О самопересечении подвижной линейной системы

А. В. ПУХЛИКОВ
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: pukh@mi.ras.ru

УДК 512.7

Ключевые слова: бирациональная жёсткость, лог-каноническая особенность, обращение присоединения, раздутие, дискрепантность.

Аннотация

В работе дано полное доказательство так называемого $8n^2$-неравенства, локального неравенства для самопересечения подвижной линейной системы в изолированном центре неканонической особенности.

Abstract

A. V. Pukhlikov, On the self-intersection of a movable linear system, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 6, pp. 177—192.

In this paper, a complete proof of the so called $8n^2$-inequality is given, a local inequality for the self-intersection of a movable linear system at an isolated center of a noncanonical singularity.

1. Постановка задачи и основной результат

Пусть $o \in X$ — росток гладкого многообразия размерности $\dim X \geqslant 4$. Пусть Σ — подвижная линейная система на X, а эффективный цикл

$$Z = (D_1 \circ D_2),$$

где $D_1, D_2 \in \Sigma$ — общие дивизоры, является её самопересечением. Раздуем точку o: $\varphi\colon X^+ \to X$, $E = \varphi^{-1}(o) \cong \mathbb{P}^{\dim X - 1}$ — исключительный дивизор. Собственный прообраз системы Σ и цикла Z на X^+ обозначаем через Σ^+ и Z^+ соответственно.

Теорема ($8n^2$-неравенство). *Предположим, что пара* $\left(X, \frac{1}{n}\Sigma\right)$ *неканонична, но канонична вне точки* o, *где* n — *некоторое положительное число. Существует линейное подпространство* $P \subset E$ *коразмерности* 2 (*относительно* E), *такое что выполнено неравенство*

$$\operatorname{mult}_o Z + \operatorname{mult}_P Z^+ > 8n^2.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 6, с. 177—192.

Цель настоящей работы — дать полное доказательство этой теоремы. Эквивалентное, но громоздко формулируемое утверждение неоднократно публиковалось И. А. Чельцовым [9, 10, 12], однако в его доказательстве имеется существенный пробел (который мы объясним ниже, в разделе 4). Кроме того, $8n^2$-неравенство фактически использовалось в [1], где содержится аналогичный пробел. Таким образом, теоремы о бирациональной (сверх)жёсткости (основные определения см. в разделе 2) многообразий Фано степени 6, 7 и 8 в [1, 9, 10, 12] нельзя считать доказанными. Данная работа посвящена восполнению и объяснению упомянутого пробела.

Отметим, что $8n^2$-неравенство можно рассматривать как обобщение известного $4n^2$-неравенства

$$\operatorname{mult}_o Z > 4n^2$$

в тех же предположениях при $\dim X \geqslant 3$. $4n^2$-неравенство — хорошо известный фундаментальный результат бирациональной геометрии (см., например, [8]), восходящий к классической работе В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трёхмерной квартике [2]. Кроме того, $8n^2$-неравенство можно рассматривать как аналог для коразмерности 2 известного неравенства для дивизоров

$$\operatorname{mult}_o \Sigma + \operatorname{mult}_\Lambda \Sigma^+ > 2n,$$

где $\Lambda \subset E$ — некоторая гиперплоскость [7].

2. Бирационально жёсткие многообразия

В данном разделе приведены определения понятий «бирациональная жёсткость» и «бирациональная сверхжёсткость» и перечислены основные примеры бирационально (сверх)жёстких многообразий. Теория бирациональной жёсткости является основным полем приложения $8n^2$-неравенства. Обозначения этого раздела не зависят от обозначений раздела 1 и остальной части работы.

Напомним, что гладкое проективное рационально связное многообразие X удовлетворяет классическому условию обрыва присоединения канонического класса: для любого эффективного дивизора D линейная система $|D + mK_X|$ пуста при $m \gg 0$, поскольку K_X отрицателен на любом семействе рациональных кривых, заметающих X, а эффективный дивизор неотрицателен на любом таком семействе. Чтобы точно зафиксировать момент обрыва, рассмотрим группу Пикара $A^1X = \operatorname{Pic} X$, положим $A^1_{\mathbb{R}}X = A^1X \otimes \mathbb{R}$ и определим конусы $A^1_+X \subset A^1_{\mathbb{R}}X$ *псевдоэффективных* классов и $A^1_{\mathrm{mov}}X \subset A^1_{\mathbb{R}}X$ *подвижных* классов как замкнутые (в обычной вещественной топологии $A^1_{\mathbb{R}}X \cong \mathbb{R}^k$) конусы, порождённые классами эффективных дивизоров и подвижных дивизоров (т. е. дивизоров в линейных системах без неподвижных компонент) соответственно.

Определение 1. *Порог канонического присоединения* дивизора D на многообразии X есть число $c(D, X) = \sup\{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \mid D + \varepsilon K_X \in A^1_+X\}$. Если Σ — непустая линейная система на X, полагаем $c(\Sigma, X) = c(D, X)$, где $D \in \Sigma$ — произвольный дивизор.

Пример 1.

1. Пусть X — *примитивное многообразие Фано*, т. е. гладкое проективное многообразие с обильным антиканоническим классом, $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}K_X$. Для любого эффективного дивизора D имеем $D \in |-nK_X|$ для некоторого $n \geqslant 1$, так что $c(D, X) = n$. Если заменить условие $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}K_X$ более слабым условием $\operatorname{rk} \operatorname{Pic} X = 1$, т. е. $K_X = -rH$, где $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}H$, $r \geqslant 2$ — индекс многообразия X, то для $D \in |nH|$ получаем $c(D, X) = \frac{n}{r}$.

