PI-группы и PI-представления групп

Е. АЛАДОВА
Университет им. Бар-Илана, Рамат-Ган, Израиль
e-mail: aladovael@mail.ru

Б. ПЛОТКИН
Иерусалимский университет, Израиль
e-mail: plotkin@macs.biu.ac.il

УДК 521.5

Ключевые слова: PI-группа, алгебраическая PI-группа, PI-представление группы, унипотентные и унитреугольные представления групп, радикал представления группы.

Аннотация

Хорошо известно, что многие проблемы бернсайдовского типа имеют положительное решение для PI-групп и PI-алгебр. В настоящей статье мы рассматриваем различные проблемы бернсайдовского типа для PI-групп и PI-представлений групп.

Abstract

E. Aladova, B. Plotkin, PI-groups and PI-representations of groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 3—13.

It is well known that many famous Burnside-type problems have positive solutions for PI-groups and PI-algebras. In the present article, we also consider various Burnside-type problems for PI-groups and PI-representations of groups.

Посвящается памяти
замечательного человека и учителя
Александра Геннадиевича Куроша

1. Введение

Мы начнём с небольшого исторического обзора. Проблема Бернсайда состоит в следующем: является ли периодическая группа локально конечной? В 1964 г. Е. С. Голод получил отрицательное решение этой проблемы: он построил бесконечную периодическую конечно порождённую группу, которая аппроксимируется конечными группами. Этот результат — следствие теоремы Голода—Шафаревича [1]. С другой стороны, К. Прочези [14] и А. Токаренко [9] получили положительное решение проблемы Бернсайда для PI-групп: каждая периодическая PI-группа локально конечна.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 7, с. 3—13.

Проблема Бернсайда даёт большое разнообразие вопросов бернсайдовского типа, которые имеют положительное решение в случае PI-групп и PI-алгебр. Напомним основные определения.

Пусть K — поле, A — ассоциативная PI-алгебра с единицей над полем K, т. е. алгебра, удовлетворяющая некоторому полиномиальному тождеству.

Определение 1.1. Группа G называется PI-группой, если существует инъективный гомоморфизм $\rho\colon G \to A^*$ группы G в группу A^* всех обратимых элементов PI-алгебры A.

Определение 1.2. Элемент g группы G называется ниль-элементом, если для любого $x \in G$ существует такое число $n = n(g,x)$, что $\big[[x,\underbrace{g],\ldots,g}_{n}\big] = 1$.

Определение 1.3. Группа G называется ниль-группой, если любой её элемент является ниль-элементом.

Определение 1.4. Группа G называется энгелевой, если в ней выполняется тождество $\big[[x,\underbrace{y],\ldots,y}_{n}\big] = 1$ для некоторого n.

Любая локально нильпотентная группа является ниль-группой, но в общем случае обратное неверно: теорема Голода—Шафаревича [1] даёт отрицательный контрпример. В случае PI-групп существует положительно решение: любая ниль-PI-группа, а значит и энгелева группа, локально нильпотентна (см. [5,13]).

Более того, для энгелевых групп давно существует гипотеза.

Гипотеза 1.5. Произвольная энгелева группа не обязательно является локально нильпотентной.

Эта проблема открыта до сих пор: не известно, существует ли не локально нильпотентная энгелева группа.

Хорошо известна проблема бернсайдовского типа, поставленная Курошем для алгебраических алгебр. Напомним необходимые определения.

Определение 1.6. Алгебра A называется алгебраической, если любой её элемент $a \in A$ удовлетворяет некоторому полиномиальному тождеству $f(x) = 0$.

Определение 1.7. Алгебра A называется локально конечной, если любое конечное множество её элементов порождает подалгебру конечной размерности.

Любая локально конечная алгебра является алгебраической. Проблема Куроша состоит в следующем: является ли каждая алгебраическая алгебра локально конечной? В общем случае это неверно, но И. Капланский и А. Ширшов [2] дали положительный ответ для случая PI-алгебр: любая алгебраическая PI-алгебра локально конечна.

