

Решёточные свойства эпигрупп*

Л. Н. ШЕВРИН

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького
e-mail: Lev.Shevrin@usu.ru

УДК 512.53

Ключевые слова: эпигруппа, решётка подэпигрупп.

Аннотация

В статье дан обзор первых продвижений в изучении различных взаимосвязей между эпигруппами и их подэпигрупповыми решётками.

Abstract

L. N. Shevrin, Lattice properties of epigroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 6, pp. 219—229.

The aim of this paper is to give a survey of the first advances in the study of diverse interconnections between epigroups and their subepigroup lattices.

1. Введение

Под решёточными свойствами алгебраической системы понимают свойства, связанные с рассмотрением решётки её подсистем. Изучение разнообразных взаимосвязей между алгебраическими системами и решётками их подсистем для различных типов систем составляет обширную область исследований, развивающуюся в течение многих десятилетий. В наибольшей степени эти исследования осуществлялись для групп (они начались в 1920-х годах) и для полугрупп (начались в 1950-х годах). Основные достижения в этих областях до середины 1990-х годов отражены соответственно в монографиях [6] и [10] (последняя является пересмотренной и расширенной версией монографии [4]). Заметим, что группы представляют собой классический тип *унарных полугрупп*, т. е. полугрупп, наделённых дополнительной унарной операцией. Важным типом унарных полугрупп являются инверсные полугруппы с операцией взятия инверсного элемента. Другой важный тип унарных полугрупп (как и в случае инверсных полугрупп, расширяющий свойство быть группой) представляют собой эпигруппы с операцией взятия псевдообратного элемента. Напомним, что полугруппа S называется *эпигруппой*, если для любого $x \in S$ некоторая степень x^n принадлежит подгруппе полугруппы S . Единственную максимальную подгруппу с таким

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00613).

свойством мы обозначаем через G_x , а её единицу — через e_x . Известно, что $xe_x = e_x x$ и указанный элемент принадлежит G_x , так что можно рассмотреть обратный элемент $(xe_x)^{-1}$ в G_x . Этот элемент, обозначаемый через $\bar{x}$, называется *псевдообратным* для x , и отображение $x \mapsto \bar{x}$ как раз и превращает эпигруппу в унарную полугруппу.

Отметим, что класс эпигрупп весьма широк: он содержит все периодические полугруппы, все вполне регулярные полугруппы, т. е. полугруппы, являющиеся объединениями групп, все вполне 0-простые полугруппы. Важный конкретный пример эпигруппы доставляет полугруппа всех матриц данного порядка над произвольным телом. Изучение полугрупп указанных абстрактных типов началось с самых первых шагов развития теории полугрупп, а эпигруппы *per se* (первоначально выступавшие под разными названиями) стали объектом внимания в теоретико-полугрупповых исследованиях с 1960-х годов. Ставший теперь, по-видимому, общепринятым термин «эпигруппа» был предложен автором данной статьи в конце 1980-х годов. Идея рассматривать эпигруппы как унарные полугруппы была выдвинута в [3] и развита в ней с трёх сторон: в постановках проблем, в формулировках ряда решённых проблем, в методах доказательств. К настоящему времени в теории эпигрупп накоплен довольно богатый материал (см. обзор [7]).

Решётка подсистем унарной полугруппы — это решётка её унарных подполугрупп, т. е. подполугрупп, замкнутых относительно соответствующей унарной операции. Унарные подполугруппы инверсной полугруппы (эпигруппы) — это в точности её инверсные подполугруппы (подэпигруппы, т. е. подполугруппы, являющиеся эпигруппами). Исследования по решёточным свойствам инверсных полугрупп ведутся с конца 1960-х годов, и они достаточно полно отражены в трёх главах (из 14) монографии [10]. Что же касается решёточных свойств эпигрупп, то соответствующие исследования начались лишь совсем недавно¹. Цель настоящей статьи — дать обзор первых продвижений в этом направлении.

