gf = \{(gf)_n\}\colon (X, d, \nabla_n) \to (Z, d, \nabla_n)$ морфизмов дифференциальных A_∞-коалгебр $f = \{f_n\}\colon X \to Y$ и $g = \{g_n\}\colon Y \to Z$ задаётся формулой

$$(gf)_n = \sum_{m=0}^{n} (g_{n_1} \otimes \ldots \otimes g_{n_{m+1}}) f_m, \quad n \geqslant 0,$$

где $n_1 + \ldots + n_{m+1} = n - m$. Тождественным морфизмом $1_X\colon X \to X$ для дифференциальной A_∞-коалгебры X служит семейство отображений

$$1_X = \left\{(1_X)_n\colon X_\bullet \to \left(X^{\otimes(n+1)}\right)_{\bullet+n} \mid n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0\right\},$$

где $(1_X)_0\colon X_\bullet \to X_\bullet$ — тождественное отображение градуированного модуля X и $(1_X)_n = 0$, $n > 0$.

Определение 2.6. Гомотопией $h\colon X \to Y$ между морфизмами дифференциальных A_∞-коалгебр $f = \{f_n\}$, $g = \{g_n\}\colon (X, d, \nabla_n) \to (Y, d, \nabla_n)$ называется такое семейство отображений

$$h = \bigl\{h_n\colon X \to Y^{\otimes(n+1)} \mid h_n(X_\bullet) \subseteq \bigl(Y^{\otimes(n+1)}\bigr)_{\bullet+n+1}),\ n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0\bigr\},$$

что для любых целых $n \geqslant -1$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} dh_{n+1} &+ (-1)^{n+1}h_{n+1}d = (-1)^{n+1}(f_{n+1} - g_{n+1}) + \\ &+ \sum_{m=0}^{n}(-1)^{(m+1)(n+t)}(1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \nabla_m \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1)h_{n-m} + \\ &+ \sum_{m=0}^{n}(-1)^{(m+1)n+\varepsilon(t)}(g_{n_1} \otimes \ldots \otimes g_{n_{t-1}} \otimes h_{n_t} \otimes f_{n_{t+1}} \otimes \ldots \otimes f_{n_{m+2}})\nabla_m, \end{aligned}$$

где суммы берутся также по всем местам t, на которых могут стоять ∇_m и h_{n_t}, $n_1 + \ldots + n_{m+2} = n - m$,

$$\varepsilon(t) = n_2 + n_4 + \ldots + n_{2[\frac{t-1}{2}]} + n_{2[\frac{t}{2}]+1} + n_{2[\frac{t+1}{2}]+3} + \ldots + n_{2[\frac{m+1}{2}]+1}.$$

Пусть заданы отображения дифференциальных A_∞-коалгебр $\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi$, удовлетворяющие условию $\eta\xi = 1_Y$, и задана гомотопия $h\colon X \to X$ между отображениями дифференциальных A_∞-коалгебр $\xi\eta$ и 1_X, для которой выполнены условия $\eta h = 0$, $\xi h = 0$, $hh = 0$. Любая указанная выше тройка $(\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi, h)$ называется SDR-ситуацией дифференциальных A_∞-коалгебр.

Теорема 2.2. *Пусть заданы произвольные дифференциальная A_∞-коалгебра (X, d, ∇_n) и SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi, h)$. Тогда на Y можно ввести структуру дифференциальной A_∞-коалгебры (Y, d, ∇_n), для которой имеет место SDR-ситуация дифференциальных A_∞-коалгебр $(\{\eta_n\}\colon (X, d, \nabla_n) \rightleftarrows (Y, d, \nabla_n) : \{\xi_n\}, \{h_n\})$ с начальными условиями $\eta_0 = \eta$, $\xi_0 = \xi$, $h_0 = h$.* □

Следствие 2.4. *Пусть над произвольным полем задана произвольная дифференциальная A_∞-коалгебра (X, d, ∇_n), и пусть $H(X)$ — гомологический модуль дифференциального модуля (X, d). Тогда на градуированном модуле $H(X)$ имеется структура дифференциальной A_∞-коалгебры $(H(X), d, \nabla_n)$, где $d = 0$, и определена SDR-ситуация дифференциальных A_∞-коалгебр $(\{\eta_n\}\colon (X, d, \nabla_n) \rightleftarrows (H(X), d = 0, \nabla_n)\colon \{\xi_n\}, \{h_n\})$, которая продолжает SDR-ситуацию $(\eta\colon (X, d) \rightleftarrows (H(X), d = 0) : \xi, h)$.* □

Следствие 2.5. *Пусть заданы произвольные дифференциальная коалгебра (X, d, ∇) и SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi, h)$. Тогда на Y можно ввести структуру дифференциальной A_∞-коалгебры (Y, d, ∇_n), для которой имеет место SDR-ситуация дифференциальных A_∞-коалгебр $(\{\eta_n\}\colon (X, d, \nabla) \rightleftarrows (Y, d, \nabla_n) : \{\xi_n\}, \{h_n\})$ с начальными условиями $\eta_0 = \eta$, $\xi_0 = \xi$, $h_0 = h$.* □

Следствие 2.6. *Пусть над произвольным полем задана произвольная дифференциальная коалгебра (X, d, ∇), и пусть $H(X)$ — гомологический модуль дифференциального модуля (X, d). Тогда на градуированном модуле $H(X)$ имеется структура дифференциальной A_∞-коалгебры $(H(X), d, \nabla_n)$, где $d = 0$, и, кроме того, определена SDR-ситуация дифференциальных A_∞-коалгебр $(\{\eta_n\}\colon (X, d, \nabla) \rightleftarrows (H(X), d = 0, \nabla_n) :\{\xi_n\}, \{h_n\})$, продолжающая SDR-ситуацию $(\eta\colon (X, d) \rightleftarrows (H(X), d = 0) : \xi, h)$.* □

Рассмотрим теперь понятие ко-B_∞-конструкции дифференциальной A_∞-коалгебры. Пусть задана произвольная дифференциальная A_∞-коалгебра (X, d, ∇_n). Обозначим через $(A_\infty(S^{-1}X), \tilde{d}, \pi_n)$ свободную дифференциальную A_∞-алгебру, порождённую денадстройкой $S^{-1}X$ над градуированным модулем X. Введём на дифференциальной A_∞-алгебре $A_\infty(S^{-1}X)$ новый, возмущённый в смысле [19] по отношению к дифференциалу $\tilde{d}$ дифференциал $d\colon A_\infty(S^{-1}X)_\bullet \to A_\infty(S^{-1}X)_{\bullet-1}$, который однозначно определяется условием, что естественное отображение вложения $\alpha\colon X_\bullet \to A_\infty(S^{-1}X)_{\bullet-1}$, $\alpha(x) = x$, является скрещивающей коцепью в смысле [14], т. е. условием справедливости соотношения

$$d\alpha = -\alpha d + \sum_{n\geqslant 0} c'_n(\alpha\otimes\ldots\otimes\alpha)c''_n,$$

где $\nabla(\pi_n) = \sum c'_n \otimes c''_n$, $\pi_n \in A_\infty(n+2)_n$. Здесь $\nabla\colon A_\infty \to A_\infty \otimes A_\infty$ — коумножение в операде Сташеффа (A_∞, γ), являющейся по определению операдой, свободно порождённой семейством элементов $\pi_n \in A_\infty(n+2)_n$, $n \geqslant 0$, дифференциал в которой задаётся на образующих формулой

$$d(\pi_n) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{t(m+1)+n}\gamma(\pi_{n-m}\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1\otimes\pi_m\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1),$$

где сумма берётся также по всем местам t, на которых может стоять элемент π_m. Таким образом, для любой дифференциальной A_∞-коалгебры (X, d, ∇_n) определена соответствующая ей дифференциальная A_∞-алгебра $(A_\infty(S^{-1}X), d, \pi_n)$.

Определение 2.7. Дифференциальная A_∞-алгебра $(A_\infty(S^{-1}X), d, \pi_n)$ называется ко-B_∞-конструкцией дифференциальной A_∞-коалгебры (X, d, ∇_n) и обозначается $F_\infty(X)$.

Двойственным образом вводится понятие B_∞-конструкции $B_\infty(X)$ дифференциальной A_∞-алгебры (X, d, π_n). По определению $B_\infty(X)$ является дифференциальной A_∞-коалгеброй $(A_\infty(SX), d, \nabla_n)$, где $A_\infty(SX)$ — свободная дифференциальная A_∞-коалгебра $(A_\infty(SX), \tilde{d}, \nabla_n)$, порождённая надстройкой SX над градуированным модулем X. Дифференциал $d\colon A_\infty(SX)_\bullet \to A_\infty(SX)_{\bullet-1}$ является возмущённым дифференциалом по отношению к дифференциалу $\tilde{d}$ и однозначно определяется условием скрещивающей коцепи для естественной проекции $\beta\colon A_\infty(SX)_\bullet \to X_{\bullet-1}$, которая задаётся на элементах $x \in (SX)_\bullet \subset A_\infty(SX)_\bullet$ правилом $\beta(x) = x \in X_{\bullet-1}$ и которая равна нулю на всех остальных элементах модуля $A_\infty(SX)$. Таким образом, для каждой дифференциальной A_∞-алгебры (X, d, π_n) определена соответствующая ей дифференциальная A_∞-коалгебра $(A_\infty(SX), d, \nabla_n)$.

Определение 2.8. Дифференциальная A_∞-коалгебра $(A_\infty(SX), d, \nabla_n)$ называется B_∞-конструкцией дифференциальной A_∞-алгебры (X, d, π_n) и обозначается $B_\infty(X)$.

Так как для любой дифференциальной A_∞-алгебры X и любой дифференциальной A_∞-коалгебры Y указанные выше отображения $\beta\colon B_\infty(X)_\bullet \to X_{\bullet-1}$ и $\alpha\colon Y_\bullet \to F_\infty(Y)_{\bullet-1}$ являются скрещивающими коцепями, то отображения β и α индуцируют соответственно естественные отображения дифференциальных модулей $F_\infty(\beta)\colon F_\infty B_\infty(X) \to X$ и $B_\infty(\alpha)\colon Y \to B_\infty F_\infty(Y)$.

Теорема 2.3. *Для любой дифференциальной A_∞-алгебры X семейство отображений*
$$\big\{F_\infty(\beta)_n\colon \big(F_\infty B_\infty(X)\big)^{\otimes n+1}_\bullet \to X_{\bullet+n} \mid n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0\big\},$$
где $F_\infty(\beta)_0 = F_\infty(\beta)$, $F_\infty(\beta)_n = 0$, $n > 0$, является гомотопической эквивалентностью дифференциальных A_∞-алгебр. □

Теорема 2.4. *Для каждой дифференциальной A_∞-коалгебры X семейство отображений*
$$\{B_\infty(\alpha)_n\colon (X^{\otimes n+1})_\bullet \to B_\infty F_\infty(X)_{\bullet+n} \mid n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0\},$$
где $B_\infty(\alpha)_0 = B_\infty(\alpha)$, $B_\infty(\alpha)_n = 0$, $n > 0$, является гомотопической эквивалентностью дифференциальных A_∞-коалгебр. □

3. D_∞-дифференциальные A_∞-алгебры

В этом разделе напоминаются необходимые определения и утверждения из [4], связанные с понятием D_∞-дифференциальной A_∞-алгебры, являющимся квантовым аналогом понятия дифференциальной A_∞-алгебры.