Мы рассматриваем вариант проблемы Куроша для групп. Ниже приводятся необходимые определения.

Определение 1.8. Элемент g группы G называется алгебраическим элементом, если для любого $x \in G$ подгруппа, порождённая всеми элементами вида $\big[[x,\underbrace{g],\ldots,g}_{n}\big]$ для любого $n \in \mathbb{N}$, является конечно порождённой.

Определение 1.9. Группа G называется алгебраической, если каждый её элемент является алгебраическим элементом.

Определение 1.10. Группа G называется локально нётеровой, если любая её конечно порождённая подгруппа нётерова.

Очевидно, что каждая локально нётерова группа является алгебраической. Мы рассматриваем вопрос о том, когда верно обратное утверждение. В разделе 2 мы показываем, что существует положительное решение этой проблемы для PI-групп.

Теорема 1.11. *Любая алгебраическая PI-группа локально нётерова.*

Фактически мы доказываем, что любая конечно порождённая алгебраическая PI-группа является хиршевой, т. е. конечным расширением полициклической.

Другой результат касается PI-представлений групп.

Пусть K — поле, V — K-модуль. Пусть G — группа, (V, G) — представление группы G в K-модуле V. Мы имеем гомоморфизм ρ группы G в группу автоморфизмов K-модуля V:

$$\rho\colon G \to \operatorname{Aut} V, \quad g \to g^{\rho}.$$

Мы можем считать, что группа G действует в модуле V по правилу

$$(v, g) \to v \circ g = g^{\rho}(v)$$

для всех $v \in V$, $g \in G$. Заметим, что групповая алгебра KG также действует в модуле V.

Пусть F — свободная группа счётного ранга со свободными порождающими $x_1, x_2, \ldots$, KF — групповая алгебра свободной группы F. Пусть $u(x_1, \ldots, x_n)$ — элемент из KF.

Определение 1.12. Скажем, что представление (V, G) удовлетворяет тождеству $y \circ u(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$, если для всех $v \in V$ и всех $g_i \in G$ имеет место равенство $v \circ u(g_1, \ldots, g_n) = 0$.

Определение 1.13. Элемент $g \in G$ называется унипотентным элементом представления (V, G), если существует такое число $n = n(g)$, что $x \circ (g-1)^n = 0$ для любого $x \in V$.

Определение 1.14. Представление (V, G) называется унипотентным, если любой элемент $g \in G$ является унипотентным элементом представления (V, G).

Определение 1.15. Представление (V, G) называется унитреугольным, если оно удовлетворяет тождеству $x \circ (y_1 - 1) \cdots (y_n - 1) \equiv 0$.

При фиксированном n мы имеем многообразие унитреугольных представлений.

Определение 1.16. Представление (V, G) называется локально унитреугольным, если для любой конечно порождённой подгруппы H группы G подпредставление (V, H) является унитреугольным.

Каждое локально унитреугольное представление является унипотентным. Существует следующая проблема бернсайдовского типа для унипотентных представлений.

Проблема 1.17. Является ли каждое унипотентное представление локально унитреугольным?

В общем случае это неверно. Мы доказываем (см. раздел 3), что имеется положительно решение этой проблемы для PI-представлений групп.

Пусть (V, G) — представление группы G в K-модуле V. Пусть $\bar{G} = G/\operatorname{Ker}(V, G)$ и $(V, \bar{G})$ — уточнение представления (V, G).

Определение 1.18. Представление (V, G) называется PI-представлением, если линейная оболочка $\langle \bar{G} \rangle$ группы $\bar{G}$ в алгебре $\operatorname{End} V$ является PI-алгеброй.

Имеет место следующая теорема (см. раздел 3).

Теорема 1.19. *Каждое унипотентное PI-представление является локально унитреугольным.*

В рамках изучения унипотентных представлений мы также рассматриваем следующую проблему.

Проблема 1.20. Существует ли унипотентный радикал для произвольного представления группы?