Как отмечено в предисловии к монографии [4] (или [10]), при изучении решёточных свойств алгебраических систем естественно выделить следующие три аспекта: ограничения на решётку подсистем, решёточные характеристики, решёточные изоморфизмы. В первом случае основная задача — описание систем, решётка подсистем которых удовлетворяет тем или иным условиям, во втором — выявление таких классов систем или индивидуальных систем, которые могут быть охарактеризованы в терминах решётки подсистем. Задачи в третьем

¹ Многие результаты о решёточных свойствах полугрупп априори или апостериори относятся к периодическим полугруппам (см. [4, 9, 10]). Так как всякая периодическая полугруппа и всякая группа являются эпигруппой, а их подэпигруппы — это соответственно обычные подполугруппы и подгруппы (дополненные пустым множеством), весь массив имеющихся результатов о решёточных свойствах периодических полугрупп и групп можно с формальной точки зрения трактовать как результаты, относящиеся к эпигруппам. Поэтому, естественно, говоря о решёточных свойствах эпигрупп как таковых, следует иметь в виду постановки задач не внутри классов периодических полугрупп и групп. Первой публикацией, посвящённой решению таких задач, явились тезисы доклада [8], где были анонсированы основные результаты работы [11].

случае связаны с рассмотрением изоморфизмов решёток подсистем и, в частности, выявлением свойств систем, сохраняющихся при таких изоморфизмах. В обозреваемых ниже результатах затрагиваются все эти аспекты.

2. Предварительные сведения

Предполагается, что читателю известны используемые в статье стандартные теоретико-полугрупповые сведения, в частности такие понятия, как периодическая полугруппа, вполне простая полугруппа, связка полугрупп, идеальное расширение и т. п. В качестве подходящих источников для справок можно назвать, например, [2] и [5, глава «Полугруппы»]. Напомним здесь лишь некоторые понятия, факты и обозначения, в наибольшей степени необходимые для понимания статьи.

Для элемента a эпигруппы наименьшее натуральное число n , такое что $a^n \in G_a$, называется *индексом* элемента a и обозначается $\text{ind}(a)$. Известно, что $a^m \in G_a$ при всех $m \geq \text{ind}(a)$. Для произвольного подмножества X данной полугруппы S через $\langle X \rangle$ обозначается подполугруппа, порождённая X , а если S — эпигруппа, то через $\langle\langle X \rangle\rangle$ обозначается подэпигруппа, порождённая X . *Циклическая эпигруппа* — это эпигруппа, порождённая одним элементом, *индекс* циклической эпигруппы $\langle\langle a \rangle\rangle$ — это $\text{ind}(a)$. Циклическая эпигруппа имеет индекс 1 тогда и только тогда, когда она группа. Конечные циклические эпигруппы — это в точности конечные циклические полугруппы. Строение бесконечной циклической полугруппы описано (см. [3, предложение 2; 7, предложение 2.3]). Такие эпигруппы образуют однопараметрическое семейство: две бесконечные циклические эпигруппы изоморфны тогда и только тогда, когда их индексы равны. Если индексы всех элементов эпигруппы S ограничены натуральным числом, то будем говорить, что S есть эпигруппа конечного индекса, её *индексом* будем называть $\max\{\text{ind}(a) \mid a \in S\}$.

Полугруппа называется *U-полугруппой*, если для любых её элементов a, b имеет место $ab \in \langle a \rangle \cup \langle b \rangle$. Специальный тип *U-полугрупп* представляют собой *сингулярные* полугруппы, т. е. полугруппы левых или правых нулей. Полугруппа называется *прямоугольной*, если она разложима в прямое произведение полугруппы левых нулей и полугруппы правых нулей. Связка полугрупп называется *левой (правой)*, если для любых её компонент A, B выполняется условие $AB \subseteq A$ (соответственно $AB \subseteq B$). *Левая (правая) группа* — это левая (правая) связка групп. Это условие эквивалентно тому, что полугруппа разложима в прямое произведение полугруппы левых (правых) нулей и группы. Связка называется *U-связкой* (в [4] использовался термин «сильная связка»), если для любых элементов a, b из разных её компонент имеет место $ab \in \langle a \rangle \cup \langle b \rangle$. Специальный тип *U-связки* представляет собой *ординальная сумма* — это такая цепь полугрупп, что для любых её компонент A, B , где $A < B$ (т. е. $AB \cup BA \subseteq A$), и любых элементов $a \in A, b \in B$ выполняются равенства $ab = ba = a$.