Пусть заданы произвольные $D_\infty^{(s)}$-модули (X, d^{i+s}) и (Y, d^{i+s}). Тогда на тензорном произведении $X \otimes Y$ градуированных модулей X и Y имеется $D_\infty^{(s)}$-дифференциал $\{d^{i+s}\colon (X \otimes Y)_\bullet \to (X \otimes Y)_{\bullet-1}\}$, компоненты которого задаются формулой
$$d^{i+s}(x \otimes y) = d^{i+s}(x) \otimes y + (-1)^{\dim(x)} x \otimes d^{i+s}(y).$$
В частности, для каждого $D_\infty^{(s)}$-модуля (X, d^{i+s}) и любого целого числа $n \geqslant 1$ определён $D_\infty^{(s)}$-модуль $(X^{\otimes n}, d^{i+s})$.

Определение 3.1. $D_\infty^{(s)}$-дифференциальный модуль (X, d^{i+s}), рассматриваемый вместе с семейством отображений
$$\big\{\pi_n^{-sn+i}\colon X^{\otimes(n+2)} \to X \mid \pi_n^{-sn+i}\big(\big(X^{\otimes(n+2)}\big)_\bullet\big) \subseteq X_{\bullet+n},\ n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0,\ i \geqslant 0\big\},$$
называется $D_\infty^{(s)}$-дифференциальной A_∞-алгеброй или, короче, $D_\infty^{(s)} A_\infty$-алгеброй, если для любых целых чисел $n \geqslant -1$ и $k \geqslant 0$ выполнены соотношения

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s}\pi_{n+1}^{-s(n+1)+j} + (-1)^n \pi_{n+1}^{-s(n+1)+i} d^{j+s} =$$
$$= \sum_{i+j=k}\sum_{m=0}^{n} (-1)^{t(m+1)+n} \pi_{n-m}^{-s(n-m)+i}(1\otimes \ldots \otimes 1 \otimes \pi_m^{-sm+j} \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1),$$

где сумма берётся также по всем местам t, на которых может стоять π_m^{-sm+j}.

Легко убедиться, что для любой $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебры $(X, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$ семейство отображений $\{\pi_0^i\colon (X^{\otimes 2})_\bullet \to X_\bullet \mid i \geqslant 0\}$ является морфизмом $D_\infty^{(s)}$-модулей и дифференциальный модуль (X, d^s), рассматриваемый вместе с семейством отображений $\bigl\{\pi_n^{-sn}\colon \bigl(X^{\otimes(n+2)}\bigr)_\bullet \to X_{\bullet+n} \mid n \geqslant 0\bigr\}$, является дифференциальной A_∞-алгеброй.

Определение 3.2. Морфизмом $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр $f\colon X \to Y$ называется такое семейство отображений

$$f = \bigl\{f_n^{-sn+i}\colon X^{\otimes(n+1)} \to Y \mid f_n^{-sn+i}\bigl(\bigl(X^{\otimes(n+1)}\bigr)_\bullet\bigr) \subseteq Y_{\bullet+n},\ n \geqslant 0,\ i \geqslant 0\bigr\},$$

что для любых целых чисел $n \geqslant -1$ и $k \geqslant 0$ выполнены соотношения

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s} f_{n+1}^{-s(n+1)+j} + (-1)^n f_{n+1}^{-s(n+1)+i} d^{j+s} =$$
$$= \sum_{i+j=k}\sum_{m=0}^{n} (-1)^{t(m+1)+n} f_{n-m}^{-s(n-m)+i}(1\otimes \ldots \otimes 1 \otimes \pi_m^{-sm+j} \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1) +$$
$$+ \sum_{i+j=k}\sum_{m=0}^{n} (-1)^{n_2+n_4+\ldots} \pi_m^{-sm+i}(f_{n_1}^{-sn_1+j_1} \otimes \ldots \otimes f_{n_{m+2}}^{-sn_{m+2}+j_{m+2}}),$$

где $n_1 + \ldots + n_{m+2} = n - m$, $j_1 + \ldots + j_{m+2} = j$ и сумма берётся также по всем местам t, на которых может стоять π_m^{-sm+j}.

Легко убедиться, что для любого морфизма $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр $f = \{f_n^{-sn+i}\}\colon X \to Y$ семейство отображений $\{f_0^i\colon X_\bullet \to Y_\bullet \mid i \geqslant 0\}$ является морфизмом $D_\infty^{(s)}$-модулей и семейство отображений $\bigl\{f_n^{-sn}\colon \bigl(X^{\otimes(n+1)}\bigr)_\bullet \to Y_{\bullet+n} \mid n \geqslant 0\bigr\}$ является морфизмом дифференциальных A_∞-алгебр $(X, d^s, \pi_n^{-sn}) \to (Y, d^s, \pi_n^{-sn})$.

Композиция $gf = \{(gf)_n^{-sn+i}\}\colon (X, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i}) \to (Z, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$ морфизмов $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр $f = \{f_n^{-sn+i}\}\colon X \to Y$ и $g = \{g_n^{-sn+i}\}\colon Y \to Z$ определяется следующей формулой:

$$(gf)_n^{-sn+k} = \sum_{i+j=k}\sum_{m=0}^{n} g_m^{-sm+i}(f_{n_1}^{-sn_1+j_1} \otimes \ldots \otimes f_{n_{m+1}}^{-sn_{m+1}+j_{m+1}}), \quad n \geqslant 0, \quad k \geqslant 0,$$

где $j_1 + \ldots + j_{m+1} = j$, $n_1 + \ldots + n_{m+1} = n - m$. Тождественным морфизмом $1_X\colon X \to X$ для $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебры $(X, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$ служит семейство отображений $1_X = \bigl\{(1_X)_n^{-sn+i}\colon \bigl(X^{\otimes(n+1)}\bigr)_\bullet \to X_{\bullet+n}\bigr\}$, где $(1_X)_0^0$ — тождественное отображение градуированного модуля X и $(1_X)_n^{-sn+i}=0$, $n>0$. Таким образом, $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебры и их морфизмы образуют категорию.

Определение 3.3. Гомотопией $h\colon X_\bullet\to Y_{\bullet+1}$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр

$$f=\{f_n^{-sn+i}\},\ g=\{g_n^{-sn+i}\}\colon (X,d^{i+s},\pi_n^{-sn+i})\to(Y,d^{i+s},\pi_n^{-sn+i})$$

называется такое семейство отображений

$$h=\bigl\{h_n^{-s(n+1)+i}\colon X^{\otimes(n+1)}\to Y\mid h_n^{-s(n+1)+i}\bigl(\bigl(X^{\otimes(n+1)}\bigr)_\bullet\bigr)\subseteq Y_{\bullet+n+1},\ n\geqslant 0,\ i\geqslant 0\bigr\},$$

что для любых целых чисел $n\geqslant -1$ и $k\geqslant 0$ выполнены соотношения

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s}h_{n+1}^{-s(n+2)+j}+(-1)^{n+1}h_{n+1}^{-s(n+2)+i}d^{j+s}=f_{n+1}^{-s(n+1)+k}-g_{n+1}^{-s(n+1)+k}+$$
$$+\sum_{i+j=k}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{t(m+1)+n+1}h_{n-m}^{-s(n-m+1)+i}(1\otimes\ldots\otimes 1\otimes\pi_m^{-sm+j}\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1)+$$
$$+\sum_{i+j=k}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m+1+\varepsilon(t)}\pi_m^{-sm+i}(g_{n_1}^{-sn_1+j_1}\otimes\ldots\otimes g_{n_{t-1}}^{-sn_{t-1}+j_{t-1}}\otimes$$
$$\otimes h_{n_t}^{-s(n_t+1)+j_t}\otimes f_{n_{t+1}}^{-sn_{t+1}+j_{t+1}}\otimes\ldots\otimes f_{n_{m+2}}^{-sn_{m+2}+j_{m+2}}),$$

где суммы берутся также по всем местам t, на которых могут стоять π_m^{-sm+j} и $h_{n_t}^{-s(n_t+1)+j_t}$, $n_1+\ldots+n_{m+2}=n-m$, $j_1+\ldots+j_{m+2}=j$,

$$\varepsilon(t)=n_2+n_4+\ldots+n_{2[\frac{t}{2}]}+n_{2[\frac{t+1}{2}]+1}+n_{2[\frac{t+1}{2}]+3}+\ldots+n_{2[\frac{m+1}{2}]+1}.$$

Легко убедиться, что семейство $\{h_0^{i-s}\colon X_\bullet\to Y_{\bullet+1}\mid i\geqslant 0\}$ является гомотопией между морфизмами $D_\infty^{(s)}$-модулей $\{f_0^i\}$, $\{g_0^i\}\colon (X,d^{i+s})\to(Y,d^{i+s})$ и семейство $\bigl\{h_n^{-s(n+1)}\colon \bigl(X^{\otimes(n+1)}\bigr)_\bullet\to Y_{\bullet+n+1}\mid n\geqslant 0\bigr\}$ является гомотопией между морфизмами A_∞-алгебр $\{f_n^{-sn}\}$, $\{g_n^{-sn}\}\colon (X,d^s,\pi_n^{-sn})\to(Y,d^s,\pi_n^{-sn})$.

Рассмотрим основные гомотопические свойства $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр. Пусть заданы морфизмы $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр

$$\eta=\{\eta_n^{-sn+i}\}\colon (X,d^{i+s},\pi_n^{-sn+i})\rightleftarrows(Y,d^{i+s},\pi_n^{-sn+i})\ :\{\xi_n^{-n+i}\}=\xi,$$

для которых выполнено условие $\eta\xi=1_Y$, и пусть задана некоторая гомотопия $h=\bigl\{h_n^{-s(n+1)+i}\colon \bigl(X^{\otimes(n+1)}\bigr)_\bullet\to X_{\bullet+n+1}\bigr\}$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр 1_X и $\xi\eta$, удовлетворяющая условиям $h\xi=0$, $\eta h=0$, $hh=0$. Рассмотренная ситуация называется SDR-ситуацией $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр.

Теорема 3.1. *Пусть заданы произвольные $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебра $(X,d^{i+s},\pi_n^{-sn+i})$ и SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta\colon (X,d^s)\rightleftarrows(Y,d)\ :\xi,h)$. Тогда на Y можно ввести структуру $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебры $(Y,d^{i+s},\pi_n^{-sn+i})$, для которой* *имеет место SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр*

$$\bigl(\{\eta_n^{-sn+i}\}\colon (X, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i}) \rightleftarrows (Y, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i}) :\{\xi_n^{-sn+i}\}, \bigl\{h_n^{-s(n+1)+i}\bigr\}\bigr)$$

с начальными условиями $d^s = d$, $\eta_0^0 = \eta$, $\xi_0^0 = \xi$, $h_0^{-s} = h$. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть над произвольным полем задана произвольная $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебра $(X, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$, и пусть $H(X)$ — гомологический модуль дифференциального модуля (X, d^s). Тогда на градуированном модуле $H(X)$ имеется структура $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебры $(H(X), d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$, где $d^s = 0$, и определена SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр*

$$\bigl(\{\eta_n^{-sn+i}\}\colon (X, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i}) \rightleftarrows (H(X), d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i}) :\{\xi_n^{-sn+i}\}, \bigl\{h_n^{-s(n+1)+i}\bigr\}\bigr),$$

которая продолжает SDR-ситуацию $(\eta\colon (X, d^s) \rightleftarrows (H(X), d = 0) :\xi, h)$ дифференциальных модулей. $\square$

Определение 3.4. $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебра $(X, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$ называется $D_\infty^{(s)}$-дифференциальной алгеброй или, короче, $D_\infty^{(s)}$-алгеброй, если $\pi_n^{-sn+i} = 0$, $n > 0$. Морфизмами $D_\infty^{(s)}$-алгебр считаются морфизмы $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр. Для $D_\infty^{(s)}$-алгебры $(X, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$ далее будем употреблять запись (X, d^{i+s}, π^i), где $\pi^i = \pi_0^i$.