Это тривиальный пример, потому что пространство $A^1_{\mathbb{R}} X \cong \mathbb{R}$ одномерно и $A^1_+ X = \mathbb{R}_+$ есть положительный луч, $K_X \in \mathbb{R}_-$.

2. Пусть $\pi\colon V \to S$ — рационально связное расслоение, $\dim V > \dim S \geqslant 1$, Δ — эффективный дивизор на базе S. Очевидно, $c(\pi^*\Delta, V) = 0$. Если $\operatorname{Pic} V = \mathbb{Z}K_V \oplus \pi^* \operatorname{Pic} S$, т. е. V/S — стандартное расслоение Фано, и D — эффективный дивизор на V, который не поднят с базы S, то $D \in |-nK_V + \pi^* R|$ для некоторого дивизора R на S, где $n \geqslant 1$. Очевидно, $c(D, V) \leqslant n$. Более того, если дивизор R эффективен, то $c(D, V) = n$. В самом деле, K_V отрицателен на слоях морфизма π (в частности, на плотных семействах рациональных кривых, заметающих слои проекции π), в то время как любой дивизор, поднятый с базы, тривиален на слоях.

Порог канонического присоединения легко вычисляется, однако главный недостаток этого понятия — его бирациональная неинвариантность.

Определение 2. Для подвижной линейной системы Σ на многообразии X определим *виртуальный порог канонического присоединения* формулой

$$c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) = \inf_{X^\sharp \to X} \{c(\Sigma^\sharp, X^\sharp)\},$$

где точная нижняя грань берётся по всем бирациональным морфизмам $X^\sharp \to X$, $X^\sharp$ — гладкая проективная модель $\mathbb{C}(X)$, $\Sigma^\sharp$ — собственный прообраз системы Σ на $X^\sharp$.

Виртуальный порог очевидным образом есть бирациональный инвариант пары (X, Σ): если $\chi\colon X \dashrightarrow X^+$ — бирациональное отображение, $\Sigma^+ = \chi_*\Sigma$ — собственный прообраз системы Σ относительно χ^{-1}, то получаем

$$c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) = c_{\mathrm{virt}}(\Sigma^+).$$

Предложение 1.

1. *Предположим, что на многообразии V нет подвижных линейных систем с нулевым виртуальным порогом канонического присоединения. Тогда на V нет структур нетривиального расслоения на многообразия отрицательной кодаировой размерности, т. е. не существует рационального доминантного отображения $\rho\colon V \dashrightarrow S$, $\dim S \geqslant 1$, общий слой которого имеет отрицательную кодаирову размерность.*
2. *Пусть $\pi\colon V \to S$ — рационально связное расслоение. Предположим, что каждая подвижная линейная система Σ на V с нулевым виртуальным порогом канонического присоединения, $c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) = 0$, есть прообраз системы*

на базе: $\Sigma = \pi^*\Lambda$, *где* Λ — *некоторая подвижная линейная система на* S. *Тогда любое бирациональное отображение*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "\chi"] \arrow[d, "\pi"'] & V^\sharp \arrow[d, "\pi^\sharp"] \\ S & S^\sharp \end{tikzcd}, \tag{1}$$

где $\pi^\sharp\colon V^\sharp \to S^\sharp$ — *расслоение на многообразия отрицательной кодаировой размерности, является послойным, т. е. существует рациональное доминантное отображение* $\rho\colon S \dashrightarrow S^\sharp$, *превращающее диаграмму* (1) *в коммутативную,* $\pi^\sharp \circ \chi = \rho \circ \pi$.

Таким образом, для некоторых рационально связных многообразий виртуальный порог канонического присоединения сводит проблему описания множества структур рационально связных расслоений на V к такой же проблеме для базы S. Это ключевой шаг, во многих случаях ведущий к исчерпывающему описанию этого множества. Но главный недостаток виртуальных порогов состоит в том, что их очень трудно вычислять.

Определение 3.

1. Многообразие V называется *бирационально сверхжёстким*, если для любой подвижной линейной системы Σ на V выполнено равенство
$$c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma, V).$$
2. Многообразие V (расслоение Фано V/S) называется *бирационально жёстким*, если для любой подвижной линейной системы Σ на V существует бирациональный автоморфизм $\chi \in \mathrm{Bir}\, V$ (соответственно послойный бирациональный автоморфизм $\chi \in \mathrm{Bir}(V/S)$), обеспечивающий равенство
$$c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) = c(\chi_*\Sigma, V).$$

В следующих примерах перечислены основные классы многообразий и расслоений Фано, для которых сегодня известна бирациональная жёсткость или сверхжёсткость.

Пример 2.

1. Гладкая трёхмерная квартика $V = V_4 \subset \mathbb{P}^4$ бирационально сверхжёсткая, что немедленно следует из рассуждений в [2].

2. Общее гладкое полное пересечение $V_{2\cdot 3} \subset \mathbb{P}^5$ кубической гиперповерхности и квадрики бирационально жёсткое, но не сверхжёсткое [8, 14]. Описание его группы бирациональных автоморфизмов см. в [8, 14].

3. Общая гиперповерхность $V_d \subset \mathbb{P}^d$ при $d \geqslant 5$ бирационально сверхжёсткая [17] (при $d \in \{5, 6, 7, 8\}$ это верно для любой гладкой гиперповерхности,

см. [16] для $d = 5$ и [1] для остальных трёх значений; мы учитываем теорему, доказываемую в настоящей работе ниже). Общее полное пересечение $V_{d_1\cdot\ldots\cdot d_k} \subset \mathbb{P}^{M+k}$ индекса единица (т. е. $d_1 + \ldots + d_k = M + k$) и размерности $M \geqslant 4$ бирационально сверхжёсткое при $M \geqslant 2k + 1$ [18].