Через $\text{Gr } S$ обозначается множество всех групповых элементов полугруппы S , т. е. объединение всех её максимальных подгрупп.

Полугруппа S называется *архимедовой* (*архимедовой слева*, *архимедовой справа*), если для любых $a, b \in S$ существует такое n , что $a^n \in SbS$ (соответственно $a^n \in bS$, $a^n \in Sb$). Полугруппа *унипотентна*, если она имеет единственный идемпотент. Эпигруппа S будет архимедовой (архимедовой слева, архимедовой справа) тогда и только тогда, когда $\text{Gr } S$ есть идеал, являющийся вполне простой полугруппой (левой группой, правой группой); в этом случае $\text{Gr } S$ есть *ядро* S , т. е. наименьший идеал, а фактор-полугруппа $G/\text{Gr } S$ есть нильполугруппа. Унипотентные эпигруппы — это в точности эпигруппы, архимедовы слева и справа, или, что эквивалентно, идеальные расширения групп при помощи нильполугрупп.

Для эпигруппы S через $\text{Subepi } S$ обозначается решётка её подэпигрупп. (Как обычно, объединение $X \vee Y$ подэпигрупп X и Y в $\text{Subepi } S$ есть подэпигруппа $\langle\langle X \cup Y \rangle\rangle$ и пустое множество считается подполугруппой, чтобы гарантировать замкнутость $\text{Subepi } S$ относительно пересечения.)

В заключение этого раздела напомним несколько теоретико-решёточных определений. Символом $\succ$ обозначается отношение покрытия в решётке: $x \succ y$, если $x > y$ и между элементами x и y нет отличных от них элементов данной решётки. Решётка L называется *полумодулярной вверх*, если для любых $x, y \in L$ из $x \succ x \wedge y$ следует $x \vee y \succ y$; *полумодулярная вниз* решётка определяется двойственно. Решётка L с нулём называется *0-модулярной* (*0-дистрибутивной*), если для любых $a, b, c \in L$ из того, что $a \wedge b = 0$ и $c \leq a$ (соответственно $a \wedge b = a \wedge c = 0$) следует $a \wedge (b \vee c) = c$ (соответственно $a \wedge (b \vee c) = 0$). Решётка L называется *$\wedge$ -полудистрибутивной*, если для любых $a, b, c \in L$ из того, что $a \wedge b = a \wedge c$, следует $a \wedge (b \vee c) = a \wedge b$.

3. Эпигруппы

с некоторыми типами решётки подэпигрупп

Следующие две теоремы доказаны в [11].

Теорема 1. Для эпигруппы S решётка $\text{Subepi } S$ полумодулярна вверх тогда и только тогда, когда S является U -связкой односторонне архимедовых эпигрупп S_i , таких что

- а) каждая эпигруппа S_i есть левая или правая связка унипотентных эпигрупп;
- б) максимальные подгруппы S_i являются (изоморфными) группами с полумодулярной вверх решёткой подгрупп;
- в) $S_i/\text{Gr } S_i$ — (нильпотентная) U -полугруппа.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{X}$ — произвольное нетривиальное квазимногообразие модулярных решёток. Для эпигруппы S решётка $\text{Subepi } S$ принадлежит $\mathbf{X}$ тогда

и только тогда, когда S разложима в U -связку эпигрупп, каждая из которых является идеальным расширением группы, решётка подгрупп которой принадлежит $\mathbf{X}$, при помощи нильпотентной U -полугруппы.