Так как категория $D_\infty^{(s)}$-алгебр является полной подкатегорией рассмотренной выше категории $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр, то из теоремы 3.1 получаем для $D_\infty^{(s)}$-алгебр следующие утверждения.

Следствие 3.2. *Пусть заданы произвольная $D_\infty^{(s)}$-алгебра (X, d^{i+s}, π^i) и любая SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta\colon (X, d^s) \rightleftarrows (Y, d) :\xi, h)$. Тогда на Y можно ввести структуру $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебры $(Y, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$, для которой имеет место SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр*

$$\bigl(\{\eta_n^{-sn+i}\}\colon (X, d^{i+s}, \pi^i) \rightleftarrows (Y, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i}) :\{\xi_n^{-sn+i}\}, \bigl\{h_n^{-s(n+1)+i}\bigr\}\bigr)$$

с начальными условиями $d^s = d$, $\eta_0^0 = \eta$, $\xi_0^0 = \xi$, $h_0^{-s} = h$. $\square$

Следствие 3.3. *Пусть над произвольным полем задана произвольная $D_\infty^{(s)}$-алгебра (X, d^{i+s}, π^i), и пусть $H(X)$ — гомологический модуль дифференциального модуля (X, d^s). Тогда на градуированном модуле $H(X)$ имеется структура $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебры $(H(X), d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$, где $d^s = 0$, и определена SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр*

$$\bigl(\{\eta_n^{-sn+i}\}\colon (X, d^{i+s}, \pi^i) \rightleftarrows (H(X), d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i}) :\{\xi_n^{-sn+i}\}, \bigl\{h_n^{-s(n+1)+i}\bigr\}\bigr),$$

которая продолжает SDR-ситуацию $(\eta\colon (X, d^s) \rightleftarrows (H(X), d = 0) :\xi, h)$ дифференциальных модулей. $\square$

Определение 3.5. $D_\infty^{(s)}$-дифференциальный модуль (X, d^{i+s}), рассматриваемый вместе с семейством отображений

$$\bigl\{\nabla_n^{-sn+i}\colon X \to X^{\otimes(n+2)} \mid \nabla_n^{-sn+i}(X_\bullet) \subseteq \bigl(X^{\otimes(n+2)}\bigr)_{\bullet+n},\ n, i \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0,\ i \geqslant 0\bigr\},$$

называется $D_\infty^{(s)}$-дифференциальной A_∞-коалгеброй или $D_\infty^{(s)}A_\infty$-коалгеброй, если для любых целых чисел $n \geqslant -1$ и $k \geqslant 0$ выполнены соотношения

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s}\nabla_{n+1}^{-s(n+1)+j} + (-1)^n\nabla_{n+1}^{-s(n+1)+i}d^{j+s} =$$

$$= \sum_{i+j=k}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{(m+1)(n+t+1)}(1\otimes\ldots\otimes 1\otimes\nabla_m^{-sm+i}\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1)\nabla_{n-m}^{-s(n-m)+j},$$

где сумма берётся также по всем местам t, на которых может стоять ∇_m^{-sm+i}.

Ясно, что семейство отображений $\{\nabla_0^i\colon X_\bullet \to (X^{\otimes 2})_\bullet \mid i \geqslant 0\}$ является морфизмом $D_\infty^{(s)}$-модулей, а дифференциальный модуль (X, d^s), рассматриваемый вместе с семейством отображений $\big\{\nabla_n^{-sn}\colon X \to X^{\otimes(n+2)} \mid n \geqslant 0\big\}$ является дифференциальной A_∞-коалгеброй.

Определение 3.6. Морфизмом $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр $f\colon X \to Y$ называется такое семейство отображений

$$f = \big\{f_n^{-sn+i}\colon X \to Y^{\otimes(n+1)} \mid \\ f_n^{-sn+i}(X_\bullet) \subseteq \big(Y^{\otimes(n+1)}\big)_{\bullet+n},\ n, i \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0,\ i \geqslant 0\big\},$$

что для любых целых чисел $n \geqslant -1$ и $k \geqslant 0$ выполнены соотношения

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s}f_{n+1}^{-s(n+1)+j} + (-1)^n f_{n+1}^{-s(n+1)+i}d^{j+s} =$$

$$= \sum_{i+j=k}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{(m+1)(n+t)}(1\otimes\ldots\otimes 1\otimes\nabla_m^{-sm+i}\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1)f_{n-m}^{-s(n-m)+j} +$$

$$+ \sum_{i+j=k}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{mn+n_2+n_4+\ldots}(f_{n_1}^{-sn_1+i_1}\otimes\ldots\otimes f_{n_{m+2}}^{-sn_{m+2}+i_{m+2}})\nabla_m^{-sm+j},$$

где $n_1 + \ldots + n_{m+2} = n - m$, $i_1 + \ldots + i_{m+2} = i$ и сумма берётся также по всем местам t, на которых может стоять ∇_m^{-sm+i}.

Ясно, что семейство отображений $\{f_0^i\colon X_\bullet \to Y_\bullet \mid i \geqslant 0\}$ является морфизмом $D_\infty^{(s)}$-модулей и семейство отображений $\big\{f_n^{-sn}\colon X_\bullet \to \big(Y^{\otimes(n+1)}\big)_{\bullet+n} \mid n \geqslant 0\big\}$ является морфизмом дифференциальных A_∞-коалгебр $(X, d^s, \nabla_n^{-sn}) \to (X, d^s, \nabla_n^{-sn})$.

Определение 3.7. Гомотопией между морфизмами $D_\infty^{(s)}$-дифференциальных A_∞-коалгебр

$$f = \{f_n^{-sn+i}\},\ g = \{g_n^{-sn+i}\}\colon (X, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i}) \to (Y, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i})$$

называется такое семейство отображений

$$h = \big\{h_n^{-s(n+1)+i}\colon X \to Y^{\otimes(n+1)} \mid \\ h_n^{-s(n+1)+i}(X_\bullet) \subseteq \big(Y^{\otimes(n+1)}\big)_{\bullet+n+1},\ n \geqslant 0,\ i \geqslant 0\big\},$$

что для любых целых чисел $n \geqslant -1$ и $k \geqslant 0$ выполнены соотношения

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s} h_{n+1}^{-s(n+2)+j} + (-1)^{n+1} h_{n+1}^{-s(n+2)+i} d^{j+s} =$$
$$= (-1)^{n+1}\big(f_{n+1}^{-s(n+1)+k} - g_{n+1}^{-s(n+1)+k}\big) +$$
$$+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{(m+1)(n+t)} (1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \nabla_m^{-sm+i} \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1) h_{n-m}^{-s(n-m+1)+j} +$$
$$+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{(m+1)n+\varepsilon(t)} (g_{n_1}^{-sn_1+i_1} \otimes \ldots \otimes g_{n_{t-1}}^{-sn_{t-1}+i_{t-1}} \otimes h_{n_t}^{-s(n_t+1)+i_t} \otimes$$
$$\otimes f_{n_{t+1}}^{-sn_{t+1}+i_{t+1}} \otimes \ldots \otimes f_{n_{m+2}}^{-sn_{m+2}+i_{m+2}}) \nabla_m^{-sm+j},$$

где суммы берутся также по всем местам t, на которых могут стоять ∇_m^{-sm+i} и $h_{n_t}^{-s(n_t+1)+i_t}$, $n_1 + \ldots + n_{m+2} = n - m$, $i_1 + \ldots + i_{m+2} = i$,

$$\varepsilon(t) = n_2 + n_4 + \ldots + n_{2[\frac{t-1}{2}]} + n_{2[\frac{t}{2}]+1} + n_{2[\frac{t+1}{2}]+3} + \ldots + n_{2[\frac{m+1}{2}]+1}.$$

Ясно, что семейство $h_0 = \{h_0^{i-s} \colon X_\bullet \to Y_{\bullet+1} \mid i \geqslant 0\}$ является гомотопией между морфизмами $D_\infty^{(s)}$-модулей $\{f_0^i\}$, $\{g_0^i\} \colon (X, d^{i+s}) \to (Y, d^{i+s})$ и семейство $\{h_n^{-s(n+1)} \colon X_\bullet \to \big(Y^{\otimes(n+1)}\big)_{\bullet+n+1} \mid n \geqslant 0\}$ является гомотопией между морфизмами дифференциальных A_∞-коалгебр $\{f_n^{-sn}\}$, $\{g_n^{-sn}\} \colon (X, d^s, \nabla_n^{-sn}) \to \to (Y, d^s, \nabla_n^{-sn})$.

Рассмотрим гомотопические свойства $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебр. Пусть заданы морфизмы $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебр

$$\eta = \{\eta_n^{-sn+i}\} \colon (X, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i}) \rightleftarrows (Y, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i}) : \{\xi_n^{-sn+i}\} = \xi,$$

для которых выполнено условие $\eta\xi = 1_Y$, и пусть задана некоторая гомотопия $h = \{h_n^{-s(n+1)+i} \colon X_\bullet \to \big(X^{\otimes(n+1)}\big)_{\bullet+n+1}\}$ между морфизмами $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебр 1_X и $\xi\eta$, удовлетворяющая условиям $h\xi = 0$, $\eta h = 0$, $hh = 0$. Рассмотренная ситуация называется SDR-ситуацией $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебр.

Теорема 3.2. *Пусть заданы произвольные $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебра $(X, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i})$ и SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta \colon (X, d^s) \rightleftarrows (Y, d) : \xi, h)$. Тогда на Y можно ввести структуру $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебры $(Y, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i})$, для которой имеет место SDR-ситуация $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебр*

$$\big(\{\eta_n^{-sn+i}\} \colon (X, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i}) \rightleftarrows (Y, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i}) : \{\xi_n^{-sn+i}\}, \{h_n^{-s(n+1)+i}\}\big)$$

с начальными условиями $d^s = d$, $\eta_0^0 = \eta$, $\xi_0^0 = \xi$, $h_0^{-s} = h$. □

Следствие 3.4. *Пусть над произвольным полем задана произвольная $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебра $(X, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i})$, и пусть $H(X)$ — гомологический модуль дифференциального модуля (X, d^s). Тогда на градуированном модуле $H(X)$*

имеется структура $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебры $(H(X), d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i})$, где $d^s = 0$, и определена SDR-ситуация $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебр

$$\big(\{\eta_n^{-sn+i}\}\colon (X, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i}) \rightleftarrows (H(X), d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i}) :\{\xi_n^{-sn+i}\}, \{h_n^{-s(n+1)+i}\}\big),$$

которая продолжает SDR-ситуацию $(\eta\colon (X, d^s) \rightleftarrows (H(X), d = 0) : \xi, h)$ дифференциальных модулей. □

Определение 3.8. $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебра $(X, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i})$ называется $D_\infty^{(s)}$-дифференциальной коалгеброй или, короче, $D_\infty^{(s)}$-коалгеброй, если выполнено условие $\nabla_n^{-sn+i} = 0$, $n > 0$. Морфизмами $D_\infty^{(s)}$-коалгебр считаются морфизмы $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебр. Для $D_\infty^{(s)}$-коалгебры $(X, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i})$ далее будем употреблять запись (X, d^{i+s}, ∇^i), где $\nabla^i = \nabla_0^i$.

Так как категория $D_\infty^{(s)}$-коалгебр является полной подкатегорией рассмотренной выше категории $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебр, то из теоремы 3.2 получаем для $D_\infty^{(s)}$-коалгебр следующие утверждения.

