О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций

А. Р. ЧЕХЛОВ
Томский государственный университет
e-mail: cheklov@math.tsu.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: прямое слагаемое, проекция группы, прямое разложение, вполне характеристическая подгруппа.

Аннотация

Изучены свойства подгрупп, инвариантных относительно проекций. Указано строение таких подгрупп в нередуцированных группах. Рассмотрены условия, при которых подгруппы, инвариантные относительно проекций, являются вполне характеристическими.

Abstract

A. R. Chekhlov, On projective invariant subgroups of Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 6, pp. 211—218.

Properties of projective invariant subgroups are studied. The structure of these subgroups in nonreduced groups is described. The conditions under which projective invariant subgroups are fully invariant are considered.

Пусть A — абелева группа. Будем использовать следующие обозначения:

$H \leqslant A \iff H$ — подгруппа в A;

$H \leqslant \mathrm{fi}\, A$ (или H — fi-подгруппа в A) $\iff$

$\iff H$ — вполне характеристическая подгруппа в A;

$H \leqslant \mathrm{pi}\, A$ (или H — pi-подгруппа в A) $\iff$

$\iff H$ — подгруппа в A, инвариантная относительно проекций;

$\mathrm{E}(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы A; если не оговорено противное, то A_p — p-компонента, $\mathrm{t}(A)$ — периодическая часть группы A.

Пусть B и C — группы, X — непустое подмножество в C. Обозначим через

$$\mathrm{Hom}(C,B)X = \sum_{f\in \mathrm{Hom}(C,B)} f(X)$$

подгруппу, порождённую всеми гомоморфными образами подмножества X в группе B (*гомоморфную оболочку* подмножества X в группе B). Термин

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 6, с. 211—218.

«гомоморфная оболочка» предложен в [1] (см. также [2]). Всегда $\mathrm{Hom}(C,B)X \leqslant \mathrm{fi}\, B$. Если $X = C$, то $\mathrm{Hom}(C,B)C$ совпадает со *следом* группы C в B.

Подгруппа $H \leqslant A$ называется *инвариантной относительно проекций*, если $\pi H \subseteq H$ для каждой проекции π группы A.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства:

1) $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$ тогда и только тогда, когда $\pi H = H \cap \pi A$ для каждой проекции π группы A;
2) если $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$, то $H \cap B \leqslant \mathrm{pi}\, B$ для каждого прямого слагаемого B группы A; если $A = \bigoplus A_i$, то $H = \bigoplus (H \cap A_i)$;
3) если $H \leqslant \mathrm{pi}\, B$, а $B \leqslant \mathrm{pi}\, A$, то $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$;
4) если $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$ и π — проекция группы A, то отображение $a + H \mapsto \pi a + H$ — проекция группы A/H; в частности, если $A = B \oplus C$, то $A/H = (B+H)/H \oplus (C+H)/H$;
5) если $H \leqslant B \leqslant A$ и $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$, а $B/H \leqslant \mathrm{pi}\, A/H$, то $B \leqslant \mathrm{pi}\, A$;
6) пересечение pi-подгрупп и подгруппа, порождённая pi-подгруппами, являются pi-подгруппами; в группе без кручения сервантная подгруппа, порождённая pi-подгруппой, также является pi-подгруппой.

Отметим, что pi-подгруппы абелевых p-групп изучались в [6]. Так, там доказано, что в периодических сепарабельных группах все pi-подгруппы являются вполне характеристическими. Некоторые обобщения этих результатов на модули были получены в [5].

Приведём следующий полезный результат.

Лемма 1 [4, лемма 9.5]. *Пусть $A = B \oplus C$ — прямое разложение с проекциями π, θ. Если разложению $A = B \oplus C_1$ соответствуют проекции π_1, θ_1, то $\pi_1 = \pi + \pi\varphi\theta$, $\theta_1 = \theta - \pi\varphi\theta$ для некоторого эндоморфизма φ группы A. Обратно, для любых эндоморфизмов π_1, θ_1 приведённого выше вида имеет место разложение $A = B \oplus \theta_1 A$.*

Лемма 2.