Частными случаями теорем 1 и 2 являются аналогичные результаты для обычных полугрупп, первый из которых был получен Эго, второй — для случая, когда $\mathbf{X}$ есть многообразие всех модулярных решёток, — независимо Эго и автором данной статьи (см. соответствующие ссылки в [4] или [10]). Дело в том, что полугруппы, фигурирующие в упомянутых результатах, оказались периодическими, т. е. специальным типом эпигрупп. Первоначальные доказательства этих результатов были усовершенствованы в [10] использованием некоторых фактов структурной теории эпигрупп, развитой в [3] (см. также [7]). Более сложные доказательства теорем 1 и 2 потребовали применения дополнительных средств эпигрупповой техники.

Теоремы 1 и 2, как видим, осуществляют полную редукцию задач описания эпигрупп с указанными типами подэпигрупповой решётки к случаю групп. Информацию о соответствующих группах можно найти в [1, 6]; более подробные комментарии на этот счёт (со ссылками на некоторые дополнительные источники) приведены в [10, п. 5.13 и 6.4]. Для частного случая теоремы 2, когда $\mathbf{X}$ — многообразие дистрибутивных решёток, редукция, даваемая этой теоремой, приводит к исчерпывающему описанию структуры рассматриваемых эпигрупп, так как, согласно известной теореме Оре, группа имеет дистрибутивную решётку подгрупп тогда и только тогда, когда она локально циклическая.

Следствия теорем 1 и 2 для случая вполне регулярных полугрупп заслуживают отдельной формулировки. Как объяснено в [11], соответствующие утверждения формулируются следующим образом.

Следствие 1. *Для вполне регулярной полугруппы S решётка $\text{Subepi } S$ полумодулярна вверх тогда и только тогда, когда S — ординальная сумма левых или правых групп, максимальные подгруппы которых имеют полумодулярную вверх решётку подгрупп.*

Следствие 2. *Для вполне регулярной полугруппы S решётка $\text{Subepi } S$ принадлежит нетривиальному квазимногообразию модулярных решёток $\mathbf{X}$ тогда и только тогда, когда S — ординальная сумма полугрупп, каждая из которых есть сингулярная полугруппа или группа с подгрупповой решёткой, принадлежащей $\mathbf{X}$.*

Представляющая интерес задача описания эпигрупп, решётка подэпигрупп которых полумодулярна вниз, пока не решена. Заметим, что и для обычных полугрупп аналогичная задача не решена; она была поставлена в [10, проблема 5.14]. В отличие от ситуации для случая полумодулярных вверх решёток, полугруппы с полумодулярной вниз решёткой подполугрупп не обязательно периодичны; например, как отмечено в [10, упражнение 9 к гл. II], указанным свойством обладает всякая свободная полугруппа. Так что решение указанной задачи для эпигрупп не даст в качестве частного случая решение аналогичной

задачи для обычных полугрупп. Информацию о группах с полумодулярной вниз решёткой подгрупп можно найти в [1, 6].

Следующие две теоремы доказаны в [12]. Их доказательства опираются на некоторые факты структурной теории эпигрупп, развитой в [3], и используют некоторые технические результаты из [11].

Теорема 3. *Для эпигруппы S решётка $\text{Subepi } S$ 0-модулярна тогда и только тогда, когда S — U -связка унипотентных эпигрупп.*

Теорема 4. *Для эпигруппы S решётка $\text{Subepi } S$ 0-дистрибутивна тогда и только тогда, когда S есть связка унипотентных эпигрупп, такая что для любых её компонент X, Y справедливо $XY \subseteq X$ или $XY \subseteq Y$.*

Следствия теорем 3 и 4, касающиеся вполне регулярных полугрупп, получаются из формулировок теорем простой заменой унипотентных эпигрупп на группы. При этом, как и в ситуации следствия 2, для следствия теоремы 3 можно указать некоторые особенности структуры рассматриваемых эпигрупп. А именно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. *Для вполне регулярной полугруппы S решётка $\text{Subepi } S$ 0-модулярна тогда и только тогда, когда S есть ординальная сумма полугрупп, каждая из которых есть сингулярная полугруппа или группа.*

Так как всякая $\wedge$ -полудистрибутивная решётка с нулём будет, очевидно, 0-дистрибутивной, следующая теорема, доказанная в [13], выделяет подкласс эпигрупп, фигурирующих в теореме 4.