Следствие 3.5. *Пусть заданы произвольная $D_\infty^{(s)}$-коалгебра (X, d^{i+s}, ∇^i) и любая SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta\colon (X, d^s) \rightleftarrows (Y, d) : \xi, h)$. Тогда на Y можно ввести структуру $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебры $(Y, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i})$, для которой имеет место SDR-ситуация $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебр*

$$\big(\{\eta_n^{-sn+i}\}\colon (X, d^{i+s}, \nabla^i) \rightleftarrows (Y, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i}) :\{\xi_n^{-sn+i}\}, \{h_n^{-s(n+1)+i}\}\big)$$

с начальными условиями $d^s = d$, $\eta_0^0 = \eta$, $\xi_0^0 = \xi$, $h_0^{-s} = h$. □

Следствие 3.6. *Пусть над произвольным полем задана произвольная $D_\infty^{(s)}$-коалгебра (X, d^{i+s}, ∇^i), и пусть $H(X)$ — гомологический модуль дифференциального модуля (X, d^s). Тогда на градуированном модуле $H(X)$ имеется структура $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебры $(H(X), d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i})$, где $d^s = 0$, и определена SDR-ситуация $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебр*

$$\big(\{\eta_n^{-sn+i}\}\colon (X, d^{i+s}, \nabla^i) \rightleftarrows (H(X), d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i}) :\{\xi_n^{-sn+i}\}, \{h_n^{-s(n+1)+i}\}\big),$$

которая продолжает SDR-ситуацию $(\eta\colon (X, d^s) \rightleftarrows (H(X), d = 0) : \xi, h)$ дифференциальных модулей. □

Определение 3.9. $D_\infty^{(s)} A_\infty$-алгебра $(X, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$ называется стабильной, если $D_\infty^{(s)}$-модуль (X, d^{i+s}) является стабильным и для каждого элемента $x_1 \otimes \ldots \otimes x_{n+2} \in X^{\otimes(n+2)}$ найдётся номер $k \geqslant 0$, зависящий от $x_1 \otimes \ldots \otimes x_{n+2}$, для которого выполнены условия $\pi_n^{-sn+i}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{n+2}) = 0$ при $i > k$. В частности, $D_\infty^{(s)}$-алгебра (X, d^{i+s}, π^i) называется стабильной, если она является стабильной $D_\infty^{(s)} A_\infty$-алгеброй.

Определение 3.10. $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебра $(X, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i})$ называется стабильной, если $D_\infty^{(s)}$-модуль (X, d^{i+s}) является стабильным и для каждого $x \in X$ найдётся номер $k \geqslant 0$, зависящий от элемента x, для которого выполнены условия $\nabla_n^{-sn+i}(x) = 0$ при $i > k$. В частности, $D_\infty^{(s)}$-коалгебра (X, d^{i+s}, ∇^i) называется стабильной, если она является стабильной $D_\infty^{(s)}A_\infty$-коалгеброй.

Отметим, что если $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебра или $D_\infty^{(s)}$-алгебра является стабильной, то $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебра, получаемая в теореме 3.1 или в следствии 3.2, также является стабильной. Аналогично для $D_\infty^{(s)}A_\infty$-коалгебр в теореме 3.2 и для $D_\infty^{(s)}$-коалгебр в следствии 3.5.

Легко убедиться, что любая стабильная $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебра $(X, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$ определяет суммарную дифференциальную A_∞-алгебру (X, D, π_n), где отображение $\pi_n\colon (X^{\otimes n+2})_\bullet \to X_{\bullet+n}$ задаётся формулой

$$\pi_n = \pi_n^{-sn} + \pi_n^{-sn+1} + \ldots + \pi_n^{-sn+i} + \ldots, \quad n \geqslant 0,$$

и $D\colon X_\bullet \to X_{\bullet-1}$ — суммарный дифференциал $D_\infty^{(s)}$-модуля (X, d^{i+s}). В частности, каждая стабильная $D_\infty^{(s)}$-алгебра (X, d^{i+s}, π^i) определяет суммарную дифференциальную алгебру (X, D, π), где $D\colon X_\bullet \to X_{\bullet-1}$ — суммарный дифференциал $D_\infty^{(s)}$-модуля (X, d^{i+s}) и умножение $\pi\colon (X \otimes X)_\bullet \to X_\bullet$ задаётся формулой

$$\pi = \pi^0 + \ldots + \pi^i + \ldots.$$

Аналогично любая стабильная $D_\infty^{(s)}A_\infty$-коалгебра $(X, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i})$ определяет суммарную дифференциальную A_∞-коалгебру (X, D, ∇_n) и, в частности, каждая стабильная $D_\infty^{(s)}$-коалгебра (X, d^{i+s}, ∇^i) определяет суммарную дифференциальную коалгебру (X, D, ∇).

Напомним теперь, что любая заданная над произвольным полем дифференциальная A_∞-алгебра (X, d, π_n) определяет согласно следствию 2.1 свою градуированную A_∞-алгебру гомологий $(H(X), d = 0, \pi_n)$. В частности, каждая заданная над произвольным полем дифференциальная алгебра (X, d, π) определяет согласно следствию 2.3 свою градуированную A_∞-алгебру гомологий $(H(X), d = 0, \pi_n)$. Аналогично для любой заданной над произвольным полем дифференциальной A_∞-коалгебры (X, d, ∇_n) определена согласно следствию 2.4 её градуированная A_∞-коалгебра гомологий $(H(X), d = 0, \nabla_n)$ и, в частности, для каждой заданной над полем дифференциальной коалгебры (X, d, ∇_n) определена согласно следствию 2.6 её градуированная A_∞-коалгебра гомологий $(H(X), d = 0, \nabla_n)$.

Определение 3.11. A_∞-алгеброй гомологий $H(X, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$ для заданной над полем $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебры $(X, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$ называется градуированная A_∞-алгебра гомологий $(H(X), d = 0, \pi_n)$ её суммарной дифференциальной A_∞-алгебры (X, D, π_n). В частности, A_∞-алгеброй гомологий $H(X, d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$ для заданной над полем $D_\infty^{(s)}$-алгебры (X, d^{i+s}, π^i) называется градуированная A_∞-алгебра гомологий $(H(X), d = 0, \pi_n)$ её суммарной дифференциальной алгебры (X, D, π).

Определение 3.12. A_∞-коалгеброй гомологий $H(X, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i})$ для заданной над полем $D_\infty^{(s)} A_\infty$-коалгебры $(X, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i})$ называется градуированная A_∞-коалгебра гомологий $(H(X), d = 0, \nabla_n)$ её суммарной дифференциальной A_∞-коалгебры (X, D, ∇_n). В частности, A_∞-коалгеброй гомологий $H(X, d^{i+s}, \nabla_n^{-sn+i})$ для заданной над полем $D_\infty^{(s)}$-коалгебры (X, d^{i+s}, ∇^i) называется градуированная A_∞-коалгебра гомологий $(H(X), d = 0, \nabla_n)$ её суммарной дифференциальной коалгебры (X, D, ∇).

Рассмотрим теперь $D_\infty^{(s)} A_\infty$-алгебру $(H(X), d^{i+s}, \pi_n^{-sn+i})$, где $d^s = 0$, из следствия 3.1. Легко убедиться, что условие $d^s = 0$ позволяет рассматривать $H(X)$ как $D_\infty^{(s+1)} A_\infty$-алгебру $\big(H(X), d^{i+(s+1)}, \tilde{\pi}_n^{-(s+1)n+i}\big)$, где $\tilde{\pi}_n^{-(s+1)n+i} = 0$ для $0 \leqslant i < n$ и $\tilde{\pi}_n^{-(s+1)n+i} = \pi_n^{-sn+i-n}$ при $i \geqslant n$. Ясно, что к полученной $D_\infty^{(s+1)} A_\infty$-алгебре можно снова применить следствие 3.1 и получить соответствующую $D_\infty^{(s+2)} A_\infty$-алгебру. Итерация применения следствия 3.1 к заданной над полем $D_\infty^{(1)} A_\infty$-алгебре приводит к следующим утверждениям.

Теорема 3.3. *Пусть над произвольным полем задана произвольная $D_\infty^{(1)} A_\infty$-алгебра $(X, d^{i+1}, \pi_n^{-n+i})$, и пусть $\{(X_s, d_s)\}_{s\geqslant 1}$ — спектральная последовательность $D_\infty^{(1)}$-модуля (X, d^{i+1}) из теоремы 1.2. Тогда каждый член (X_s, d_s), $s \geqslant 1$, этой спектральной последовательности имеет структуру $D_\infty^{(s)} A_\infty$-алгебры $(X_s, d_s^{i+s}, \pi(s)_n^{-sn+i})$, где $(X_1, d_1^{i+1}, \pi(1)_n^{-n+i}) = (X, d^{i+s}, \pi_n^{-n+i})$ и $d_s^s = d_s$. Для любого $s \geqslant 2$ структура $D_\infty^{(s)} A_\infty$-алгебры $\big(X_s, d_s^{i+s}, \pi(s)_n^{-sn+i}\big)$ в члене X_s индуцирована применением следствия 3.1 к структуре $D_\infty^{(s-1)} A_\infty$-алгебры в члене X_{s-1} и удовлетворяет условию $\pi(s)_n^{-sn+i} = 0$ при $0 \leqslant i < n$.* □

Теорема 3.4. *Пусть над полем задана произвольная стабильная $D_\infty^{(1)} A_\infty$-алгебра $(X, d^{i+1}, \pi_n^{-n+i})$, и пусть $(X_s, d^{i+s}, \pi(s)_n^{-sn+i})$ — структура $D_\infty^{(s)} A_\infty$-алгебры из теоремы 3.3 в члене (X_s, d_s) спектральной последовательности $D_\infty^{(1)}$-модуля (X, d^{i+1}). Тогда A_∞-алгебра гомологий $H(X_s, d_s^{i+s}, \pi(s)_n^{-sn+i})$ стабильной $D_\infty^{(s)} A_\infty$-алгебры $(X_s, d_s^{i+s}, \pi(s)_n^{-sn+i})$ для каждого $s \geqslant 1$ изоморфна A_∞-алгебре гомологий $H(X, d^{i+1}, \pi_n^{-n+i})$ стабильной $D_\infty^{(1)} A_\infty$-алгебры $(X, d^{i+1}, \pi_n^{-n+i})$.* □

Следствие 3.7. *Пусть над произвольным полем задана произвольная $D_\infty^{(1)}$-алгебра (X, d^{i+1}, π^i), и пусть $\{(X_s, d_s)\}_{s\geqslant 1}$ — спектральная последовательность $D_\infty^{(1)}$-модуля (X, d^{i+1}) из теоремы 1.2. Тогда каждый член (X_s, d_s), $s \geqslant 2$, этой спектральной последовательности имеет структуру $D_\infty^{(s)} A_\infty$-алгебры $(X_s, d_s^{i+s}, \pi(s)_n^{-sn+i})$, где $d_s^s = d_s$. Структура $D_\infty^{(2)} A_\infty$-алгебры $(X_2, d_2^{i+2}, \pi(2)_n^{-2n+i})$ в члене X_2 индуцирована применением следствия 3.3 к $D_\infty^{(1)}$-алгебре $(X_1, d_1^{i+1}, \pi(1)^i) = (X, d^{i+1}, \pi^i)$ и удовлетворяет условию $\pi(2)_n^{-2n+i} = 0$ при $0 \leqslant i < n$. Для любого $s \geqslant 3$ структура $D_\infty^{(s)} A_\infty$-алгебры $(X_s, d_s^{i+s}, \pi(s)_n^{-sn+i})$ в члене X_s индуцирована применением* *следствия 3.1 к структуре $D_\infty^{(s-1)}A_\infty$-алгебры в члене X_{s-1} и удовлетворяет условию $\pi(s)_n^{-sn+i}=0$ при $0\leqslant i<n$.* $\square$

Следствие 3.8. *Пусть над полем задана произвольная стабильная $D_\infty^{(1)}$-алгебра (X,d^{i+1},π^i), и пусть $(X_s,d_s^{i+s},\pi(s)_n^{-sn+i})$ — структура $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебры из следствия 3.7 в члене (X_s,d_s), $s\geqslant 2$, спектральной последовательности $D_\infty^{(1)}$-модуля (X,d^{i+1}). Тогда A_∞-алгебра гомологий $H(X_s,d_s^{i+s},\pi(s)_n^{-sn+i})$ стабильной $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебры $(X_s,d_s^{i+s},\pi(s)_n^{-sn+i})$ для каждого $s\geqslant 2$ изоморфна A_∞-алгебре гомологий $H(X,d^{i+1},\pi_n^{-n+i})$ стабильной $D_\infty^{(1)}$-алгебры (X,d^{i+1},π^i).* $\square$

Двойственными аналогами теорем 3.3, 3.4 и следствий 3.7, 3.8 для $D_\infty^{(1)}A_\infty$-коалгебр и $D_\infty^{(1)}$-коалгебр над полями являются следующие утверждения.