Хорошо известно, что любая группа имеет локально нильпотентный радикал (радикал Плоткина—Хирша), т. е. единственную максимальную нормальную локально нильпотентную подгруппу [6,10], но это неверно для локально разрешимого радикала, так как существуют группы без локально разрешимого радикала (см. результаты Г. Баумслага, Л. Ковача, Б. Нейманна, В. Микаеляна). Однако С. Пихтильков доказал, что любая PI-группа имеет локально разрешимый радикал [4].

Пусть (V, G) — представление группы G в модуле V.

Определение 1.21. Единственная максимальная нормальная подгруппа H группы G, такая что подпредставление (V, H) является локально унитреугольным, называется локально унитреугольным радикалом представления (V, G).

Определение 1.22. Единственная максимальная нормальная подгруппа H группы G, такая что подпредставление (V, H) является унипотентным, называется унипотентным радикалом представления (V, G).

Известно [7], что для каждого представления группы существует локально унитреугольный радикал. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.23. *Для произвольного PI-представления существует унипотентный радикал, который совпадает с локально унитреугольным радикалом.*

Данная теорема является непосредственным следствием теоремы 1.19.

Первый автор поддержан Израильским научным фондом, грант 1178/06.

2. Алгебраические PI-группы

В этом разделе мы докажем теорему 1.11, которая утверждает, что каждая алгебраическая PI-группа локально нётерова.

Доказательство теоремы 1.11. Пусть G — алгебраическая конечно порождённая PI-группа. Так как G является PI-группой, то существует такая PI-алгебра A, что группа G — подгруппа группы обратимых элементов алгебры A. Пусть $L(A)$ — радикал Левицкого алгебры A. Рассмотрим алгебру $A/L(A)$. Группа G действует на $A/L(G)$, и ядро этого действия — подгруппа $H = G \cap \cap \big(1+L(A)\big)$. Более того, группа H является локально нильпотентной подгруппой группы G [13].

Рассмотрим группу $\bar{G} = G/H$. Известно [2], что существует вложение $A/L(A) \to \mathrm{M}_n(R)$, где $\mathrm{M}_n(R)$ — алгебра $(n \times n)$-матриц, а R — коммутативное кольцо с единицей, являющееся декартовой суммой полей. Таким образом, группа $\bar{G}$ — подгруппа в группе $\mathrm{GL}_n(R)$ обратимых элементов алгебры $\mathrm{M}_n(R)$.

Так как группа G является конечно порождённой алгебраической группой, то группа $\bar{G}$ также является конечно порождённой и алгебраической. Пусть $\bar{G} = \langle \bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_m \rangle$, $\bar{g}_i \in \mathrm{GL}_n(R)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть $\bar{g}_i = (\alpha^i_{st})$ и S — множество всех таких элементов α^i_{st}, где $\alpha^i_{st} \in R$, $i = 1, 2, \ldots m$, $s, t = 1, 2, \ldots n$. Заметим, что множество S конечно.

Пусть R_0 — подкольцо кольца R, порождённое множеством S. Кольцо R_0 является конечно порождённым коммутативным кольцом, значит, оно нётерово. Из теоремы Ласкера [16] следует, что кольцо R_0 имеет конечное число главных идеалов I_α, таких что $\bigcap\limits_\alpha I_\alpha = 0$ и R_0/I_α — поля. Тогда, используя теорему Ремака, мы получаем, что R_0 — декартова сумма полей R_0/I_α.

Пусть $\mathrm{M}_n(R_0)$ — алгебра матриц над R_0. Тогда $\bar{G} \subset \mathrm{M}_n(R_0)$ и $\mathrm{M}_n(R_0)$ — подалгебра алгебры $\bigoplus\limits_\alpha \mathrm{M}_n(R_0/I_\alpha)$, где $\alpha \in \mathbb{N}$ и $\alpha < \infty$.