4. Первыми примерами бирационально сверхжёстких многообразий Фано произвольной размерности были двойные пространства $\sigma\colon V \stackrel{2:1}{\to} \mathbb{P}^M$, $M \geqslant 4$, разветвлённые над гладкой гиперповерхностью $W_{2M} \subset \mathbb{P}^M$ степени $2M$, и двойные квадрики $\sigma\colon V \stackrel{2:1}{\to} Q \subset \mathbb{P}^{M+1}$, $M \geqslant 4$, разветвлённые над гладким полным пересечением $W = Q \cap W^*_{2(M-1)}$, $W^*_{2(M-1)} \subset \mathbb{P}^{M+1}$ — гиперповерхность степени $2(M-1)$ [3].

5. Обобщим предыдущий пример. Пусть $\sigma\colon V \to Q \subset \mathbb{P}^{M+1}$ — двойное накрытие, где $Q = Q_m \subset \mathbb{P}^{M+1}$ — гладкая гиперповерхность степени m, а дивизор ветвления $W \subset Q$ высекается на Q гиперповерхностью $W^*_{2l} \subset \mathbb{P}^{M+1}$, где $m + l = M + 1$. Многообразие V бирационально сверхжёсткое для общих Q, W^* [5]. Вместо двойного накрытия можно рассмотреть произвольное циклическое накрытие, вместо гиперповерхности $Q \subset \mathbb{P}^{M+1}$ — гладкое полное пересечение $Q \subset \mathbb{P}^{M+k}$ подходящего индекса и коразмерности $k < \frac{1}{2}M$. Общее многообразие в этих классах бирационально сверхжёсткое [19]. Другой пример дают итерированные двойные накрытия [6]. Все многообразия данного примера реализуются как полные пересечения Фано во взвешенных проективных пространствах.

Гипотеза. Гладкое полное пересечение Фано индекса единица и размерности не меньше 4 во взвешенном проективном пространстве бирационально жёсткое, размерности не меньше 5 бирационально сверхжёсткое.

В заключение ещё раз напомним, что для примитивного многообразия Фано бирациональная (сверх)жёсткость немедленно влечёт отсутствие нетривиальных структур рационально связного расслоения.

В [1, 9, 10, 12] $8n^2$-неравенство использовалось для доказательства бирациональной (сверх)жёсткости гладких многообразий Фано степени 6, 7, 8: гиперповерхностей $V_d \subset \mathbb{P}^d$, $d = 6, 7, 8$, двойных кубик и двойных квартик индекса 1, а также общих полных пересечений квадрики и квартики в $\mathbb{P}^6$. Как отмечено выше в примере 2, бирациональная сверхжёсткость *общего* многообразия в каждом из этих семейств была известна ранее. $8n^2$-неравенство позволяло усилить эти результаты, заменяя общее многообразие в семействе произвольным гладким. С этими приложениями, главным образом, и связан интерес к этому неравенству.

Подробности того, как $8n^2$-неравенство используется в доказательстве бирациональной сверхжёсткости, см. в [1, 9, 10, 12]: оно позволяет исключить бесконечно близкие максимальные особенности подвижных линейных систем (если антиканоническая степень многообразия не превосходит 8). Отметим, что в общем случае полных пересечений Фано произвольной размерности $8n^2$-неравенство ничего нового не даёт.

3. Начало доказательства теоремы

В этом разделе мы следуем работам [9, 12]. В обозначениях раздела 1, если $\operatorname{mult}_o Z > 8n^2$, то в качестве P можно взять любое подпространство коразмерности два в E. Если же $\operatorname{mult}_o Z \leqslant 8n^2$, то подпространство P определено однозначно. Это легко следует из принципа связности Шокурова—Коллара [11, 15].

Ограничивая Σ на росток гладкого общего подмногообразия, содержащего точку o, можно считать, что $\dim X = 4$. Более того, можно предполагать, что $\nu = \operatorname{mult}_o Z \leqslant 2\sqrt{2}n < 3n$, иначе $\operatorname{mult}_o Z \geqslant \nu^2 > 8n^2$ и доказывать нечего.

Лемма 1. *Пара*

$$\left(X^+, \frac{1}{n}\Sigma^+ + \frac{\nu - 2n}{n}E\right) \tag{2}$$

не-лог-канонична, и центр любой её не-лог-канонической особенности содержится в исключительном дивизоре E.

Доказательство. Пусть $\lambda\colon \tilde{X} \to X$ — разрешение особенностей пары $(X, \frac{1}{n}\Sigma)$ и $E^* \subset \tilde{X}$ — простой исключительный дивизор, реализующий неканоническую особенность этой пары. Тогда $\lambda(E^*) = o$ и выполнено неравенство Нётера—Фано

$$\nu_{E^*}(\Sigma) > na(E^*).$$

Для общего дивизора $D \in \Sigma$ имеем $\varphi^* D = D^+ + \nu E$, так что

$$\nu_{E^*}(\Sigma) = \nu_{E^*}(\Sigma^+) + \nu \cdot \nu_{E^*}(E)$$

и

$$a(E^*, X) = a(E^*, X^+) + 3\nu_{E^*}(E).$$

Отсюда получаем

$$\nu_{E^*}\left(\frac{1}{n}\Sigma^+ + \frac{\nu - 2n}{n}E\right) = \nu_{E^*}\left(\frac{1}{n}\Sigma\right) - 2\nu_{E^*}(E) >$$
$$> a(E^*, X^+) + \nu_{E^*}(E) \geqslant a(E^*, X^+) + 1,$$