Теорема 3.5. *Пусть над произвольным полем задана произвольная $D_\infty^{(1)}A_\infty$-коалгебра $(X,d^{i+1},\nabla_n^{-n+i})$, и пусть $\{(X_s,d_s)\}_{s\geqslant 1}$ — спектральная последовательность $D_\infty^{(1)}$-дифференциального модуля (X,d^{i+1}) из теоремы 1.2. Тогда каждый член (X_s,d_s) этой спектральной последовательности имеет структуру $D_\infty^{(s)}A_\infty$-коалгебры $(X_s,d_s^{i+s},\nabla(s)_n^{-sn+i})$, где $(X_1,d_1^{i+1},\nabla(1)_n^{-n+i})=(X,d^{i+s},\nabla_n^{-n+i})$ и $d_s^s=d_s$. Для любого $s\geqslant 2$ структура $D_\infty^{(s)}A_\infty$-коалгебры $(X_s,d_s^{i+s},\nabla(s)_n^{-sn+i})$ в члене X_s индуцирована применением следствия 3.4 к структуре $D_\infty^{(s-1)}A_\infty$-коалгебры в члене X_{s-1} и удовлетворяет условию $\nabla(s)_n^{-sn+i}=0$ при $0\leqslant i<n$.* $\square$

Теорема 3.6. *Пусть над полем задана произвольная стабильная $D_\infty^{(1)}A_\infty$-коалгебра $(X,d^{i+1},\nabla_n^{-n+i})$, и пусть $(X_s,d^{i+s},\nabla(s)_n^{-sn+i})$ — структура $D_\infty^{(s)}A_\infty$-коалгебры из теоремы 3.5 в члене (X_s,d_s) спектральной последовательности $D_\infty^{(1)}$-модуля (X,d^{i+1}). Тогда A_∞-коалгебра гомологий $H(X_s,d_s^{i+s},\nabla(s)_n^{-sn+i})$ стабильной $D_\infty^{(s)}A_\infty$-коалгебры $(X_s,d_s^{i+s},\nabla(s)_n^{-sn+i})$ для каждого $s\geqslant 1$ изоморфна градуированной A_∞-коалгебре гомологий $H(X,d^{i+1},\nabla_n^{-n+i})$ стабильной $D_\infty^{(1)}A_\infty$-коалгебры $(X,d^{i+1},\nabla_n^{-n+i})$.* $\square$

Следствие 3.9. *Пусть над произвольным полем задана произвольная $D_\infty^{(1)}$-коалгебра (X,d^{i+1},∇^i), и пусть $\{(X_s,d_s)\}_{s\geqslant 1}$ — спектральная последовательность $D_\infty^{(1)}$-модуля (X,d^{i+1}). Тогда каждый член (X_s,d_s), $s\geqslant 2$, этой спектральной последовательности имеет структуру $D_\infty^{(s)}A_\infty$-коалгебры $(X_s,d_s^{i+s},\nabla(s)_n^{-sn+i})$, где $d_s^s=d_s$. Структура $D_\infty^{(2)}A_\infty$-коалгебры $(X_2,d_2^{i+2},\nabla(2)_n^{-2n+i})$ в члене X_2 индуцирована применением следствия 3.6 к $D_\infty^{(1)}$-коалгебре $(X_1,d_1^{i+1},\nabla(1)^i)=(X,d^{i+1},\nabla^i)$ и удовлетворяет условию $\nabla(2)_n^{-2n+i}=0$ при $0\leqslant i<n$. Для любого $s\geqslant 3$ структура $D_\infty^{(s)}A_\infty$-коалгебры $(X_s,d_s^{i+s},\nabla(s)_n^{-sn+i})$ в члене X_s индуцирована применением следствия 3.4 к структуре $D_\infty^{(s-1)}A_\infty$-коалгебры в члене X_{s-1} и удовлетворяет условию $\nabla(s)_n^{-sn+i}=0$ при $0\leqslant i<n$.* $\square$

Следствие 3.10. *Пусть над полем задана произвольная стабильная* $D_\infty^{(1)}$*-коалгебра* (X, d^{i+1}, ∇^i)*, и пусть* $(X_s, d_s^{i+s}, \nabla(s)_n^{-sn+i})$ *— структура* $D_\infty^{(s)} A_\infty$*-коалгебры из следствия 3.9 в члене* (X_s, d_s)*,* $s \geqslant 2$*, спектральной последовательности* $D_\infty^{(1)}$*-модуля* (X, d^{i+1})*. Тогда* A_∞*-коалгебра гомологий* $H(X_s, d_s^{i+s}, \nabla(s)_n^{-sn+i})$ *стабильной* $D_\infty^{(s)} A_\infty$*-коалгебры* $(X_s, d_s^{i+s}, \nabla(s)_n^{-sn+i})$ *для каждого* $s \geqslant 2$ *изоморфна градуированной* A_∞*-коалгебре гомологий* $H(X, d^{i+1}, \nabla^i)$ *стабильной* $D_\infty^{(1)}$*-коалгебры* (X, d^{i+1}, ∇^i)*.* □

4. D_∞-дифференциальные A_∞-алгебры и спектральные последовательности дифференциальных алгебр с фильтрациями

В этом разделе устанавливается связь между дифференциальными алгебрами с (1)-фильтрациями и $D_\infty^{(1)}$-дифференциальными алгебрами. При помощи этой связи и гомотопической техники $D_\infty^{(s)} A_\infty$-алгебр определяется мультипликативная A_∞-структура в членах мультипликативной спектральной последовательности дифференциальной алгебры с (1)-фильтрацией над полем.

Определение 4.1. Дифференциальную алгебру X с фильтрацией $\{X^n\}$, т. е. дифференциальную алгебру (X, d, π), умножение $\pi\colon X \otimes X \to X$ которой удовлетворяет условию $\pi(X^k \otimes X^m) \subseteq X^{k+m}$, будем называть дифференциальной алгеброй с (1)-фильтрацией, если $\{X^n\}$ является (1)-фильтрацией дифференциального модуля X.

Определение 4.2. Дифференциальную коалгебру X с фильтрацией $\{X^n\}$, т. е. дифференциальную коалгебру (X, d, ∇), коумножение $\nabla\colon X \to X \otimes X$ которой удовлетворяет условию $\nabla(X^n) \subseteq \bigoplus\limits_{k+m=n} X^k \otimes X^m$, будем называть дифференциальной коалгеброй с (1)-фильтрацией, если $\{X^n\}$ является (1)-фильтрацией дифференциального модуля X.

Рассмотрим основные примеры дифференциальных (ко)алгебр с (1)-фильтрациями, которые далее будут нужны для топологических приложений.

Пример 4.1. Пусть X — произвольное симплициальное множество X, и пусть $\{X^n\}$ — фильтрация X его остовами [24]. Тогда коалгебра нормализованных цепей $N(X)$ симплициального множества X является дифференциальной коалгеброй с (1)-фильтрацией $\{N(X^n)\}$ и, следовательно, алгебра нормализованных коцепей $N^*(X)$ симплициального множества X является дифференциальной алгеброй с (1)-фильтрацией $\{N^*(X)^{-n}\}$, где $N^*(X)^{-n} = \big(N(X)/N(X^n)\big)^*$.

Пример 4.2. Пусть задано произвольное топологическое пространство X, и пусть $\{S(X)^n\}$ — фильтрация остовами симплициального множества $S(X)$

сингулярных симплексов этого топологического пространства [24]. Тогда коалгебра нормализованных сингулярных цепей $N(X)$ топологического пространства X является дифференциальной коалгеброй с (1)-фильтрацией $\{N(S(X)^n)\}$ и, следовательно, алгебра нормализованных коцепей $N^*(X)$ топологического пространства X является дифференциальной алгеброй с (1)-фильтрацией $\big\{N^*\big(S(X)\big)^{-n}\big\}$.

Пример 4.3. Пусть задано произвольное отображение симплициальных множеств $f\colon X \to Y$. Так как это отображение симплициальных множеств индуцирует отображение дифференциальных коалгебр $N(f)\colon N(X) \to N(Y)$ и так как $N(f)^{-1}\big(N(Y^n)\big) = N\big(f^{-1}(Y^n)\big)$, где $\{Y^n\}$ является фильтрацией симплициального множества Y его остовами, то коалгебра $N(X)$ является дифференциальной коалгеброй с (1)-фильтрацией $\big\{N(X)^n = N\big(f^{-1}(Y^n)\big)\big\}$ и, следовательно, алгебра нормализованных коцепей $N^*(X)$ симплициального множества X является дифференциальной алгеброй с (1)-фильтрацией $\{N^*(X)^{-n}\}$.

Пример 4.4. Пусть задано произвольное непрерывное отображение топологических пространств $f\colon X \to Y$. Так как это непрерывное отображение индуцирует отображение дифференциальных коалгебр $N(f)\colon N(X) \to N(Y)$ и так как имеет место равенство $N(f)^{-1}\big(N(S(Y)^n)\big) = N\big(S(f)^{-1}(S(Y)^n)\big)$, то коалгебра нормализованных цепей $N(X)$ топологического пространства X является дифференциальной коалгеброй с (1)-фильтрацией $\big\{N(X)^n = N\big(S(f)^{-1}(S(Y)^n)\big)\big\}$ и, следовательно, алгебра нормализованных коцепей $N^*(X)$ является дифференциальной алгеброй с (1)-фильтрацией $\{N^*(X)^{-n}\}$.

Пример 4.5. Пусть задано произвольное расслоение Серра $p\colon E \to B$. Так как проекция p этого расслоения является непрерывным отображением, то дифференциальная коалгебра $N(E)$ является дифференциальной коалгеброй с (1)-фильтрацией $\big\{N(E)^n = N\big(S(f)^{-1}(S(B)^n)\big)\big\}$ и, следовательно, алгебра $N^*(E)$ нормализованных коцепей пространства расслоения E является дифференциальной алгеброй с (1)-фильтрацией $\{N^*(E)^{-n}\}$.