1. *Пусть π, ρ — проекции группы A, причём $\pi A \leqslant \mathrm{pi}\, A$. Тогда $(1-\pi)\rho(1-\pi)$ также является проекцией группы A.*
2. *Пусть H — pi-подгруппа группы $A = B \oplus C$. Тогда $H \cap B \leqslant \mathrm{pi}\, B$, $H \cap C \leqslant \mathrm{pi}\, C$ и $\mathrm{Hom}(C,B)(H \cap C) \subseteq H \cap B$, $\mathrm{Hom}(B,C)(H \cap B) \subseteq H \cap C$.*
3. *Пусть $A = B \oplus C$, $B \leqslant \mathrm{fi}\, A$, $B_1 \leqslant B$, $C_1 \leqslant C$ и $H = B_1 \oplus C_1$. Тогда $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$, если и только если $B_1 \leqslant \mathrm{pi}\, B$, $C_1 \leqslant \mathrm{pi}\, C$, $\mathrm{Hom}(C,B)C_1 \subseteq B_1$.*

Доказательство. 1. Обозначим $\theta = 1 - \pi$. Имеем $\theta\rho\theta = \theta\rho(\pi+\theta)\rho\theta = \theta\rho\pi\rho\theta + \theta\rho\theta\rho\theta$. Поскольку $\theta\rho\pi = 0$, то $\theta\rho\theta = \theta\rho\theta\rho\theta = (\theta\rho\theta)^2$.

2. Согласно лемме 1 $A = B \oplus C_1$, где $C_1 = \theta_1 A$ и $\theta_1 = \theta - \pi\varphi\theta$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(C,B)$. Для $x \in H \cap C$ имеем $\theta_1(x) = x - \varphi(x) \in H$, откуда $\varphi(x) \in H$.

3. Необходимость вытекает из утверждения 2. Докажем достаточность. Пусть π, θ — проекции, соответствующие разложению $A = B \oplus C$, ρ — проекция группы A. Так как $\rho(B) \subseteq B$, то $(\rho|B)^2 = \rho|B$, и поэтому $\rho(B_1) \subseteq B_1$.

Если теперь $x \in C_1$, то

$$\rho(x) = (\pi+\theta)\rho(\pi+\theta)(x) = \\ = (\pi\rho\pi)(x) + (\pi\rho\theta)(x) + (\theta\rho\pi)(x) + (\theta\rho\theta)(x) = (\pi\rho\theta)(x) + (\theta\rho\theta)(x).$$

Здесь $\pi\rho\theta \in \mathrm{Hom}(C, B)$. Поэтому $(\pi\rho\theta)(x) \in B_1$, а $(\theta\rho\theta)(x) \in C_1$ по утверждению 1. □

Из леммы 2 непосредственно вытекает, что каждое прямое слагаемое, инвариантное относительно проекций, является вполне характеристическим [4, § 9, упр. 4].

Лемма 3. *Пусть* $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ *— фиксированное разложение группы* A, $\pi_i\colon A \to A_i$ *— соответствующие проекции,* $B_i \leqslant A_i$ *и* $H = \bigoplus_{i\in I} B_i$. *Тогда*

1) *если* $A_i \leqslant \mathrm{fi}\, A$ *для каждого* $i \in I$, *то* $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$ *тогда и только тогда, когда* $B_i \leqslant \mathrm{pi}\, A_i$ *для всех* $i \in I$; *в частности, подгруппа* B *периодической группы* T *является pi-подгруппой тогда и только тогда, когда для каждой её* p*-компоненты* B_p *выполнено* $B_p \leqslant \mathrm{pi}\, T_p$;
2) *если* $\mathrm{Hom}(A_j, A_i)B_j \subseteq B_i$ *для всех* $i, j \in I$ $(i \neq j)$, *то* $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$ *тогда и только тогда, когда* $\pi_i\rho(B_i) \subseteq B_i$ *для каждой проекции* ρ *группы* A.