что и доказывает лемму. □

Пусть $R \ni o$ — общий трёхмерный росток, $R^+ \subset X^+$ — его собственный прообраз на раздутии точки o. Для малого $\varepsilon > 0$ пара

$$\left(X^+, \frac{1}{1+\varepsilon}\frac{1}{n}\Sigma^+ + \frac{\nu - 2n}{n}E + R^+\right)$$

всё ещё удовлетворяет условию принципа связности (относительно морфизма $\varphi\colon X^+ \to X$), так что множество центров не-лог-канонических особенностей этой пары связно в окрестности исключительного дивизора E. Поскольку R^+ — не-лог-каноническая особенность, получаем, что найдётся не-лог-каноническая особенность пары (2), центр которой на X^+ имеет положительную размерность, так как пересекает R^+.

Пусть $Y \subset E$ — центр не-лог-канонической особенности пары (2), имеющий максимальную размерность.

Если $\dim Y = 2$, то рассмотрим общий двумерный росток S, трансверсально пересекающий Y в точке общего положения. Ограничение пары (2) на S не-лог-канонично в этой точке, так что, применяя доказываемое ниже предложение 2, убеждаемся, что

$$\operatorname{mult}_Y(D_1^+ \circ D_2^+) > 4\left(3 - \frac{\nu}{n}\right)n^2,$$

поэтому

$$\operatorname{mult}_o Z \geqslant \nu^2 + \operatorname{mult}_Y(D_1^+ \circ D_2^+)\deg Y > (\nu - 2n)^2 + 8n^2,$$

что и требовалось.

Если $\dim Y = 1$, то, поскольку пара

$$\left(R^+, \frac{1}{1+\varepsilon}\frac{1}{n}\Sigma_R^+ + \frac{\nu - 2n}{n}E_R\right), \tag{3}$$

где $\Sigma_R^+ = \Sigma^+|_{R^+}$ и $E_R = E|_{R^+}$, удовлетворяет условию принципа связности и R^+ пересекает Y в $\deg Y$ различных точках, заключаем, что $Y \subset E$ — прямая в $\mathbb{P}^3$.

Теперь необходимо различать два случая: когда $\nu \geqslant 2n$ и когда $\nu < 2n$. Методы доказательства $8n^2$-неравенства в этих двух случаях совершенно различны. Рассмотрим сначала случай $\nu \geqslant 2n$.

Выберем в качестве $R \ni o$ общий трёхмерный росток, удовлетворяющий условию $R^+ \supset Y$. Поскольку пара (2) эффективная (напомним, $\nu \geqslant 2n$), можно применить обращение присоединения [15, гл. 17] и заключить, что пара (3) не является лог-канонической в Y.

Теперь, применяя к паре (3) (где $R^+ \supset Y$) предложение 2 так, как это было сделано при $\dim Y = 2$, получаем неравенство

$$\operatorname{mult}_Y(D_1^+|_{R^+} \circ D_2^+|_{R^+}) > 4\left(3 - \frac{\nu}{n}\right)n^2.$$

Слева в скобках стоит самопересечение подвижной линейной системы Σ_R^+, которое раскладывается на две естественные компоненты:

$$(D_1^+|_{R^+} \circ D_2^+|_{R^+}) = Z_R^+ + Z_R^{(1)},$$

где Z_R^+ — собственный прообраз цикла $Z_R = Z|_R$ на R^+ и носитель цикла $Z_R^{(1)}$ содержится в E_R. Прямая Y есть компонента эффективного 1-цикла $Z_R^{(1)}$.

С другой стороны, для самопересечения подвижной линейной системы Σ^+ имеем

$$(D_1^+ \circ D_2^+) = Z^+ + Z_1,$$

где носитель цикла Z_1 содержится в E. Из общности R следует, что вне прямой Y циклы $Z_R^{(1)}$ и $Z_1|_{R^+}$ совпадают, а для Y получаем равенство

$$\operatorname{mult}_Y Z_R^{(1)} = \operatorname{mult}_Y Z^+ + \operatorname{mult}_Y Z_1.$$

Однако $\mathrm{mult}_Y\, Z_1 \leqslant \deg Z_1$, так что

$$\mathrm{mult}_o\, Z + \mathrm{mult}_Y\, Z^+ = \nu^2 + \deg Z_1 + \mathrm{mult}_Y\, Z^+ \geqslant \nu^2 + \mathrm{mult}_Y\, Z_R^{(1)} > 8n^2,$$

что и требовалось. Этим разбор случая $\nu \geqslant 2n$ завершён.

Отметим, что эффективность пары (2) — ключевой момент в этом рассуждении. При $\nu < 2n$ обращение присоединения (так, как это сделано в [1]) применить нельзя. Дополнительные рассуждения в [9, 12], обосновывающие обращение присоединения специально для этой пары при $\nu < 2n$, неверны.

4. Ошибки в работах [9, 12]

Наиболее подробное доказательство $8n^2$-неравенства приведено в [12], на эту работу мы и будем ссылаться (номера страниц и утверждений соответствуют архивной версии, указанной в библиографической ссылке [12]).