Установим теперь связь между дифференциальными алгебрами с (1)-фильтрациями и $D_\infty^{(1)}$-алгебрами над полями. Пусть над полем задана произвольная дифференциальная алгебра (X, d, π) с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$. Тогда, как было показано в разделе 1, для заданного над полем дифференциального модуля (X, d) с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$ однозначно определён стабильный $D_\infty^{(1)}$-модуль (X, d^{i+1}). Обозначим через Z_X^k подмодуль градуированного модуля X^k, для которого имеет место разложение $X^k = Z_X^k \oplus X^{k-1}$. При помощи условия $\pi\big((X^k \otimes X^m)_\bullet\big) \subseteq X_\bullet^{k+m}$ определим стабильную $D_\infty^{(1)}$-алгебру (X, d^{i+1}, π^i), полагая

$$\pi^i = \bigoplus_{k,m\in\mathbb{Z}} \pi^i(k,m)\colon (X \otimes X)_\bullet \to X_\bullet, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad i \geqslant 0,$$

где отображение $\pi^i(k,m)\colon (Z_X^k \otimes Z_X^m)_\bullet \to (Z_X^{k+m-i})_\bullet$ является компонентой отображения

$$\pi\colon (Z_X^k \otimes Z_X^m)_\bullet \to X_\bullet^{k+m} = (Z_X^{k+m})_\bullet \oplus (Z_X^{k+m-1})_\bullet \oplus \ldots \oplus (Z_X^{k+m-i})_\bullet \oplus \ldots.$$

Ясно, что $D_\infty^{(1)}$-алгебра (X, d^{i+1}, π^i) является стабильной $D_\infty^{(1)}$-алгеброй, для которой суммарная дифференциальная алгебра совпадает с исходной дифференциальной алгеброй (X, d, π). Таким образом, получено следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Каждая заданная над полем дифференциальная алгебра (X, d, π) с (1)-фильтрацией однозначно определяет стабильную $D_\infty^{(1)}$-дифференциальную алгебру (X, d^{i+1}, π^i), для которой суммарная дифференциальная алгебра совпадает с (X, d, π).* $\square$

Двойственным образом для заданных над полями дифференциальных коалгебр с (1)-фильтрациями получаем следующее утверждение.

Предложение 4.2. *Каждая заданная над полем дифференциальная коалгебра (X, d, ∇) с (1)-фильтрацией однозначно определяет стабильную $D_\infty^{(1)}$-дифференциальную коалгебру (X, d^{i+1}, ∇^i), для которой суммарная дифференциальная коалгебра совпадает с (X, d, ∇).* $\square$

Рассмотрим теперь для произвольной дифференциальной алгебры (X, d, π) с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$ соответствующую ей мультипликативную спектральную последовательность $\{(X_s, d_s, \pi^{(s)})\}_{s\geqslant 1}$, где $\pi^{(s)}$ — ассоциативное умножение в члене X_s. Если заданная дифференциальная алгебра (X, d, π) с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$ рассматривается над полем, то из теоремы 1.4, следствий 3.7, 3.8 и предложения 4.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть над произвольным полем заданы произвольная дифференциальная алгебра (X, d, π) с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$ и мультипликативная спектральная последовательность $\{(X_s, d_s, \pi^{(s)})\}_{s\geqslant 1}$ этой дифференциальной алгебры с (1)-фильтрацией. Тогда*

1) *член X_1 этой спектральной последовательности имеет структуру стабильной $D_\infty^{(1)}$-алгебры $(X_1, d_1^{i+1}, \pi(1)^i)$, которая связана со структурой дифференциальной алгебры $(X_1, d_1, \pi^{(1)})$ в этом члене равенствами $d_1^1 = d_1$ и $\pi(1)^0 = \pi^{(1)}$;*
2) *для каждого номера $s \geqslant 2$ член X_s этой спектральной последовательности имеет структуру стабильной $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебры $(X_s, d_s^{i+s}, \pi(s)_n^{-sn+i})$, которая удовлетворяет условию $\pi(s)_n^{-sn+i} = 0$, $0 \leqslant i < n$, и связана со структурой дифференциальной алгебры $(X_s, d_s, \pi^{(s)})$ равенствами $d_s^s = d_s$ и $\pi(s)_0^0 = \pi^{(s)}$;*
3) *если (1)-фильтрация $\{X^n\}$ дифференциального модуля X является ограниченной снизу, то A_∞-алгебра гомологий $H(X_s)$ стабильной $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебры $(X_s, d_s^{i+s}, \pi(s)_n^{-sn+i})$ для каждого номера $s \geqslant 1$ изоморфна A_∞-алгебре гомологий $H(X)$ дифференциальной алгебры (X, d, π).* $\square$

Двойственным образом, если рассмотреть для дифференциальной коалгебры (X, d, ∇) с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$ соответствующую ей комультипликативную спектральную последовательность $\{(X_s, d_s, \nabla^{(s)})\}_{s\geqslant 1}$, где $\nabla^{(s)}$ является ассоциативным коумножением в члене X_s, то из теоремы 1.4, следствий 3.9, 3.10 и предложения 4.2 получаем следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть над произвольным полем заданы произвольная дифференциальная коалгебра (X, d, ∇) с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$ и комультипликативная спектральная последовательность $\{(X_s, d_s, \nabla^{(s)})\}_{s\geqslant 1}$ этой дифференциальной коалгебры с (1)-фильтрацией. Тогда*

1) *член X_1 этой спектральной последовательности имеет структуру стабильной $D_\infty^{(1)}$-коалгебры $(X_1, d_1^{i+1}, \nabla(1)^i)$, которая связана со структурой дифференциальной коалгебры $(X_1, d_1, \nabla^{(1)})$ в этом члене равенствами $d_1^1 = d_1$ и $\nabla(1)^0 = \nabla^{(1)}$;*
2) *для каждого номера $s \geqslant 2$ член X_s этой спектральной последовательности имеет структуру стабильной $D_\infty^{(s)}A_\infty$-коалгебры $(X_s, d_s^{i+s}, \nabla(s)_n^{-sn+i})$, которая удовлетворяет условию $\nabla(s)_n^{-sn+i} = 0$, $0 \leqslant i < n$, и связана со структурой дифференциальной коалгебры $(X_s, d_s, \nabla^{(s)})$ равенствами $d_s^s = d_s$ и $\nabla(s)_0^0 = \nabla^{(s)}$;*
3) *если (1)-фильтрация $\{X^n\}$ дифференциального модуля X является ограниченной снизу, то A_∞-коалгебра гомологий $H(X_s)$ стабильной $D_\infty^{(s)}A_\infty$-коалгебры $(X_s, d_s^{i+s}, \nabla(s)_n^{-sn+i})$ для каждого номера $s \geqslant 1$ изоморфна A_∞-коалгебре гомологий $H(X)$ дифференциальной коалгебры (X, d, ∇).* □

5. D_∞-дифференциальные A_∞-алгебры и спектральные последовательности расслоений

В этом разделе гомотопическая техника стабильных $D_\infty^{(s)}A_\infty$-алгебр применяется к мультипликативным когомологическим спектральным последовательностям расслоений и к комультипликативным гомологическим спектральным последовательностям расслоений.

Пусть $p\colon E \to B$ — произвольное расслоение Серра и $\{S(B)^n\}$ — фильтрация остовами симплициального множества $S(B)$ сингулярных симплексов базы B этого расслоения. Как было указано в разделе 4, дифференциальная коалгебра $N(E)$ является дифференциальной коалгеброй с (1)-фильтрацией $\{N(E)^n\}$, где $N(E)^n = N(S(p)^{-1}(S(B)^n))$. Двойственным образом дифференциальная алгебра $N^*(E)$ является дифференциальной алгеброй с (1)-фильтрацией $\{N^*(E)^{-n}\}$, $N^*(E)^{-n} = (N(E)/N(E)^n)^*$. Если дифференциальная алгебра $N^*(E)$ с (1)-фильтрацией $\{N^*(E)^{-n}\}$ задана над полем, то, применяя к ней теорему 4.1, получим следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Пусть* $p\colon E \to B$ — *произвольное расслоение Серра,* $(N^*(E), d, \pi)$ — *заданная над полем дифференциальная алгебра нормализованных коцепей тотального пространства этого расслоения и* $\{(X_s, d_s, \pi^{(s)})\}_{s\geqslant 1}$ — *мультипликативная когомологическая спектральная последовательность данного расслоения. Тогда*

1) *член* X_1 *этой спектральной последовательности имеет структуру стабильной* $D^{(1)}_\infty$*-алгебры* $(X_1, d^{i+1}_1, \pi(1)^i)$*, которая связана со структурой дифференциальной алгебры* $(X_1, d_1, \pi^{(1)})$ *в этом члене равенствами* $d^1_1 = d_1$ *и* $\pi(1)^0 = \pi^{(1)}$*;*
2) *для каждого номера* $s \geqslant 2$ *член* X_s *этой спектральной последовательности имеет структуру стабильной* $D^{(s)}_\infty A_\infty$*-алгебры* $(X_s, d^{i+s}_s, \pi(s)^{-sn+i}_n)$*, которая удовлетворяет условию* $\pi(s)^{-sn+i}_n = 0$*,* $0 \leqslant i < n$*, и связана со структурой дифференциальной алгебры* $(X_s, d_s, \pi^{(s)})$ *равенствами* $d^s_s = d_s$ *и* $\pi(s)^0_0 = \pi^{(s)}$*;*
3) A_∞*-алгебра гомологий* $H(X_s, d^{i+s}_s, \pi(s)^{-sn+i}_n)$ *стабильной* $D^{(s)}_\infty E_\infty$*-алгебры* $(X_s, d^{i+s}_s, \pi(s)^{-sn+i}_n)$ *для каждого номера* $s \geqslant 1$ *изоморфна* A_∞*-алгебре когомологий* $H^*(E)$ *тотального пространства* E *заданного расслоения.* □

Двойственным образом, если дифференциальная коалгебра нормализованных цепей $N(E)$ с фильтрацией $\{N(E)^n\}$ задана над полем, применяя к ней теорему 4.2, получим следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Пусть* $p\colon E \to B$ — *произвольное расслоение Серра,* $(N(E), d, \nabla)$ — *заданная над полем дифференциальная коалгебра нормализованных цепей тотального пространства этого расслоения и* $\{(X_s, d_s, \nabla^{(s)})\}_{s\geqslant 1}$ — *комультипликативная гомологическая спектральная последовательность данного расслоения. Тогда*

1) *член* X_1 *этой спектральной последовательности имеет структуру стабильной* $D^{(1)}_\infty$*-коалгебры* $(X_1, d^{i+1}_1, \nabla(1)^i)$*, которая связана со структурой дифференциальной коалгебры* $(X_1, d_1, \nabla^{(1)})$ *в этом члене равенствами* $d^1_1 = d_1$ *и* $\nabla(1)^0 = \nabla^{(1)}$*;*
2) *для каждого номера* $s \geqslant 2$ *член* X_s *этой спектральной последовательности имеет структуру стабильной* $D^{(s)}_\infty A_\infty$*-коалгебры* $(X_s, d^{i+s}_s, \nabla(s)^{-sn+i}_n)$*, которая удовлетворяет условию* $\nabla(s)^{-sn+i}_n = 0$*,* $0 \leqslant i < n$*, и связана со структурой дифференциальной коалгебры* $(X_s, d_s, \nabla^{(s)})$ *равенствами* $d^s_s = d_s$ *и* $\nabla(s)^0_0 = \nabla^{(s)}$*;*
3) A_∞*-коалгебра гомологий* $H(X_s, d^{i+s}_s, \nabla(s)^{-sn+i})$ *стабильной* $D^{(s)}_\infty E_\infty$*-коалгебры* $(X_s, d^{i+s}_s, \nabla(s)^{-sn+i})$ *для каждого номера* $s \geqslant 1$ *изоморфна* A_∞*-коалгебре гомологий* $H_*(E)$ *тотального пространства* E *заданного расслоения.* □

Напомним теперь, что операда Сташеффа (A_∞, γ) является операдой Хопфа [12], т. е. для операды $A_\infty = \{A_\infty(j)\}_{j\geqslant 1}$ в категории семейств дифференциальных модулей имеется ассоциативное коумножение $\nabla\colon A_\infty \to A_\infty \otimes A_\infty$, где $(A_\infty \otimes A_\infty)(j) = A_\infty(j) \otimes A_\infty(j)$, $j \geqslant 1$, которое является морфизмом операд. Из этого следует, что для любых дифференциальных A_∞-алгебр X и Y на тензорном произведении $X \otimes Y$ имеется структура дифференциальной A_∞-алгебры, определяемая коумножением $\nabla\colon A_\infty \to A_\infty \otimes A_\infty$ и структурами дифференциальных A_∞-алгебр на сомножителях тензорного произведения $X \otimes Y$.