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из пункта 3 леммы 2.

Докажем утверждение 2). Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $a \in B_i$, $G_i = \bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} A_j$. Тогда $\rho(a) = b+c$, где $b \in B_i$, $c \in \mathrm{Hom}(A_i, G_i)B_i \subseteq \subseteq \bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} B_j \subseteq H$. Согласно условию $b = \pi_i\big(\rho(a)\big) \in B_i \subseteq H$. Поэтому $\rho(a) \in H$. □

Лемма 4. *Пусть* $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ *— фиксированное разложение группы* A *и* $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$. *Тогда*

1) $H \leqslant \mathrm{fi}\, A$, *если и только если* $H \cap A_i \leqslant \mathrm{fi}\, A_i$ *для всех* $i \in I$;
2) *если* $G_i = \bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} A_j$, $B_i = \mathrm{Hom}(G_i, A_i)(H \cap G_i)$, *то* $B_i \subseteq H \cap A_i$ *и* $\bigoplus_{i\in I} B_i \leqslant \leqslant \mathrm{fi}\, A$. *В частности, если* $B_i = H \cap A_i$ *для каждого* $i \in I$, *то* $H \leqslant \mathrm{fi}\, A$.

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из пункта 2 леммы 2.

Докажем утверждение 2). Пусть $x \in B_i$ и π, θ — проекции группы A, соответствующие разложению $A = A_i \oplus G_i$. Тогда если $\varphi \in \mathrm{E}(A)$, то

$$\varphi = (\pi+\theta)\varphi(\pi+\theta) = \pi\varphi\pi + \theta\varphi\pi + \pi\varphi\theta + \theta\varphi\theta.$$

Следовательно, $\varphi(x) = (\pi\varphi\pi)(x) + (\theta\varphi\pi)(x)$. Здесь $\pi\varphi\pi$ — эндоморфизм группы A_i и $(\pi\varphi\pi)(x) \in B_i \subseteq H$ в силу вполне характеристичности подгруппы B_i в A_i, $(\theta\varphi\pi)(x) \in \mathrm{Hom}(A_i, G_i)B_i \subseteq \bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} B_j \subseteq H$. □

Если a — элемент порядка p^k группы A, то через $e(a) = k$ обозначим его *экспоненту*. Положим $A[p^k] = \{a \in A \mid p^k a = 0\}$, причём если A — p-группа, то $A[p^\infty] = A$.

Пусть D — периодическая делимая группа, H — некоторая периодическая подгруппа группы A. Тогда $\mathrm{Hom}(A, D)H = \bigoplus D_p[p^{m_p}]$, где $m_p = \sup\{e(h) \mid h \in H_p\}$ [1, лемма 1.1]. Здесь $m_p = 0$, если $H_p = 0$, значит, $D_p[p^{m_p}] = 0$. Если же D — произвольная делимая группа, $0 \neq H$ — непериодическая подгруппа группы A, то $\mathrm{Hom}(A, D)H = D$ [1, лемма 1.2].

Заметим, что в делимой периодической группе D всякая pi-подгруппа является вполне характеристической. Действительно, по лемме 2 можно ограничиться примарным случаем. Тогда D является прямой суммой групп, изоморфных $\mathbb{Z}(p^\infty)$. В $\mathbb{Z}(p^\infty)$ каждая подгруппа вполне характеристична. Поэтому данное утверждение следует из пункта 1) леммы 4. Если же D — разложимая делимая группа без кручения, то её ненулевые pi-подгруппы совпадают с самой группой. Это следует из отмеченного выше свойства гомоморфных оболочек и пункта 2 леммы 2. Модули, инвариантные относительно проекций своей инъективной оболочки, образуют класс квазинепрерывных (или π-инъективных) модулей [3, предложение 4.13]. Класс квазиинъективных модулей состоит из модулей, вполне инвариантных в своей инъективной оболочке [3, предложение 4.17]. Квазиинъективные модули являются квазинепрерывными. Таким образом, периодические квазинепрерывные группы являются квазиинъективными, а разложимые квазинепрерывные группы без кручения являются инъективными.