Теорема 5. *Для эпигруппы S решётка $\text{Subepi } S$ $\wedge$ -полудистрибутивна тогда и только тогда, когда S удовлетворяет условию, указанному в теореме 4, и следующим дополнительным условиям:*

- а) *каждая компонента разложения S в связку унипотентных эпигрупп есть идеальное расширение локально циклической группы при помощи нильпотентной U -полугруппы;*
- б) *для любых $x, y \in S$ из того, что $xy \notin \text{Gr } S$, следует $xy \in \langle x \rangle \cup \langle y \rangle$.*

Так как полугруппа с $\wedge$ -полудистрибутивной решёткой подполугрупп периодична, частным случаем теоремы 5 является аналогичный результат для обычных полугрупп, полученный В. М. Ширяевым (см. соответствующую ссылку в [4] или [10]). Что касается следствия теоремы 5, относящегося к вполне регулярным полугруппам, то его формулировка получается из формулировки теоремы 4 заменой унипотентных эпигрупп на локально циклические группы. В [13] указаны также полугруппы, наличие которых среди подполугрупп эпигруппы S с $\wedge$ -полудистрибутивной решёткой $\text{Subepi } S$ обуславливает то, что эта решётка не является дистрибутивной.

Известно описание эпигрупп, решётка подэпигрупп которых разложима в прямое произведение. Соответствующий факт используется в качестве одного из технических средств при доказательствах утверждений, где фигурирует разложение в U -связку (выше это были теоремы 1–3). Не воспроизво-

для здесь формулировки этого факта, мы отсылаем заинтересованного читателя к [11, предложение 2.3].

Для ряда теоретико-решёточных условий задачи описания эпигрупп, решётка подэпигрупп которых удовлетворяет этим условиям, остаются пока нерешёнными. Кроме полумодулярности вниз, это относится, например, к свойству быть решёткой с дополнениями. Отметим в этой связи, что полугруппы с указанным ограничением на решётку подполугрупп (так называемые K -полугруппы) исследовались довольно обстоятельно (см. [4, глава III] или [10]). Одним из наиболее примечательных полученных здесь результатов является установленный С. И. Кацманом факт, что любая полугруппа вложима в K -полугруппу. В классе эпигрупп аналогичный факт, как нетрудно убедиться, не имеет места. Некоторые свойства периодических K -полугрупп были выявлены, но проблема их полного описания открыта; она отмечена в [10] как проблема 8.5.1. Задача описания эпигрупп, решётка подэпигрупп которых есть решётка с дополнениями, может тем самым рассматриваться как распространение упомянутой проблемы на класс эпигрупп.

Что касается, например, свойства быть решёткой с относительными дополнениями, то эпигруппы с такой подэпигрупповой решёткой являются, как легко заметить, периодическими, и их исчерпывающее описание было давно получено автором (см. соответствующую ссылку в [4] или [10]): это в точности ординальные суммы прямоугольных полугрупп.