Таким образом, группа $\bar{G}$ вложена в прямое произведение конечного числа групп матриц над полями:

$$\bar{G} \to \prod_\alpha \mathrm{GL}_n(R_0/I_\alpha), \quad \alpha < \infty.$$

Согласно хорошо известной альтернативе Титса [15], конечно порождённая линейная группа либо содержит неабелеву свободную группу, либо имеет разрешимую подгруппу конечного индекса. Так как группа $\bar{G}$ является алгебраической, значит, и любая её подгруппа является алгебраической, а свободная группа не является алгебраической. Таким образом, группа $\bar{G}$ содержит разрешимую подгруппу $\bar{G}_0$ конечного индекса. Доказано, что любая локально разрешимая алгебраическая группа является локально нётеровой и, следовательно, локально полициклической (см. [7]). Таким образом, подгруппа $\bar{G}_0$ является конечно порождённой и локально полициклической, значит, она полициклическая. Более того, группа $\bar{G}_0$ — подгруппа конечного индекса, значит, группа $\bar{G}$ — хиршева группа.

Напомним, что $\bar{G} = G/H$ и H — локально нильпотентная подгруппа группы G. Если $\bar{G}_0 = G_0/H$, то группа G_0 — расширение локально нильпотентной группы H с помощью разрешимой группы $\bar{G}_0$, и следовательно, G_0 является алгебраической. Таким образом, группа G_0 является локально нётеровой и, значит, полициклической. Более того, G_0 — подгруппа конечного индекса в G, так как $\bar{G}_0$ — подгруппа конечного индекса в $\bar{G}$. Итак, в группе G имеется полициклическая подгруппа G_0 конечного индекса, значит, G — хиршева группа. А каждая хиршева группа нётерова. Значит, группа G нётерова.

Таким образом, любая не конечно порождённая алгебраическая PI-группа будет локально нётеровой. Теорема доказана. □

3. Унипотентные PI-представления групп

В данном разделе мы докажем теорему 1.19. Эта теорема является обобщением следующей известной теоремы Е. Колчина [12].

Теорема 3.1. *Пусть G — линейная группа, $G \leqslant \mathrm{GL}_n(K)$. Пусть (K^n, G) — унипотентное представление группы G. Тогда представление (K^n, G) является унитреугольным.* □

Заметим, что представление (K^n, G) из этой теоремы является PI-представлением, так как группа G вложена в алгебру $\mathrm{M}_n(K)$, которая удовлетворяет стандартному тождеству Амицура—Левицкого.

Для доказательства теоремы 1.19 нам необходимы две леммы.

Лемма 3.2. *Пусть (V, G) — представление группы G, и пусть G порождается множеством M. Пусть $\hat{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ — некоторая последовательность из множества M^n. Если каждая последовательность $\hat{h}$ удовлетворяет равенству $x \circ (h_1 - 1) \cdots (h_n - 1) = 0$ для всех $x \in V$, то представление (V, G) удовлетворяет тождеству $x \circ (y_1 - 1) \cdots (y_n - 1) \equiv 0$.*

Доказательство. Представление (V, G) удовлетворяет тождеству $x \circ (y_1 - 1) \cdots (y_n - 1) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда модуль V имеет G-инвариантный ряд подмодулей длины n

$$0 = V_n \subset V_{n-1} \subset \ldots \subset V_1 \subset V_0 = V,$$

такой что группа G действует тривиально в факторах этого ряда.

Мы докажем лемму индукцией по длине ряда n. Пусть $n = 1$, тогда для любого $h \in M$ имеем

$$x \circ (h - 1) = 0 \quad \text{или} \quad x \circ h = x \quad \text{для всех} \quad x \in V.$$