Теорема 5. *Пусть $A = B \oplus D$, где B — редуцированная группа, D — делимая группа, $D = D_0 \oplus \mathrm{t}(D)$. Тогда $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$, если и только если H имеет один из следующих видов*:

1) $H = B' \oplus \Bigl(\bigoplus\limits_p D_p[p^{k_p}]\Bigr)$, *где B' — периодическая pi-подгруппа группы B и $k_p \geqslant m_p = \sup\{e(b) \mid b \in B'_p\}$*;
2) $H = B' \oplus D'_0 \oplus \mathrm{t}(D)$, *где $B' \leqslant \mathrm{pi}\, B$, $0 \neq D'_0 \leqslant D_0$, причём $D'_0 = D_0$, если B' — непериодическая группа или если группа D_0 разложима.*

Доказательство. Докажем необходимость. Имеем

$$H = B' \oplus (H \cap D_0) \oplus \Bigl(\bigoplus_p (H \cap D_p)\Bigr),$$

где $B' = H \cap B \leqslant \mathrm{pi}\, B$. Если $H \cap D_0 = 0$, то из замечания перед этой теоремой и второго утверждения леммы 2 следует, что $D_p[p^{m_p}] \subseteq H \cap D_p$. Так как $H \cap D_p \leqslant \mathrm{fi}\, D_p$, то $H \cap D_p = D_p[p^{k_p}]$, где $k_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Поэтому $k_p \geqslant m_p$. Если B' — непериодическая группа, то $\mathrm{Hom}(B, D)B' = D$. Аналогично рассуждаем, если $D'_0 = H \cap D_0 \neq 0$.

Достаточность вытекает из утверждения 3 леммы 2. □

Отметим, что соответствующая теорема для fi-подгрупп доказана в [1, теорема 1.4].

Теорема 6. *Пусть* $A = \mathrm{t}(A) \oplus B$ — *редуцированная группа. Тогда* $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$, *если и только если* $H = T' \oplus B'$, *где* $T' \leqslant \mathrm{pi}\, T = \mathrm{t}(A)$, $B' \leqslant \mathrm{pi}\, B$, *причём* $(\mathrm{Hom}(B,T)B')_p \subseteq T'_p$, *если* $pB \neq B$.

Доказательство вытекает из пункта 3 леммы 2. □

Напомним, что группа без кручения A называется *вполне транзитивной*, если для любых её элементов $a, b \neq 0$ условие на их характеристики $\chi_A(a) \leqslant \chi_A(b)$ влечёт существование $f \in \mathrm{E}(A)$ со свойством $f(a) = b$. Для группы без кручения A обозначим через $\tau(A)$ множество типов $\mathrm{t}(a)$ всех её ненулевых элементов a; если t — некоторый тип, то через $A^*(t)$ обозначается подгруппа в A, порождённая всеми её элементами, имеющими тип больше t, множество всех элементов группы A типа не меньше t образуют сервантную подгруппу $A(t)$. Всегда $A^*(t) \subseteq A(t)$. Если A — однородная группа без кручения, то $\mathrm{t}(A)$ — её тип, равный типу любого $0 \neq a \in A$.

Теорема 7. *Пусть для вполне транзитивной группы без кручения A существует такое разложение* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, *что для всех* $t_1, t_2 \in \tau(A_i)$, $i \in I$, *с условием* $t_1 \leqslant t_2$ *для некоторого* $j \in I \setminus \{i\}$ *найдётся* $t \in \tau(A_j)$ *со свойством* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. *Тогда каждая pi-подгруппа H группы A является fi-подгруппой.*

Доказательство. Применим пункт 1) леммы 4. Пусть $f \in \mathrm{E}(A_i)$ и $a \in H \cap A_i$. Тогда $\chi(a) \leqslant \chi\big(f(a)\big)$. По условию найдётся $b \in A_j$ со свойством $\chi(a) \leqslant \chi(b) \leqslant \chi\big(f(a)\big)$. В силу вполне транзитивности $\varphi(a) = b$ и $\psi(b) = f(a)$ для некоторых $\varphi, \psi \in \mathrm{E}(A)$. Дважды применяя пункт 2 леммы 2, получаем, что $f(a) \in H$. □

Следствие 8.