Ошибка 1 (см. с. 6, сразу после доказательства леммы 27). Утверждение, что «пересечение дивизора S с кривой C либо тривиально, либо состоит из более чем одной точки», неверно. Дивизор F содержит трёхмерное семейство гладких рациональных кривых, трансверсально пересекающих общий дивизор S в одной точке. А именно, поверхность $\bar{E}\cap F$ (в $E \cong \mathbb{P}^3$ раздувается прямая L, и $\bar{E}\cap F$ — исключительный дивизор) есть $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, так что любая кривая C бистепени $(1,1)$ пересекает дивизор S ровно в одной точке. Эта ошибка может быть исправлена, например, таким образом: ограничим линейную систему на исключительный дивизор E. Легко показать, что в случае кривой бистепени $(1,1)$ имеет место неравенство $\nu > 2n$, так что можно применить обращение присоединения.

Ошибка 2 (см. с. 5). Следствие 24 неверно. Пересечение $S\cap C$ вполне может быть пусто.

В самом деле, из следующих двух фактов:

а) множество $\mathrm{LCS}(S, (B^W+\bar{E}+2F)|_S)$ состоит из точки или содержит кривую (что выводится из принципа связности [12, теорема 14]),

б) имеется кривая C, сечение расслоения $F \to L$, такая что C есть единственный элемент множества $\mathrm{LCS}(W, B^W + \bar{E} + aF)$, $a = 1, 2$, который содержится в F и доминирует над L (чуть выше, с. 5),

не следует, что $\mathrm{LCS}(S, (B^W+\bar{E}+2F)|_S)$ есть пересечение $S\cap C$ (а именно таким образом доказывается следствие 24), потому что $\mathrm{LCS}(S, (B^W+\bar{E}+2F)|_S)$ вполне может быть пересечением S с центром не-лог-канонической особенности пары $(W, B^W + \bar{E} + 2F)$, который *не* доминирует над L, например с прямой в слое расслоения $F \to L$ (это $\mathbb{P}^2$-расслоение над L). В частности, если множество $\mathrm{LCS}(W, B^W + \bar{E} + aF)$, $a = 1, 2$, есть связное объединение двух кривых:

1) прямой в слое $F \to L$,

2) кривой типа $(1,0)$ на поверхности $\bar{E}\cap F$, которая есть $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, т. е. сечения $F \to L$, содержащегося в $\bar{E}\cap F$ и имеющего нулевое самопересечение на этой поверхности,

то а) и б) выполнены, но никакого противоречия нет. «Доказательство» следствия 24 в [12] — очевидная логическая ошибка, когда (справедливое) утверждение «центр любой особенности, *доминирующей* над L, есть C» используется фактически как утверждение «центр любой особенности есть C». Приведённый выше пример показывает, что рассуждения [12] ошибочны и не дают доказательства $8n^2$-неравенства. (В [9] приведены те же самые рассуждения, которые используются в [12] для доказательства утверждения б), после чего утверждается, что C — единственный элемент множества $\mathrm{LCS}(\ldots)$, вообще без упоминания о доминировании. Ошибка автора здесь более очевидна.)

5. Завершение доказательства теоремы

Далее пользуемся всеми обозначениями раздела 3 и предполагаем, что $\nu < 2n$.

Рассмотрим снова пару (3) для общего ростка $R \ni o$. Пусть $y = Y \cap R^+$ — точка (трансверсального) пересечения прямой Y и многообразия R^+. Поскольку $a(E_R, R) = 2$, из того, что пара (3) не является лог-канонической в точке y, следует, что пара $(R, \frac{1}{n}\Sigma_R)$ не является лог-канонической в точке o, причём центр некоторой не-лог-канонической (т. е. лог-максимальной) особенности на R^+ есть точка y.

Теперь $8n^2$-неравенство вытекает из следующего факта.

Лемма 2. *Имеет место неравенство*

$$\mathrm{mult}_o Z_R + \mathrm{mult}_y Z_R^+ > 8n^2,$$

где Z_R — самопересечение подвижной линейной системы Σ_R и Z_R^+ — его собственный прообраз на R^+.

Доказательство. Рассмотрим разрешение максимальной особенности системы Σ_R, центр которой на R^+ есть точка y:

$$\begin{array}{ccc} R_i & \xrightarrow{\psi_i} & R_{i-1} \\ \cup & & \cup \\ E_i & & B_{i-1}, \end{array}$$

где B_{i-1} — центр особенности на R_{i-1}, $R_0 = R$, $R_1 = R^+$, $E_i = \psi_i^{-1}(B_{i-1})$ — исключительный дивизор, $B_0 = o$, $B_1 = y \in E_1$, $i = 1, \ldots, N$, причём первые L раздутий соответствуют точкам, при $i \geqslant L + 1$ раздуваются кривые. Поскольку

$$\mathrm{mult}_o \Sigma_R = \mathrm{mult}_o \Sigma < 2n,$$

имеем $L < N$, $B_L \subset E_L \cong \mathbb{P}^2$ — прямая и при $i \geqslant L + 1$

$$\deg[\psi_i|_{B_i} \colon B_i \to B_{i-1}] = 1,$$

т. е. $B_i \subset E_i$ — сечение линейчатой поверхности E_i. Рассмотрим граф последовательности раздутий ψ_i.

Лемма 3. *Вершины $L+1$ и $L-1$ не соединены стрелкой*: $L+1 \nrightarrow L-1$.