Для всех h_1, h_2 из множества M имеем равенства

$$x \circ (h_1 h_2) = (x \circ h_1) \circ h_2 = x \circ h_2 = x.$$

Таким образом, группа G действует тривиально на V, и мы имеет ряд

$$0 = V_1 \subset V_0 = V.$$

Пусть теперь утверждение леммы верно для всех натуральных чисел, не превосходящих $n-1$. Пусть $(h_1, \ldots, h_n)$ — произвольная последовательность из M^n, и пусть для любого $x \in V$ верно равенство

$$x \circ (h_1 - 1) \cdots (h_n - 1) = 0.$$

Пусть V_{n-1} — линейная оболочка всех элементов вида $x \circ (h_1 - 1) \cdots (h_{n-1} - 1)$. Элемент $h_n - 1$ аннулирует подмодуль V_{n-1}, так как этот элемент аннулирует все порождающие модуля V_{n-1} и для любого $v \in V_{n-1}$ имеет место равенство $v \circ (h_n - 1) = 0$. Так как h_n — произвольный элемент из M, то $v \circ (g-1) = 0$ для всех $g \in G$ и всех $v \in V_{n-1}$. Таким образом, группа G действует тривиально на модуле V_{n-1}.

Рассмотрим представление $(V/V_{n-1}, G)$. Для всех $h_1, \ldots, h_{n-1} \in M$ и всех $x \in V$ имеем

$$x \circ (g_1 - 1) \cdots (g_{n-1} - 1) = 0.$$

Используя индуктивное предположение, мы получаем, что представление $(V/V_{n-1}, G)$ удовлетворяет тождеству

$$x \circ (y_1 - 1) \cdots (y_{n-1} - 1) \equiv 0.$$

Это значит, что существует ряд подмодулей модуля V/V_{n-1}

$$0 = V_{n-1}/V_{n-1} \subset V_{n-2}/V_{n-1} \subset \ldots \subset V_1/V_{n-1} \subset V/V_{n-1},$$

такой что группа G действует тривиально в факторах.

Рассмотрим следующий ряд подмодулей модуля V:

$$0 = V_n \subset V_{n-1} \subset \ldots \subset V_1 \subset V.$$

Группа G действует тривиально в факторах этого ряда. Таким образом, представление (V, G) удовлетворяет тождеству

$$x \circ (y_1 - 1) \cdots (y_n - 1) \equiv 0.$$

Лемма доказана. □

Пусть (V, G) — PI-представление. Пусть $(V, \bar{G})$ — уточнение представления (V, G) и $A = \langle \bar{G} \rangle$ — линейная оболочка группы $\bar{G}$ в алгебре $\operatorname{End} V$. Заметим, что A — PI-алгебра. В то же время мы можем рассмотреть регулярное действие группы $\bar{G}$ в алгебре A, предполагая, что группа $\bar{G}$ вложена в A. Таким образом, мы имеем представление $(A, \bar{G})$ группы $\bar{G}$.

Лемма 3.3. *Пусть A_1 — нильпотентный идеал алгебры A и представление $(A/A_1, \bar{G})$ удовлетворяет тождеству $x \circ (y_1 - 1) \cdots (y_n - 1) \equiv 0$. Тогда представления $(A, \bar{G})$, $(V, \bar{G})$ и (V, G) являются унитреугольными.*

Доказательство. Пусть $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_n$ — произвольные элементы группы $\bar{G}$. Так как представление $(A/A_1, \bar{G})$ удовлетворяет тождеству $x \circ (y_1 - 1) \cdots (y_n - 1) \equiv 0$, то элемент $(\bar{g}_1 - 1) \cdots (\bar{g}_n - 1)$ принадлежит идеалу A_1.

Пусть A_1 — нильпотентный идеал класса нильпотентности m, и пусть элементы

$$(\bar{g}_{11}-1)(\bar{g}_{12}-1)\cdots(\bar{g}_{1n}-1),\ (\bar{g}_{21}-1)(\bar{g}_{22}-1)\cdots(\bar{g}_{2n}-1),\ldots,\\ (\bar{g}_{m1}-1)(\bar{g}_{m2}-1)\cdots(\bar{g}_{mn}-1),$$

где $\bar{g}_{11},\ldots,\bar{g}_{mn}$ — произвольные элементы группы $\bar{G}$, принадлежат A_1. Произведение этих элементов равно нулю:

$$(\bar{g}_{11}-1)\cdots(\bar{g}_{mn}-1)=0.$$

Значит, представления $(A,\bar{G})$ и $(V,\bar{G})$ удовлетворяют тождеству

$$x\circ(y_{11}-1)\cdots(y_{mn}-1)\equiv 0.$$

Таким образом, представления $(A,\bar{G})$ и $(V,\bar{G})$ являются унитреугольными.