1. *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, *где* A_i — *группы, удовлетворяющие условиям теоремы 7. Тогда каждая pi-подгруппа группы A является fi-подгруппой.*
2. *Всякая сервантная pi-подгруппа разложимой однородной вполне транзитивной группы совпадает с самой группой.*

Теорема 9. *Пусть A — сепарабельная группа без кручения. Каждая её pi-подгруппа является fi-подгруппой тогда и только тогда, когда A обладает следующим свойством: если её прямое слагаемое ранга 1 и типа t p-делимо для некоторого простого числа p, то дополнительное прямое слагаемое содержит прямое слагаемое ранга 1 того же типа t.*

Доказательство. Необходимость. Пусть B — прямое слагаемое в A ранга 1, $pB = B$ и в дополнительном прямом слагаемом C нет прямого слагаемого ранга 1 типа, равного $t = \mathrm{t}(B)$. Имеем $A^*(t) = C^*(t) \subset A(t) = B \oplus C(t)$, причём $C(t) = C^*(t)$. Пусть $0 \neq b \in B$ и $H = \langle b \rangle \oplus C(t)$. Тогда если $A = F \oplus N$, то $A^*(t) = F^*(t) \oplus N^*(t) \subset H \subset F(t) \oplus N(t)$. Так как $A(t)/A^*(t) \cong F(t)/F^*(t) \oplus N(t)/N^*(t)$ имеет ранг 1, то $F(t) = F^*(t)$ или $N(t) = N^*(t)$. Пусть, скажем, $N(t) = N^*(t)$. Тогда $H = (F(t) \cap H) \oplus N(t) = (F \cap H) \oplus (N \cap H)$, т. е. $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$. Однако деление на p является эндоморфизмом f прямого слагаемого B, для которого $f(b) \notin H$, что противоречит условию.

Достаточность. Пусть $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$, $x \in H$. Так как A сепарабельна, то x принадлежит прямому слагаемому $G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$, $x = g_1 + \ldots + g_n$, где $g_i \in H \cap G_i$, $\mathrm{r}(G_i) = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Согласно пункту 1) леммы 4 достаточно показать, что $f_i(g_i) \in H$ для $f_i \in \mathrm{E}(G_i)$. Поскольку $\mathrm{r}(G_i) = 1$, то кольцо $\mathrm{E}(G_i)$ изоморфно подкольцу кольца $\mathbb{Q}$, порождённому такими дробями $1/p$, что $pG_i = G_i$. Если $\{p \mid pG_i = G_i,\ p$ — простое число$\} = \varnothing$, то $\mathrm{E}(G_i) \cong \mathbb{Z}$ и, следовательно, $f_i(g_i) \in \in H \cap G_i$. Если же $pG_i = G_i$ для некоторого простого p, то по условию для G_i найдётся такая подгруппа $B_i \cong G_i$, что $G_i \oplus B_i$ — прямое слагаемое в A. Пусть $\chi(b_i) = \chi\big(f_i(g_i)\big)$, где $b_i \in B_i$. По лемме 2 $b_i \in H$, и значит, $f_i(g_i) \in H$. □

Предложение 10. *Пусть A — такая редуцированная алгебраически компактная группа без кручения, что все её p-адические компоненты разложимы. Тогда условие $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$ влечёт $H \leqslant \mathrm{fi}\, A$.*