Доказательство. Предположим противное: $L+1 \to L-1$. Это означает, что $B_L = E_L \cap E^L_{L-1}$ — исключительная прямая на поверхности E^L_{L-1}, а отображение $E^{L+1}_{L-1} \to E^L_{L-1}$ — изоморфизм. Как обычно, положим

$$\nu_i = \mathrm{mult}_{B_{i-1}} \Sigma^{i-1}_R, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Ограничим подвижную линейную систему Σ^{L+1}_R на поверхность E^{L+1}_{L-1} (т. е. на плоскость $E_{L-1} \cong \mathbb{P}^2$ с раздутой точкой B_{L-1}). Получим непустую (но, конечно, не обязательно подвижную) линейную систему, которая есть подсистема полной линейной системы

$$|\nu_{L-1}(-E_{L-1}|_{E_{L-1}}) - (\nu_L + \nu_{L+1})B_L|.$$

Поскольку $(-E_{L-1}|_{E_{L-1}})$ — класс прямой на плоскости E_{L-1}, отсюда следует, что

$$\nu_{L-1} \geqslant \nu_L + \nu_{L+1} > 2n,$$

так что тем более $\nu_1 = \nu > 2n$. Противоречие. Лемма 3 доказана. □

Положим, как обычно,

$$m_i = \mathrm{mult}_{B_{i-1}}(Z_R)^{i-1}, \quad i = 1, \ldots, L,$$

так что, в частности,

$$m_1 = \mathrm{mult}_o Z_R, \quad m_2 = \mathrm{mult}_y Z^+_R.$$

Пусть $p_i \geqslant 1$ — число путей в графе последовательности раздутий ψ_i из вершины N в вершину i и $p_N = 1$ по определению. По доказанному

$$p_N = p_{N-1} = \ldots = p_L = p_{L-1} = 1,$$

и число путей p_i для $i \leqslant L$ есть число путей из вершины L в вершину i. Согласно технике подсчёта кратностей [8] имеем неравенство

$$\sum_{i=1}^{L} p_i m_i \geqslant \sum_{i=1}^{N} p_i \nu_i^2,$$

кроме того, справедливо неравенство Нётера—Фано

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \nu_i > n\biggl(2\sum_{i=1}^{L} p_i + \sum_{i=L+1}^{N} p_i\biggr).$$

(На самом деле справедливо несколько более сильное неравенство — *лог-неравенство* Нётера—Фано, — но нам это не нужно.) Из последних двух оценок стандартным образом [8] выводится неравенство

$$\sum_{i=1}^{L} p_i m_i > \frac{(2\Sigma_0 + \Sigma_1)^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1} n^2,$$

где

$$\Sigma_0 = \sum_{i=1}^{L} p_i, \quad \Sigma_1 = \sum_{i=L+1}^{N} p_i = N - L.$$

Учитывая, что при $i \geqslant 2$ имеем $m_i \leqslant m_2$, и принимая во внимание очевидное неравенство $(2\Sigma_0 + \Sigma_1)^2 > 4\Sigma_0(\Sigma_0 + \Sigma_1)$, получаем оценку

$$p_1 m_1 + (\Sigma_0 - p_1) m_2 > 4n^2 \Sigma_0.$$

Предположим теперь, что утверждение леммы неверно:

$$m_1 + m_2 \leqslant 8n^2.$$

Лемма 4. *Имеет место неравенство* $\Sigma_0 \geqslant 2p_1$.

Доказательство. По определению

$$p_1 = \sum_{i \to 1} p_i,$$

однако в силу леммы 3 из $i \to 1$ следует, что $i \leqslant L$, так что $p_1 \leqslant \Sigma_0 - p_1$, что и требуется. Лемма доказана. □

Теперь, учитывая, что $m_2 \leqslant m_1$, получаем

$$p_1 m_1 + (\Sigma_0 - p_1) m_2 = p_1(m_1 + m_2) + (\Sigma_0 - 2p_1) m_2 \leqslant \\ \leqslant 8p_1 n^2 + (\Sigma_0 - 2p_1) \cdot 4n^2 = 4n^2 \Sigma_0.$$

Противоречие. Лемма 2 доказана. □

Доказательство теоремы завершено.

Замечание 1. Как следует из техники подсчёта кратностей [8, гл. 2, § 2], граф последовательности раздутий $\{\psi_i\}$ можно модифицировать с сохранением всех приложений, а именно стереть все стрелки, идущие из вершин $L+1, \ldots, N$ верхней части графа в вершины $1, \ldots, L-1$ нижней части (при этом и неравенство Нётера—Фано, и оценка на кратности самопересечения линейной системы сохранятся). Таким образом модифицированный граф удовлетворяет свойству леммы 4, что позволяет завершить доказательство леммы 2, вообще не используя леммы 3. Последняя лемма доказана лишь для того, чтобы сделать рассуждения несколько менее техничными и более непосредственными.

6. Локальное неравенство на поверхности

Пусть $o \in X$ — росток гладкой поверхности, $C \ni o$ — гладкая кривая и Σ — подвижная линейная система на X. Пусть $Z = (D_1 \circ D_2)$ — самопересечение линейной системы Σ, т. е. некоторый эффективный 0-цикл. Ввиду локальности ситуации можно считать, что носитель цикла Z есть точка o, т. е. $\deg Z = (D_1 \cdot D_2)_o$.