Теорема 5.3. *Пусть $p\colon E \to B$ — произвольное расслоение Серра со слоем F, где $\pi_0(B) = 0$, $\pi_1(B) = 0$, и пусть $\{(X_s, d_s)\}_{s\geqslant 1}$ — заданная над полем когомологическая спектральная последовательность этого расслоения. Тогда второй член X_2, имеющий структуру $D_\infty^{(2)}A_\infty$-алгебры $(X_2, d_2^{i+2}, \pi(2)_n^{-2n+i})$, является, если его рассматривать как градуированную A_∞-алгебру $(X_2, \pi(2)_n^{-n})$, тензорным произведением A_∞-алгебры когомологий базы $H^*(B)$ и A_∞-алгебры когомологий слоя $H^*(F)$ данного расслоения.*

Доказательство. Так как гомотопические категории топологических пространств и симплициальных множеств являются эквивалентными [25], то доказательство теоремы достаточно провести в категории симплициальных множеств. Напомним, что указанную эквивалентность гомотопических категорий индуцируют функтор симплициального множества сингулярных симплексов топологического пространства и сопряжённый ему функтор геометрической реализации симплициального множества, которые соответственно переводят расслоения Серра в расслоения Кана [24] и расслоения Кана в расслоения Серра [1]. Напомним ещё [24], что каждое расслоение Кана симплициальных множеств $p\colon E \to B$ со слоем F и линейно связной базой B гомотопически эквивалентно симплициальной проекции $\mathrm{pr}\colon F \times_\tau B \to B$, где $F \times_\tau B$ — скрученное декартово произведение симплициальных множеств F и B относительно скручивающей функции $\tau\colon B_\bullet \to \mathrm{Aut}(F)_{\bullet-1}$. Из этого следует, что доказательство теоремы достаточно провести для когомологической спектральной последовательности скрученного декартова произведения симплициальных множеств [24].

Итак, пусть задано произвольное скрученное декартово произведение симплициальных множеств $F \times_\tau B$, где B — линейно связное и односвязное симплициальное множество. Рассмотрим над произвольным полем дифференциальную алгебру $(N^*(F \times_\tau B), d_\tau, \pi)$ нормализованных коцепей симплициального множества $F \times_\tau B$. Заметим, что $N^*(F \times_\tau B)$ является дифференциальной алгеброй с (1)-фильтрацией $\{N^*(F \times_\tau B)^{-n}\}_{n\geqslant 0}$, которая индуцирована фильтрацией $\{F \times_\tau B^n\}_{n\geqslant 0}$, где $\{B^n\}_{n\geqslant 0}$ — фильтрация симплициального множества B его остовами. Так как дифференциальная алгебра $N^*(F \times_\tau B)$ с (1)-фильтрацией $\{N^*(F \times_\tau B)^{-n}\}$ задана над полем, то однозначно определена соответствующая ей $D_\infty^{(1)}$-алгебра $(N^*(F \times_\tau B), d_\tau^{i+1}, \pi^i)$ и, в частности, определена дифференциальная алгебра $(N^*(F \times_\tau B), d_\tau^1, \pi^0)$. Аналогично, если рассмотреть декартово произведение указанных выше симплициальных множеств $F \times B$ с фильтрацией $\{F \times B^n\}_{n\geqslant 0}$, где $\{B^n\}_{n\geqslant 0}$ — фильтрация симплициального множества B его остовами, получим заданную над полем $D_\infty^{(1)}$-алгебру $(N^*(F \times B), d^{i+1}, \pi^i)$ и, в частности, дифференциальную алгебру $(N^*(F \times B), d^1, \pi^0)$. Заметим теперь, что дифференциальные алгебры $N^*(F \times_\tau B)$ и $N^*(F \times B)$ с указанными выше (1)-фильтрациями совпадают как градуированные алгебры с фильтрациями. Из этого получаем равенство $(N^*(F \times_\tau B), \pi^0) = (N^*(F \times B), \pi^0)$ градуированных алгебр. Обозначим градуированный модуль $N^*(F \times_\tau B) = N^*(F \times B)$ через X. Тогда для градуированной алгебры (X, π^0) имеем две дифференциальные алгебры (X, d_τ^1, π^0) и (X, d^1, π^0).

Покажем, что дифференциальные модули (X, d_τ^1) и (X, d^1) являются гомотопически эквивалентными. Для этого напомним [17, 24], что для рассматриваемого скрученного декартова произведения $F \times_\tau B$ имеется SDR-ситуация дифференциальных модулей

$$(N^*(F \times_\tau B), d_\tau) \rightleftarrows (N^*(F) \otimes_{\varphi^*} N^*(B), d_{\varphi^*}),$$

где $(N^*(F) \otimes_{\varphi^*} N^*(B), d_{\varphi^*})$ — скрещённое тензорное произведение относительно скрещивающей коцепи $\varphi^*\colon N^*_{-\bullet}\big(\mathrm{Aut}(F)\big) \to N^*_{-\bullet-1}(B)$, которая соответствует скручивающей функции $\tau\colon B_\bullet \to \mathrm{Aut}(F)_{\bullet-1}$. Если рассмотреть на дифференциальных модулях $N^*(F \times_\tau B)$ и $N^*(F) \otimes_{\varphi^*} N^*(B)$ соответственно указанную выше фильтрацию $\{N^*(F \times_\tau B)^{-n}\}$ и фильтрацию $\big\{\big(N^*(F) \otimes_{\varphi^*} N^*(B)\big)^{-n}\big\}$, где

$$\big(N^*(F) \otimes_{\varphi^*} N^*(B)\big)^{-n}_{-k} = \bigoplus_{m \leqslant n} N^*_{-k+m}(F) \otimes N^*_{-m}(B),$$

то SDR-ситуация $(N^*(F \times_\tau B), d_\tau) \rightleftarrows (N^*(F) \otimes_{\varphi^*} N^*(B), d_{\varphi^*})$, как показано в [17, 24], является SDR-ситуацией дифференциальных модулей с фильтрациями. От этой SDR-ситуации перейдём к SDR-ситуации дифференциальных модулей

$$(N^*(F \times_\tau B), d_\tau) \rightleftarrows (H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B), d_{\tilde{\varphi}^*}),$$

где $\tilde{\varphi}^*$ является A_∞-скрещивающей коцепью [2,11], которая соответствует скрещивающей коцепи φ^*. Легко убедиться, что SDR-ситуация дифференциальных модулей $(N^*(F \times_\tau B), d_\tau) \rightleftarrows (H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B), d_{\tilde{\varphi}^*})$, рассматриваемая относительно фильтраций $\{N^*(F \times_\tau B)^{-n}\}$ и $\big\{\big(H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B)\big)^{-n}\big\}$, где

$$\big(H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B)\big)^{-n}_{-k} = \bigoplus_{m \leqslant n} H^*_{-k+m}(F) \otimes N^*_{-m}(B),$$

является SDR-ситуацией дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями. Так как все рассматриваемые здесь модули заданы над полем, то SDR-ситуация дифференциальных модулей

$$(N^*(F \times_\tau B), d_\tau) \rightleftarrows (H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B), d_{\tilde{\varphi}^*})$$

с (1)-фильтрациями однозначно определяет SDR-ситуацию $D_\infty^{(1)}$-модулей

$$(N^*(F \times_\tau B), d_\tau^{i+1}) \rightleftarrows (H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B), d_{\tilde{\varphi}^*}^{i+1}).$$

В частности, определена SDR-ситуация дифференциальных модулей

$$(N^*(F \times_\tau B), d^1_\tau) \rightleftarrows (H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B), d^1_{\tilde{\varphi}^*}),$$

которую можно переписать в виде SDR-ситуации дифференциальных модулей

$$(N^*(F \times_\tau B), d^1_\tau) \rightleftarrows (H^*(F) \otimes N^*(B), 1 \otimes d),$$

поскольку

$$(H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B), d^1_{\tilde{\varphi}^*}) = (H^*(F) \otimes N^*(B), 1 \otimes d).$$

Применяя аналогичные рассуждения к SDR-ситуации Эйленберга—Зильбера для нормализованных коцепных комплексов с фильтрациями, получим SDR-ситуацию дифференциальных модулей

$$(N^*(F \times B), d^1) \rightleftarrows (H^*(F) \otimes N^*(B), 1 \otimes d).$$

При помощи последних двух рассмотренных SDR-ситуаций дифференциальных модулей получаем для дифференциальных модулей (X, d^1_τ) и (X, d^1) взаимообратные гомотопические эквивалентности

$$(X = N^*(F \times_\tau B), d^1_\tau) \rightleftarrows (X = N^*(F \times B), d^1).$$

Таким образом, для определённых выше дифференциальных алгебр (X, d^1_τ, π^0) и (X, d^1, π^0) дифференциальные модули (X, d^1_τ) и (X, d^1) являются гомотопически эквивалентными.

Покажем теперь, что дифференциальные алгебры (X, d^1_τ, π^0) и (X, d^1, π^0), если их рассматривать как дифференциальные A_∞-алгебры, являются гомотопически эквивалентными дифференциальными A_∞-алгебрами. Для этого сравним B_∞-конструкции $B_\infty(X, d^1_\tau, \pi^0)$ и $B_\infty(X, d^1, \pi^0)$ для дифференциальных алгебр (X, d^1_τ, π^0) и (X, d^1, π^0). Рассмотрим $B_\infty(X, d^1_\tau, \pi^0)$ и $B_\infty(X, d^1, \pi^0)$ как бикомплексы, у которых первый дифференциал определяется отображением π^0, а второй дифференциал определяется соответственно отображениями d^1_τ и d^1. Если вычислить спектральные последовательности бикомплексов $B_\infty(X, d^1_\tau, \pi^0)$ и $B_\infty(X, d^1, \pi^0)$, то получим, пользуясь гомотопической эквивалентностью дифференциальных модулей (X, d^1_τ) и (X, d^1), что соответствующие градуированные модули гомологий $H_\bullet\big(B_\infty(X, d^1_\tau, \pi^0)\big)$ и $H_\bullet\big(B_\infty(X, d^1, \pi^0)\big)$ являются изоморфными градуированными A_∞-коалгебрами. Из этого следует, что ко-B_∞-конструкции $F_\infty\big(H_\bullet\big(B_\infty(X, d^1_\tau, \pi^0)\big)\big)$ и $F_\infty\Big(H_\bullet\big(B_\infty(X, d^1, \pi^0)\big)\Big)$ являются изоморфными градуированными A_∞-алгебрами. Теперь заметим, что имеются гомотопические эквивалентности дифференциальных A_∞-алгебр

$$F_\infty B_\infty(X, d^1_\tau, \pi^0) \rightleftarrows F_\infty\Big(H_\bullet\big(B_\infty(X, d^1_\tau, \pi^0)\big)\Big),$$

$$F_\infty B_\infty(X, d^1, \pi^0) \rightleftarrows F_\infty\Big(H_\bullet\big(B_\infty(X, d^1, \pi^0)\big)\Big),$$

которые соответственно индуцированы гомологическими SDR-ситуациями дифференциальных A_∞-коалгебр

$$B_\infty(X, d^1_\tau, \pi^0) \rightleftarrows H_\bullet\big(B_\infty(X, d^1_\tau, \pi^0)\big), \quad B_\infty(X, d^1, \pi^0) \rightleftarrows H_\bullet\big(B_\infty(X, d^1, \pi^0)\big).$$

При помощи указанных выше гомотопических эквивалентностей дифференциальных A_∞-алгебр, а также учитывая изоморфность градуированных A_∞-алгебр $F_\infty\Big(H_\bullet\big(B_\infty(X, d^1_\tau, \pi^0)\big)\Big)$ и $F_\infty\Big(H_\bullet\big(B_\infty(X, d^1, \pi^0)\big)\Big)$, получаем гомотопическую эквивалентность дифференциальных A_∞-алгебр

$$F_\infty B_\infty(X, d^1_\tau, \pi^0) \rightleftarrows F_\infty B_\infty(X, d^1, \pi^0).$$

Из этой гомотопической эквивалентности дифференциальных A_∞-алгебр, пользуясь SDR-ситуациями дифференциальных A_∞-алгебр из теоремы 2.3

$$F_\infty B_\infty(X, d^1_\tau, \pi^0) \rightleftarrows (X, d^1_\tau, \pi^0), \quad F_\infty B_\infty(X, d^1_\tau, \pi^0) \rightleftarrows (X, d^1_\tau, \pi^0),$$

получаем, что дифференциальные алгебры $(X, d^1_\tau, \pi^0) = (N^*(F \times_\tau B), d^1_\tau, \pi^0)$ и $(X, d^1, \pi^0) = (N^*(F \times B), d^1, \pi^0)$ являются гомотопически эквивалентными дифференциальными A_∞-алгебрами.