Доказательство. Группа A представима в виде $A = \prod A_p$, где каждая её p-адическая компонента A_p является p-адической алгебраически компактной группой. Пусть $a \in H$ и $f \in \mathrm{E}(A)$. Имеем $a = (\ldots, a_p, \ldots)$, где, поскольку $H \leqslant \mathrm{pi}\, A$, $a_p \in H \cap A_p$. Используя свойства p-адических алгебраически компактных групп, запишем $A_p = B_p \oplus G_p$, где $a_p \in B_p$ и $G_p \neq 0$. Тогда $f(a) = (\ldots, f(a_p), \ldots)$, $f(a_p) = b_p + g_p$, где $b_p \in B_p$, $g_p \in G_p$. Если $B = = \prod B_p$, $G = \prod G_p$, то $A = B \oplus G$, $f(a) = b + g$, где $b = (\ldots, b_p, \ldots) \in B$, $g = (\ldots, g_p, \ldots) \in G$. По лемме 2 $g \in H \cap G$. Поэтому достаточно показать, что $b \in H$. Так как A_p — однородная вполне транзитивная группа, то найдутся $\varphi_p, \psi_p \in \mathrm{E}(A_p)$ со свойствами $\varphi_p(b_p) \in A \cap G_p$ и $\psi_p\big(\varphi_p(b_p)\big) = b_p$. Тогда если $\varphi = (\ldots, \varphi_p, \ldots)$, $\psi = (\ldots, \psi_p, \ldots)$, то $\varphi \in \mathrm{Hom}(B, G)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(G, B)$. Согласно лемме 2 $\varphi(b) \in H \cap G$ и $b = \psi\big(\varphi(b)\big) \in H \cap B$. □

Теорема 11. *Редуцированная группа без кручения A является pi-подгруппой своего алгебраически компактного замыкания $\bar{A}$ тогда и только тогда, когда A представима в виде $A = B \oplus C$, где*

1) $\bar{B}, \bar{C} \leqslant \mathrm{fi}\, \bar{A}$;
2) $B \leqslant \mathrm{fi}\, \bar{B}$;
3) *p-компоненты C_p группы $\bar{C}$ неразложимы, замыкание (в $\mathbb{Z}$-адической топологии) каждой сервантной подгруппы группы C служит для C прямым слагаемым и группа C содержит такую плотную сервантную подгруппу $\bigoplus G_p$, что $G_p \subseteq C_p$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\bar{B}$ ($\bar{C}$) — прямое произведение всех разложимых (соответственно неразложимых) p-адических компонент группы $\bar{A}$. Тогда $\bar{A} = \bar{B} \oplus \bar{C}$ и, кроме того, $\bar{B}, \bar{C} \leqslant \mathrm{fi}\, \bar{A}$. Теперь если $B = A \cap \bar{B}$ и $C = A \cap \bar{C}$, то, поскольку $A \leqslant \mathrm{pi}\, \bar{A}$, $A = B \oplus C$, причём $\bar{B}$ (соответственно $\bar{C}$) совпадает с алгебраически компактным замыканием группы B (соответственно C). По предложению 10 $B \leqslant \mathrm{fi}\, \bar{B}$. Пусть $G_p = C \cap C_p$. Тогда G_p — плотная сервантная подгруппа в C_p, значит, подгруппа $\bigoplus G_p$ плотна в C. Алгебраически компактное замыкание $\bar{G}$ всякой сервантной подгруппы G группы C служит в $\bar{C}$ прямым слагаемым: $\bar{C} = \bar{G} \oplus D$ для некоторой подгруппы $D \subseteq \bar{C}$. Имеем $C = (C \cap \bar{G}) \oplus (C \cap D)$. Замыкание подгруппы G в группе C совпадает с $C \cap \bar{G}$.