Для представлений групп имеет место следующее утверждение [8]: класс представлений групп является многообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подпредставлений, гомоморфных образов, декартовых произведений и насыщений.

Напомним, что класс представлений групп $\mathfrak{X}$ замкнут относительно насыщения, если верно следующее условие: если представление (V,H) лежит в $\mathfrak{X}$, то все представления (V,G), такие что (V,H) является правым эпиморфным образом представления (V,G), также лежат в $\mathfrak{X}$.

Таким образом, представление (V,G) также является унитреугольным. □

Замечание. Для PI-представлений мы имеем следующее свойство: если PI-представление (V,G) удовлетворяет тождеству

$$x\circ(y_1-1)\cdots(y_n-1)\equiv 0,$$

то представление $(A,\bar{G})$ также удовлетворяет данному тождеству.

Действительно, пусть (V,G) — PI-представление, $(V,\bar{G})$ — его уточнение и $A=\langle\bar{G}\rangle$. Таким образом, мы имеем точное представление (V,A) алгебры A в модуле V.

Пусть PI-представление (V,G) удовлетворяет тождеству

$$x\circ(y_1-1)\cdots(y_n-1)\equiv 0.$$

Тогда точное представление $(V,\bar{G})$ также удовлетворяет этому тождеству. Таким образом, для любого $x\in V$ элемент $(\bar{g}_1-1)\cdots(\bar{g}_n-1)\in K\bar{G}$ действует как ноль. Так как представление (V,A) является точным, имеет место равенство $(\bar{g}_1-1)\cdots(\bar{g}_n-1)=0$. Тогда для любого $a\in A$ имеем

$$a\cdot(\bar{g}_1-1)\cdots(\bar{g}_n-1)=0,$$

значит, регулярное представление $(A,\bar{G})$ также удовлетворяет тождеству

$$x\circ(y_1-1)\cdots(y_n-1)\equiv 0.$$

Аналогичным образом можно показать, что если PI-представление (V, G) удовлетворяет тождеству

$$x \circ (g-1)^n = 0,$$

то представление $(A, \bar{G})$ также удовлетворяет этому тождеству.

Теперь мы можем доказать теорему 1.19.

Доказательство теоремы 1.19. Пусть (V, G) — унипотентное PI-представление, $(V, \bar{G})$ — его уточнение и $A = \langle \bar{G} \rangle$ — линейная оболочка группы $\bar{G}$ в алгебре $\operatorname{End} V$. Можно заметить, что тогда регулярное представление $(A, \bar{G})$ также унипотентно.

Допустим, что группа $\bar{G}$ является конечно порождённой, и пусть $\bar{G} = \operatorname{gr}\langle M \rangle$, где M — конечное множество. Мы докажем, что представление $(V, \bar{G})$ является унитреугольными, следовательно, представление (V, G) также будет унитреугольным [8].

Из общей теории [2] следует, что PI-алгебра A имеет ряд идеалов

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A,$$

где A_1 — сумма нильпотентных идеалов алгебры A, A_2 — радикал Левицкого алгебры A. Кроме того, группа $\bar{G}$ действует в факторах A/A_1 и A/A_2.

Мы также имеем ряд подгрупп в группе $\bar{G}$:

$$\bar{1} = \bar{G}_0 \subset \bar{G}_1 \subset \bar{G}_2 \subset \bar{G},$$

где $\bar{G}_1$ — ядро действия $\bar{G}$ в A/A_1, $\bar{G}_2$ — ядро действия $\bar{G}$ в A/A_2.

Тогда из общей теории [2] также следует, что существует инъективный гомоморфизм

$$\tau\colon A/A_2 \to \mathrm{M}_n(R),$$

где $\mathrm{M}_n(R)$ — алгебра матриц над коммутативным кольцом R с единицей и данное кольцо K содержится в R (см. [2]). Мы можем рассмотреть алгебру $\mathrm{M}_n(R)$ как алгебру над K. Таким образом, гомоморфизм τ является гомоморфизмом алгебр над K. Более того, мы имеем представление $\big(R^n, \mathrm{M}_n(R)\big)$.