4. Некоторые решёточно замкнутые классы эпигрупп

Две однотипные алгебраические системы называются *решёточно изоморфными*, если изоморфны решётки их подсистем. Класс систем $\mathcal{K}$ *решёточно замкнут* в содержащем его классе $\mathcal{A}$, если любая система из $\mathcal{A}$, решёточно изоморфная какой-либо системе из $\mathcal{K}$, сама принадлежит $\mathcal{K}$. В случае когда решёточно замкнутый класс состоит из одной системы, говорят, что эта система *решёточно определяется* (в $\mathcal{A}$). Если для класса $\mathcal{K}$ существует такое абстрактное теоретико-решёточное свойство θ , что система из $\mathcal{A}$ принадлежит $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда решётка её подсистем обладает свойством θ , то говорят, что класс $\mathcal{K}$ *решёточно характеризуем* в $\mathcal{A}$, а свойство θ называют *решёточной характеристикой* $\mathcal{K}$ в классе $\mathcal{A}$. Ясно, что решёточно характеризуемый класс является решёточно замкнутым.

Можно считать, что справедлива и обратная импликация. Действительно, если для решёточно замкнутого класса $\mathcal{K}$ в качестве θ рассмотреть свойство решётки быть изоморфной решётке подсистем какой-либо системы из $\mathcal{K}$, то θ оказывается решёточной характеристикой класса $\mathcal{K}$. В силу тавтологичности такой характеристики естественно при отыскании содержательных решёточных

характеристик интересоваться свойствами, выражаемыми в собственно решётчных терминах: с использованием решётчных операций, элементов или подмножеств решётки и т. п. Специальная линия в этом плане выделяется, если потребовать, чтобы рассматриваемые свойства формулировались на языке логики первого порядка; соответствующие характеристики называются *элементарными*. Применительно к подполугрупповым решёткам эта линия была развита довольно значительно (см. [4, гл. VI; 10, гл. VII]). Отметим, что большинство приводимых в данном разделе решётчных характеристик оказываются именно элементарными.

Говоря ниже о решёточной замкнутости или решёточной характеризуемости какого-либо класса K эпигрупп, мы всюду подразумеваем, что в роли A выступает класс всех эпигрупп.

В ряде решётчных характеристик участвует понятие однопокрывающего элемента решётки. Элемент x решётки L называется *однопокрывающим*, если множество всех элементов из L , строго меньших x , имеет наибольший элемент. Роль однопокрывающих элементов в решётке подэпигрупп обусловлена следующим фактом.

Лемма. Подэпигруппа X эпигруппы S является однопокрывающим элементом в решётке $\text{Subepi } S$ тогда и только тогда, когда X — циклическая эпигруппа индекса больше 1 (т. е. не группа), или примарная циклическая группа, или одноэлементная полугруппа (последнее имеет место, очевидно, тогда и только тогда, когда X — атом в $\text{Subepi } S$).

На этой лемме базируются, в частности, следующие три предложения, приведённые в [11].

Предложение 1. Эпигруппа S является периодической тогда и только тогда, когда в решётке $\text{Subepi } S$ каждый ненулевой элемент есть объединение однопокрывающих элементов.

Предложение 2. Неодноэлементная эпигруппа S является группой без кручения тогда и только тогда, когда решётка $\text{Subepi } S$ имеет единственный однопокрывающий элемент (который, очевидно, есть атом).

Предложение 3. Эпигруппа S является бесконечной циклической эпигруппой индекса n тогда и только тогда, когда решётка $\text{Subepi } S$ имеет в точности n однопокрывающих элементов, имеет ненулевой элемент, не являющийся объединением однопокрывающих элементов, и в случае $n = 1$ $\text{Subepi } S$ — дистрибутивная решётка с условием максимальнойности, а в случае $n > 1$ единица решётки $\text{Subepi } S$ (т. е. S) — однопокрывающий элемент.

Предложение 3 показывает, в частности, что каждая бесконечная циклическая эпигруппа решёточно определяется. Для конечных циклических эпигрупп (это, как упомянуто в разделе 2, в точности конечные циклические полугруппы) это не так: например, циклическая группа порядка pq , где p и q — различные простые числа, решёточно изоморфна трёхэлементной полугруппе с нулевым умножением. Имеется исчерпывающая классификация полугрупп, решёточно

изоморфных конечным циклическим полугруппам, и указаны все решёточно определяющиеся конечные циклические полугруппы (см. [4, раздел XI.4; 10, раздел XIII.4]). Эти результаты принадлежат частично А. Е. Евсееву и большей частью А. А. Либерману (см. соответствующие ссылки в [4, 10]).