Достаточность. Проверим, что $C \leqslant \mathrm{pi}\, \bar{C}$. Пусть $\bar{C} = E \oplus F$. Имеем $C_p = (C_p \cap E) \oplus (C_p \cap F)$. В силу неразложимости $C_p \subseteq E$ либо $C_p \subseteq F$. В частности, $E, F \leqslant \mathrm{fi}\, \bar{C}$; кроме того, соответственно $G_p \subseteq E$ или $G_p \subseteq F$. Поэтому $\bigoplus G_p = \Big(E \cap \big(\bigoplus G_p\big)\Big) \oplus \Big(F \cap \big(\bigoplus G_p\big)\Big)$. По условию замыкание E_0 (соответственно F_0) подгруппы $E \cap \big(\bigoplus G_p\big)$ (соответственно $F \cap \big(\bigoplus G_p\big)$) служит для C прямым слагаемым: $C = E_0 \oplus M$ (соответственно $C = N \oplus F_0$). Имеем $\bar{C} = \bar{E}_0 \oplus \bar{M} = \bar{N} \oplus \bar{F}_0$. Здесь $\bar{E}_0 = E$ и $\bar{F}_0 = F$. Так как $E, F \leqslant \mathrm{fi}\, \bar{C}$, то $\bar{M} = F$, $\bar{N} = E$. Следовательно, $C = (C \cap E) \oplus (C \cap F)$. Ссылка на пункт 3 леммы 2 заканчивает доказательство. □

Если $A = B \oplus C$, то пересечение всех дополнительных прямых слагаемых к подгруппе B в группе A есть максимальная вполне характеристическая подгруппа группы A, не пересекающаяся с B [4, теорема 9.6].

Теорема 12. *Пусть $A = B \oplus C$.*

1. *Наименьшая pi-подгруппа группы A, содержащая C, является fi-подгруппой и совпадает*
   а) с $\mathrm{Hom}(C, B)C \oplus C$;
   б) *с суммой G всех дополнительных прямых слагаемых к подгруппе B в группе A.*
2. *Наибольшая pi-подгруппа группы A, не пересекающаяся с B, является fi-подгруппой и совпадает*
   а) *с* $H = \bigcap\limits_{\varphi \in \mathrm{Hom}(C,B)} \ker \varphi$;
   б) *с пересечением N всех дополнительных прямых слагаемых к подгруппе B в группе A.*

Доказательство. 1. Пункт а) вытекает из пункта 2 леммы 2. Поскольку $C \subseteq G$, то $G = (B \cap G) \oplus C$. Если C_1 — дополнительное прямое слагаемое к B, то из леммы 1 следует, что $C + C_1 = \varphi(C) \oplus C$ для некоторого гомоморфизма $\varphi\colon C \to B$. Тогда $G = \Big(\sum\limits_{\varphi \in \mathrm{Hom}(C,B)} \varphi(C)\Big) \oplus C = \mathrm{Hom}(C, B)C \oplus C$, что ввиду а) доказывает б).

2. Вполне характеристичность подгруппы H следует из её определения. Если теперь X — pi-подгруппа группы A со свойством $X \cap B = 0$, то из равенства $X = (X \cap B) \oplus (X \cap C)$ следует, что $X = X \cap C \subseteq C$. Ввиду пункта 2 леммы 2 $X \subseteq \ker \varphi$ для каждого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(C, B)$. Поэтому $X \subseteq H$, что доказывает а).

Если $A = B \oplus C_1$ и $X \leqslant \mathrm{pi}\, A$ со свойством $X \cap B = 0$, то, как и выше, $X \subseteq C_1$. Поэтому утверждение б) вытекает из того, что N является fi-подгруппой группы A (см. замечание перед теоремой). □

Литература

[1] Гриншпон С. Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — Томск, 1981. — С. 56—92.

[2] Гриншпон С. Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундамент. и прикл. мат. — 2002. — Т. 8, вып. 2. — С. 407—473.

[3] Пунинский Г. Е., Туганбаев А. А. Кольца и модули. — М.: Союз, 1998.

[4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974; 1977.

[5] Hausen J. Endomorphism rings generated by idempotents // Tamkand J. Math. — 1981. — Vol. 12, no. 2. — P. 215—218.

[6] Megibben C. Projective-invariant subgroups of Abelian groups // Tamkand J. Math. — 1977. — Vol. 8, no. 2. — P. 177—182.