Напомним теперь, что выше была построена SDR-ситуация дифференциальных модулей

$$(N^*(F \times B), d^1) \rightleftarrows (H^*(F) \otimes N^*(B), 1 \otimes d),$$

которая является, как легко убедиться, естественной в функториальном смысле. Так как все дифференциальные модули рассматриваются над полем, то эта естественная SDR-ситуация определяет естественную SDR-ситуацию дифференциальных модулей

$$(N^*(F \times B), d^1) \rightleftarrows (N^*(F) \otimes N^*(B), d^\otimes)$$

дифференциальных модулей, где $d^\otimes$ — стандартный дифференциал в тензорном произведении. Заметим теперь, что имеет место равенство дифференциальных модулей $(N(\Delta[n]), d) = (N(\Delta[n]), d^1)$, где $(N(\Delta[n]), d^1)$ — дифференциальный модуль, соответствующий нормализованному цепному комплексу $(N(\Delta[n]), d)$ стандартного n-мерного симплициального симплекса $\Delta[n]$, который рассматривается с фильтрацией $\{\Delta[n]^k\}_{k\geqslant 0}$ своими остовами. Из равенства дифференциальных модулей $(N(\Delta[n]), d) = (N(\Delta[n]), d^1)$ следует, как легко убедиться, равенство дифференциальных модулей

$$(N(\Delta[n] \times \Delta[n]), d) = (N(\Delta[n] \times \Delta[n]), d^1).$$

Здесь $(N(\Delta[n] \times \Delta[n]), d^1)$ — дифференциальный модуль, соответствующий нормализованному цепному комплексу $(N(\Delta[n] \times \Delta[n]), d)$ симплициального множества $\Delta[n] \times \Delta[n]$, которое рассматривается с фильтрацией $\{\Delta[n] \times \Delta[n]^k\}_{k\geqslant 0}$. При помощи равенства $(N(\Delta[n] \times \Delta[n]), d) = (N(\Delta[n] \times \Delta[n]), d^1)$ указанная выше естественная SDR-ситуация

$$(N^*(F \times B), d^1) \rightleftarrows (N^*(F) \otimes N^*(B), d^\otimes)$$

дифференциальных модулей методом ацикличных моделей стандартным образом продолжается до SDR-ситуации дифференциальных A_∞-алгебр

$$(N^*(F \times B), d^1, \pi^0) \rightleftarrows (N^*(F) \otimes N^*(B), d^\otimes, \pi),$$

где $(N^*(F) \otimes N^*(B), d^{\otimes}, \pi)$ — тензорное произведение дифференциальных алгебр $(N^*(F), d, \pi)$ и $(N^*(B), d, \pi)$. Из этой SDR-ситуации дифференциальных A_∞-алгебр получаем, учитывая построенную выше гомотопическую эквивалентность дифференциальных A_∞-алгебр $(N^*(F \times_\tau B), d^1_\tau, \pi^0)$ и $(N^*(F \times B), d^1, \pi^0)$, что дифференциальные алгебры $(N^*(F \times_\tau B), d^1_\tau, \pi^0)$ и $(N^*(F) \otimes N^*(B), d^{\otimes}, \pi)$ являются гомотопически эквивалентными дифференциальными A_∞-алгебрами.

Таким образом, член (X_1, d_1) когомологической спектральной последовательности $\{(X_s, d_s)\}_{s \geqslant 1}$ скрученного декартова произведения $F \times_\tau B$, где симплициальное множество B является линейно связным и односвязным, имеет структуру $D^{(1)}_\infty$-алгебры $(X_1, d^{i+1}_1, \pi(1)^i) = (N^*(F \times_\tau B), d^{i+1}_\tau, \pi^i)$, для которой дифференциальная A_∞-алгебра $(X_1,\, d_1 = d^1_1,\, \pi(1)^0) = (N^*(F \times_\tau B), d^1_\tau, \pi^0)$ является гомотопически эквивалентной дифференциальной A_∞-алгебре $(N^*(F) \otimes N^*(B), d^{\otimes}, \pi)$. Наличие этой гомотопической эквивалентности дифференциальных A_∞-алгебр говорит о том, что член X_2 спектральной последовательности $\{(X_s, d_s)\}_{s \geqslant 1}$ имеет структуру $D^{(2)}_\infty A_\infty$-алгебры $(X_2, d^{i+2}_2, \pi(2)^{-2n+i}_n)$, где $\pi(2)^{-2n+i}_n = 0$ при $0 \leqslant i < n$, для которой градуированная A_∞-алгебра $(X_2, \pi(2)^{-n}_n)$ является изоморфной тензорному произведению градуированной A_∞-алгебры когомологий базы $H^*(B)$ и градуированной A_∞-алгебры когомологий слоя $H^*(F)$ симплициального расслоения $\mathrm{pr}\colon F \times_\tau B \to B$. $\square$

Рассуждая двойственным образом, получим следующее утверждение о структуре градуированной A_∞-коалгебры на втором члене гомологической спектральной последовательности расслоения.

Теорема 5.4. *Пусть $p\colon E \to B$ — произвольное расслоение Серра со слоем F, где $\pi_0(B) = 0$, $\pi_1(B) = 0$, и пусть $\{(X_s, d_s)\}_{s \geqslant 1}$ — заданная над полем гомологическая спектральная последовательность этого расслоения. Тогда второй член X_2, имеющий структуру $D^{(2)}_\infty A_\infty$-коалгебры $(X_2, d^{i+2}_2, \nabla(2)^{-2n+i}_n)$, является, если его рассматривать как градуированную A_∞-коалгебру $(X_2, \nabla(2)^{-n}_n)$, тензорным произведением A_∞-коалгебры гомологий базы $H_*(B)$ и A_∞-коалгебры гомологий слоя $H_*(F)$ данного расслоения.* $\square$

В заключение раздела отметим, что утверждения теорем 5.1 и 5.3 являются обобщением на мультипликативные A_∞-структуры классических результатов Серра из [26] о мультипликативной структуре в членах когомологических спектральных последовательностей расслоений.

Литература

[1] Габриель П., Цисман М. Категории частных и теория гомотопий. — М.: Мир. 1971.

[2] Кадеишвили Т. В. К теории гомологий расслоённых пространств // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35. — С. 183—188.

[3] Лапин С. В. Дифференциальные возмущения и D_∞-дифференциальные модули // Мат. сб. — 2001. — Т. 192, № 11. — С. 55—76.

[4] Лапин С. В. D_∞-дифференциальные A_∞-алгебры и спектральные последовательности // Мат. сб. — 2002. — Т. 193, № 1. — С. 119—142.

[5] Лапин С. В. $(DA)_\infty$-модули над $(DA)_\infty$-алгебрами и спектральные последовательности // Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — Т. 66, № 3. — С. 103—130.

[6] Лапин С. В. D_∞-дифференциалы и A_∞-структуры в спектральных последовательностях // Соврем. мат. и её прил. — 2003. — Т. 1. — С. 56—91.

[7] Лапин С. В. D_∞-дифференциальные E_∞-алгебры и мультипликативные спектральные последовательности // Мат. сб. — 2005. — Т. 196, № 11. — С. 75—108.

[8] Лапин С. В. D_∞-дифференциальные E_∞-алгебры и операции Стинрода в спектральных последовательностях // Соврем. мат. и её прил. — 2006. — Т. 43. — С. 66—97.

[9] Лапин С. В. D_∞-дифференциальные E_∞-алгебры и спектральные последовательности D_∞-дифференциальных модулей // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 8. — С. 105—125.

[10] Лапин С. В. D_∞-дифференциальные E_∞-алгебры и спектральные последовательности расслоений // Мат. сб. — 2007. — Т. 198, № 10. — С. 3—30.

[11] Смирнов В. А. Гомологии расслоённых пространств // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35. — С. 227—230.

[12] Смирнов В. А. О коцепном комплексе топологического пространства // Мат. сб. — 1981. — Т. 115, № 1. — С. 146—158.

[13] Смирнов В. А. Гомотопическая теория коалгебр // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1985. — Т. 49, № 6. — С. 1302—1321.

[14] Смирнов В. А. Гомологии B-конструкций и ко-B-конструкций // Изв. РАН. Сер. мат. — 1994. — Т. 58, № 4. — С. 80—96.

[15] Смирнов В. А. Алгебры Ли над операдами и их применение в теории гомотопий // Изв. РАН. Сер. мат. — 1998. — Т. 62, № 3. — С. 121—154.

[16] Смирнов В. А. Симплициальные и операдные методы в алгебраической топологии. — М.: Факториал, 2002.

[17] Brown E. Twisted tensor products // Ann. Math. — 1959. — Vol. 69, no. 1. — P. 223—240.

[18] Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A., Stasheff J. D. Perturbation theory in differential homological algebra. I // Illinois J. Math. — 1989. — Vol. 33. — P. 566—582.

[19] Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A., Stasheff J. D. Perturbation theory in differential homological algebra. II // Illinois J. Math. — 1991. — Vol. 35. — P. 357—373.

[20] Gugenheim V. K. A. M., Stasheff J. D. On perturbations and A_∞-structures // Bull. Soc. Math. Belg. — 1986. — Vol. 38. — P. 237—246.

[21] Higher Homotopy Structures in Topology and Mathematical Physics. Proc. Int. Conf., June 13—15, 1996, Poughkeepsie, NY, USA, to Honor the 60th Birthday of Jim Stasheff / J. McCleary, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 1999. — (Contemp. Math., Vol. 227).

[22] Kontsevich M. Homological algebra of mirror symmetry // Proc. Int. Congress of Mathematicians, Zürich, Switzerland, August 3—11, 1994. Vol. 1. — Basel: Birkhäuser, 1995. — P. 120—139.

[23] Leray J. L'anneau spectral et l'anneau filtre d'homologie d'une espace localement compact et, d'une application continue // J. Math. Pures Appl. — 1950. — Vol. 29. — P. 1—139.

[24] May J. P. Simplicial Objects in Algebraic Topology. — Princeton: Van Nostrand, 1967.

[25] Quillen D. Homotopical Algebra. — Berlin: Springer, 1967. — (Lect. Notes Math.; Vol. 43).

[26] Serre J. P. Homologue singuliere des espaces fibres // Ann. Math. — 1951. — Vol. 54, no. 2. — P. 425—505.

[27] Stasheff J. D. Homotopy associativity of H-spaces. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. — 1963. — Vol. 108, no. 2. — P. 275—312.