Предложение 2. *Предположим, что для некоторого вещественного $a < 1$ пара*

$$\left(X, \frac{1}{n}\Sigma + aC\right), \tag{4}$$

где $n > 0$ — положительное число, не является лог-канонической (т. е. для общего дивизора $D \in \Sigma$ не является лог-канонической пара $(X, \frac{1}{n}D + aC)$). Тогда имеет место оценка

$$\deg Z > 4(1-a)n^2. \tag{5}$$

Доказательство. Исходное рассуждение см. в [13]. Мы покажем, что неравенство (5) есть прямое следствие хорошо известных фактов о бесконечно близких особенностях кривой на неособой поверхности [4]. Пусть последовательность раздутий

$$\varphi_{i,i-1}\colon X_i \to X_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

где $X_0 = X$, разрешает не-лог-каноническую особенность пары (4). Мы пользуемся стандартными обозначениями и соглашениями: центр раздутия $\varphi_{i,i-1}$ есть точка $x_{i-1} \in X_{i-1}$, его исключительная прямая есть $E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(x_{i-1}) \subset X_i$, первой раздувается точка $o = x_0$, раздуваемые точки x_i лежат друг над другом: $x_i \in E_i$. Последняя исключительная прямая E_N реализует не-лог-каноническую особенность пары (4), т. е. выполнено лог-неравенство Нётера—Фано:

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i p_i + an \sum_{x_{i-1} \in C^{i-1}} p_i > n\left(\sum_{i=1}^{N} p_i + 1\right), \tag{6}$$

где $\nu_i = \operatorname{mult}_{x_{i-1}} \Sigma^{i-1}$, через Σ^i и C^i обозначаются собственные прообразы на X_i и p_i — число путей в графе Γ построенной последовательности раздутий из вершины E_N в E_i (см. [6, 8]). Пусть $x_{i-1} \in C^{i-1}$ для $i = 1, \ldots, k \leqslant N$, тогда неравенство (6) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i p_i > n\left(\sum_{i=1}^{k} (1-a) p_i + \sum_{i=k+1}^{N} p_i + 1\right). \tag{7}$$

Очевидна следующая лемма.

Лемма 5. *Имеет место неравенство*

$$\deg Z \geqslant \sum_{i=1}^{N} \nu_i^2. \tag{8}$$

Лемма 6. *Для любого $i \in \{1, \ldots, N-1\}$ выполнена оценка*

$$\nu_i \geqslant \sum_{j \to i} \nu_j. \tag{9}$$

Доказательство. Это хорошо известное свойство кратностей кривых в бесконечно близких точках на неособой поверхности. □

Лемма 7. *Имеет место оценка*

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i^2 > \frac{\Delta^2}{q} n^2,$$

где

$$\Delta = 1 + (1-a)\sum_{i=1}^{k} p_i + \sum_{i=k+1}^{N} p_i, \quad q = \sum_{i=1}^{N} p_i^2$$

(*так что* $n\Delta$ *есть правая часть неравенства* (7)).

Доказательство. Минимум квадратичной формы в правой части неравенства (8) при ограничениях (9) и

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i p_i = \Delta n \tag{10}$$

достигается при $\nu_i = p_i\theta$, где $\theta = \frac{\Delta n}{q}$ вычисляется из (10). Лемма доказана. □

Теперь утверждение предложения 2 вытекает из чисто комбинаторного факта о графе Γ, который мы и будем доказывать.

Лемма 8. *Предположим, что начальный отрезок графа* Γ *с вершинами* $1, \ldots, k$ *есть цепь. Тогда имеет место неравенство*

$$\Delta^2 \geqslant 4(1-a)q. \tag{11}$$

Доказательство. Проведём индукцию по числу N вершин в графе Γ. Если $N = 1$, то неравенство (11) выполнено тривиальным образом:

$$(2-a)^2 \geqslant 4(1-a).$$

Рассмотрим неравенство (11) как утверждение о неотрицательности квадратичной функции аргумента a:

$$a^2\biggl(\sum_{i=1}^{k} p_i\biggr) + 2a\biggl(2q - \biggl(\sum_{i=1}^{k} p_i\biggr)\biggl(\sum_{i=1}^{N} p_i + 1\biggr)\biggr) + \biggl(\biggl(\sum_{i=1}^{N} p_i + 1\biggr)^2 - 4q\biggr) \geqslant 0$$

на интервале $a \leqslant 1$. Поскольку при $a \to \pm\infty$ и $a = 1$ эта функция положительна, достаточно проверить, что её минимум неотрицателен. Элементарные вычисления показывают, что, с точностью до несущественного положительного множителя, этот минимум даётся формулой

$$\biggl(\sum_{i=1}^{k} p_i\biggr)\biggl(\sum_{i=k+1}^{N} p_i + 1\biggr) - \sum_{i=1}^{N} p_i^2. \tag{12}$$

Неотрицательность последнего выражения и будем доказывать индукцией по числу вершин N. Напомним, что единственное предположение, ограничивающее выбор числа $k \geqslant 1$, — это отсутствие стрелок $i \to j$ при $i \geqslant j+2$, $i \leqslant k$.

Рассмотрим сначала случай $k=1$. Предположим, что $l\geqslant 1$ вершин соединены стрелкой с 1, т. е.

$$2\to 1,\dots,\ l+1\to 1,\quad \text{но}\quad l+2\nrightarrow 1.$$

В этом случае $p_1=p_2+\ldots+p_{l+1}$ и подграф графа Γ с вершинами $\{2,\dots,l+1\}$ либо состоит из одной вершины, либо есть цепь. Выражение (12) преобразуется к виду

$$\Bigl(\sum_{i=2}^{l+1}p_i\Bigr)\Bigl(\sum_{i=l+2}^{N}p_i+1\Bigr)-\sum_{i=2}^{N}p_i^2,$$

так что можно применить предположение индукции к подграфу с вершинами $\{2,\dots,N\}$. Этим случай $k=1$ разобран.

Пусть $k\geqslant 2$. Имеет место следующий ключевой факт.