Через $\mathcal{E}_n$ обозначается класс всех эпигрупп индекса не больше n . Заметим, что $\mathcal{E}_1$ есть не что иное, как класс всех вполне регулярных полугрупп¹. Анализ упомянутой классификации полугрупп, решёточно изоморфных конечным циклическим полугруппам, с учётом предложения 3 приводит к следующим утверждениям, формулируемым здесь впервые.

Теорема 6. *Класс $\mathcal{E}_n$ решёточно замкнут тогда и только тогда, когда $n \geq 5$. Класс всех эпигрупп индекса n решёточно замкнут тогда и только тогда, когда $n \geq 6$.*

Следующие два результата получены недавно автором данной статьи; их доказательства будут опубликованы в другом месте. Для формулировок этих результатов понадобится одно определение. Назовём элемент x решётки L с нулём *одноатомным*, если существует единственный атом $a \in L$, такой что $a \leq x$; этот атом будем обозначать через $\text{at}(x)$. Ясно, что подэпигруппа X эпигруппы S является одноатомным элементом в $\text{Subepi } S$ тогда и только тогда, когда X — унитарная эпигруппа.

Теорема 7. *Эпигруппа S разложима в связку (а тогда и в полурешётку) архимедовых эпигрупп тогда и только тогда, когда в решётке $\text{Subepi } S$ для любых одноатомных элементов C, D и различных атомов A, B , таких что $A, B \subseteq C \vee D$, $A \cap C = A \cap D = B \cap C = B \cap D = \emptyset$ и $A \vee B$ содержит более двух атомов этой решётки, существуют отличные от A и B атомы A', B' , такие что $A \vee B = A' \vee B'$.*

Теорема 8. *Эпигруппа S разложима в связку унитарных эпигрупп тогда и только тогда, когда в решётке $\text{Subepi } S$ для любых одноатомных элементов C, D и любого атома $A \subseteq C \vee D$ выполняется условие $A \subseteq \text{at}(C) \vee \text{at}(D)$.*

Теорема 7 перекрывает ранее доказанную в [11] теорему о том, что класс эпигрупп, разложимых в полурешётку архимедовых эпигрупп, решёточно замкнут.

Заметим, что класс архимедовых эпигрупп (равно как и класс периодических архимедовых полугрупп) не является решёточно замкнутым, что демонстрирует следующий тривиальный пример: двухэлементная сингулярная полугруппа решёточно изоморфна двухэлементной цепи, но первая архимедова, а вторая нет. Оказывается, этот контрпример является в некотором роде ключевым. А именно, для архимедовой эпигруппы S существует решёточно изоморфная ей неархимедова эпигруппа лишь при условии, когда ядро эпигруппы S — нетривиальная (т. е. содержащая более одного элемента) сингулярная полугруппа. Другими словами, справедлива следующая теорема, доказанная в [11].

¹Отметим ещё, что для любого n класс $\mathcal{E}_n$ является многообразием эпигрупп как унарных полугрупп. Некоторая информация, связанная с рассмотрением многообразий $\mathcal{E}_n$ (в том числе ряд открытых проблем), содержится в [3, 7].

Теорема 9. *Класс архимедовых эпигрупп, ядро которых либо тривиально, либо не является сингулярной полугруппой, решёточно замкнут.*

Так как ядро непериодической архимедовой эпигруппы, очевидно, не может быть полугруппой идемпотентов, такая эпигруппа принадлежит классу, фигурирующему в теореме 9. Отсюда с учётом предложения 1 вытекает следующий факт, отмеченный в [11].

Теорема 10. *Класс непериодических архимедовых эпигрупп решёточно замкнут.*

Ещё один пример решёточно замкнутого класса эпигрупп доставляет следующее утверждение, доказанное в [11].

Предложение 4. *Класс непериодических групп решёточно замкнут.*

В контрасте с предложением 1 класс периодических групп не является решёточно замкнутым, равно как и класс периодических вполне регулярных полугрупп. Это демонстрирует тривиальный пример циклической группы простого порядка, каковая решёточно изоморфна двухэлементной полугруппе с нулевым умножением. Класс непериодических вполне регулярных полугрупп также не является решёточно замкнутым. Контрпример здесь доставляется ординальной суммой циклических групп G_1 и G_2 , где G_1 бесконечна, а G_2 простого порядка; эта эпигруппа решёточно изоморфна аналогичной ординальной сумме, где G_1 — та же самая группа, а G_2 заменена на двухэлементную полугруппу с нулевым умножением.

В следующем утверждении, доказанном в [11], указана некоторая схема, дающая серию решёточно замкнутых классов вполне регулярных полугрупп.

Предложение 5. *Пусть $\mathcal{K}$ — решёточно замкнутый класс групп. Класс всех вполне регулярных полугрупп, максимальные подгруппы которых принадлежат $\mathcal{K}$, решёточно замкнут.*

С учётом предложений 2 и 4 получаем, в частности, что класс всех вполне регулярных полугрупп, максимальные подгруппы которых — это группы без кручения (непериодические группы) решёточно замкнут. Так как вполне простые полугруппы — это в точности вполне регулярные архимедовы полугруппы, из последнего утверждения с учётом теоремы 10 непосредственно вытекает следующий факт, отмечаемый здесь впервые.

Теорема 11. *Классы всех непериодических вполне простых полугрупп и всех вполне простых полугрупп, максимальные подгруппы которых — группы без кручения, решёточно замкнуты.*

Литература

- [1] Судзуки М. Строение группы и строение структуры её подгрупп. — М.: ИЛ, 1960.
- [2] Шеврин Л. Н. Полугруппы // Общая алгебра / под общ. ред. Л. А. Скорнякова. — М.: Наука, 1991. — С. 11—191.

- [3] Шеврин Л. Н. К теории эпигрупп. I, II // Мат. сб. — 1994. — Т. 185, № 8. — С. 129—160; № 9. — С. 153—176.
- [4] Шеврин Л. Н., Овсянников А. Я. Полугруппы и их подполугрупповые решётки. Ч. 1, 2. — Свердловск: Изд. Урал. ун-та, 1990; 1991.
- [5] The Concise Handbook of Algebra / A. V. Mikhalev, G. F. Pilz, eds. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.
- [6] Schmidt R. Subgroup Lattices of Groups. — Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
- [7] Shevrin L. N. Epigroups // Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebra / V. B. Kudryavtsev, I. G. Rosenberg, eds. — Berlin: Springer, 2005. — (NATO Sci. Ser. II. Mathematics, Physics and Chemistry; Vol. 207). — P. 331—380.
- [8] Shevrin L. N. On epigroups and their subepigroup lattices // The 2nd Int. Congress in Algebras and Combinatorics. — Xian, 2007. — P. 25—26.
- [9] Shevrin L. N., Ovsyannikov A. J. Semigroups and their subsemigroup lattices // Semigroup Forum. — 1983. — Vol. 27. — P. 1—154.
- [10] Shevrin L. N., Ovsyannikov A. J. Semigroups and Their Subsemigroup Lattices. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1996.
- [11] Shevrin L. N., Ovsyannikov A. J. On lattice properties of epigroups // Algebra Universalis. — 2008. — Vol. 59. — P. 209—235.
- [12] Wang Y., Jin Y. Epigroups whose subepigroup lattice is 0-modular or 0-distributive // Semigroup Forum. — 2009. — Vol. 78, No. 2. — P. 337—342.
- [13] Wang Y., Luo Y. Epigroups whose subepigroup lattice is meet semidistributive: Preprint. — 2008.