Лемма 9. *Имеет место неравенство*

$$p_i\leqslant\sum_{j=i+2}^{N}p_j+1. \tag{13}$$

Доказательство. Будем следовать [6, лемма 1.6]. Применим убывающую индукцию по i. Если $i=N$ или $i=N-1$, то неравенство (13) выполнено. Имеем

$$p_i-\sum_{j\geqslant i+2}p_j=\sum_{j\to i}p_j-\sum_{j\geqslant i+2}p_j=p_{i+1}-\sum_{\substack{j\geqslant i+2\\ j\nrightarrow i}}p_j.$$

Запишем множество $\{j\mid j\to i\}$ как $\{i+1,\dots,i+l\}$. Если $l=1$, то, применяя предположение индукции, получаем оценку (13). Если $l\geqslant 2$, то имеем

$$p_{i+1}=\ldots=p_{i+l-1}=p_{i+l}+\sum_{\substack{j\to i+l-1\\ j\geqslant i+l+1}}p_j.$$

Поэтому

$$p_{i+1}-\sum_{\substack{j\geqslant i+2\\ j\nrightarrow i}}p_j=p_{i+l-1}-\sum_{j=i+l+1}^{N}p_j.$$

Применяя предположение индукции к $i+l-1$, завершаем доказательство леммы. $\square$

Согласно доказанной лемме имеет место неравенство

$$p_1=p_2=\ldots=p_{k-1}\leqslant\sum_{i=k+1}^{N}p_i+1.$$

Поэтому при $k\geqslant 2$ выражение (12) ограничено снизу числом

$$\Bigl(\sum_{i=2}^{k}p_i\Bigr)\Bigl(\sum_{i=k+1}^{N}p_i+1\Bigr)-\sum_{i=2}^{N}p_i^2.$$

Теперь применяем предположение индукции к подграфу с вершинами $\{2, \ldots, N\}$ и завершаем доказательство леммы 8 и предложения 2. □

Замечание 2. Подчеркнём, что ключевую роль в доказательстве неравенства (5) играет чисто комбинаторная оценка (13), доказательство которой использует только одно свойство графа Γ: из каждой вершины выходят самое большее две стрелки. Впервые эта оценка была получена в [4] для совсем другой цели (для исключения максимальных особенностей, лежащих над невырожденной квадратичной точкой в размерности три — принцип связности в 1980-е годы ещё не был известен).

Литература

[1] Исковских В. А. Бирациональная жёсткость гиперповерхностей Фано в рамках теории Мори // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 2. — С. 3—86.

[2] Исковских В. А., Манин Ю. И. Трёхмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Мат. сб. — 1971. — Т. 86, № 1. — С. 140—166.

[3] Пухликов А. В. Бирациональные автоморфизмы двойного пространства и двойной квадрики // Изв. РАН. Сер. мат. — 1988. — Т. 52, № 1. — С. 229—239.

[4] Пухликов А. В. Бирациональные автоморфизмы трёхмерной квартики с простейшей особенностью // Мат. сб. — 1988. — Т. 135, № 4. — С. 472—496.

[5] Пухликов А. В. Бирационально жёсткие двойные гиперповерхности Фано // Мат. сб. — 2000. — Т. 191, № 6. — С. 101—126.

[6] Пухликов А. В. Бирационально жёсткие итерированные двойные гиперповерхности Фано // Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — Т. 67, № 3. — С. 139—182.

[7] Пухликов А. В. Бирациональная геометрия прямых произведений Фано // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — Т. 69, № 6. — С. 153—186.

[8] Пухликов А. В. Бирационально жёсткие многообразия. I. Многообразия Фано // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, № 5. — С. 15—106.

[9] Чельцов И. А. Нерациональность четырёхмерного гладкого полного пересечения квадрики и квартики, не содержащего плоскости // Мат. сб. — 2003. — Т. 194, № 11. — С. 95—116.

[10] Чельцов И. А. Бирационально жёсткие многообразия Фано // Успехи мат. наук. — 2005. — Т. 60, № 5. — С. 71—160.

[11] Шокуров В. В. Трёхмерные лог-перестройки // Изв. РАН. Сер. мат. — 1992. — Т. 52. — С. 105—203.

[12] Cheltsov I. Double cubics and double quartics // Math. Z. — 2006. — Vol. 253, no. 1. — P. 75—86. — arXiv:math/0410408v4.

[13] Corti A. Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry // Explicit Birational Geometry of Threefolds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 281). — P. 259—312.

[14] Iskovskikh V. A., Pukhlikov A. V. Birational automorphisms of multi-dimensional algebraic varieties // J. Math. Sci. — 1996. — Vol. 82. — P. 3528—3613.

[15] Flips and Abundance for Algebraic Threefolds. A Summer Seminar at the University of Utah, Salt Lake City, 1991 / J. Kollár, ed. — (Astérisque; 211). — Paris: Soc. Math. de France, 1992.

[16] Pukhlikov A. V. Birational isomorphisms of four-dimensional quintics // Invent. Math. — 1987. — Vol. 87. — P. 303—329.

[17] Pukhlikov A. V. Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Invent. Math. — 1998. — Vol. 134, no. 2. — P. 401—426.

[18] Pukhlikov A. V. Birationally rigid Fano complete intersections // J. Reine Angew. Math. — 2001. — B. 541. — S. 55—79.

[19] Pukhlikov A. V. Birational geometry of algebraic varieties with a pencil of Fano cyclic covers. — Preprint No. 66. — Max-Planck-Institut für Mathematik, 2006.