Представление $(A/A_2, \bar{G}/\bar{G}_2)$ является унипотентным, так как оно есть гомоморфный образ унипотентного представления $(A, \bar{G})$. Элемент $\bar{g} \in \bar{G}$ является унипотентным элементом представления $(A, \bar{G})$, если элемент $\bar{g} - 1$ является нильпотентным элементом алгебры A.

Группа $(\bar{G}/\bar{G}_2)^\tau$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$ всех обратимых элементов алгебры $\mathrm{M}_n(R)$. Для каждого элемента $\tilde{g} \in G/G_2$ элемент $\tilde{g} - 1$ из A/A_2 является нильпотентным, так как представление $(A/A_2, \bar{G}/\bar{G}_2)$ унипотентное. Образ этого элемента в алгебре $\mathrm{M}_n(R)$ также нильпотентный элемент. Таким образом, представление $(R^n, (\bar{G}/\bar{G}_2)^\tau)$ унипотентно. Согласно теореме Колчина оно будет унитреугольным.

Хорошо известная теорема Л. Калужнина [11] утверждает, что если представление $(V, \bar{G})$ группы $\bar{G}$ является точным и n-унитреугольным, то группа $\bar{G}$ нильпотентная класса нильпотентности $n-1$.

Рассмотрим представление $(R^n, \bar{G}/\bar{G}_2)$. Это представление точное, так как регулярное представление $(A/A_2, \bar{G}/\bar{G}_2)$ и представление $(R^n, A/A_2)$ являются точными. Более того, представление $(R^n, (\bar{G}/\bar{G}_2)^\tau)$ унитреугольное, и следовательно, представление $(R^n, \bar{G}/\bar{G}_2)$ также является унитреугольным. Таким образом, группа $\bar{G}/\bar{G}_2$ нильпотентна.

Так как представление $(A/A_2, \bar{G}/\bar{G}_2)$ унипотентное и группа $\bar{G}/\bar{G}_2$ — конечно порождённая нильпотентная группа, то из [7] следует, что это представление унитреугольное. Таким образом, представление $(A/A_2, \bar{G})$ также является унитреугольным.

A_2/A_1 — нильпотентный идеал алгебры A/A_1 и $(A/A_1)/(A_2/A_1) \cong A/A_2$. Используя лемму 3.3, получаем, что представление $(A/A_1, \bar{G})$ также унитреугольное.

Пусть представление $(A/A_1, \bar{G})$ удовлетворяет тождеству

$$x \circ (y_1 - 1) \cdots (y_m - 1) \equiv 0.$$

Напомним, что мы рассматриваем конечно порождённую группу $\bar{G}$ с порождающим множеством M. Пусть $\hat{g} = (\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_m)$ — последовательность элементов из множества M^m. Тогда элемент $(\bar{g}_1 - 1) \cdots (\bar{g}_m - 1)$ лежит в A_1. Так как множество различных последовательностей $\hat{g}$ конечно, то существует такой нильпотентный идеал $A_1' \subset A_1$, что для любого $\hat{g}$ имеем $(\bar{g}_1 - 1) \cdots (\bar{g}_m - 1) \in A_1'$. Так как A_1' — идеал алгебры A, то он замкнут относительно регулярного действия группы $\bar{G}$, и мы можем рассмотреть представление $(A/A_1', \bar{G})$. Согласно лемме 3.2 представление $(A/A_1', \bar{G})$ удовлетворяет тождеству

$$x \circ (y_1 - 1) \cdots (y_m - 1) \equiv 0.$$

Таким образом, оно является унитреугольным. Используя лемму 3.3, мы заключаем, что представление (V, G) также унитреугольное.

Для не конечно порождённой группы G получаем, что представление (V, G) является локально унитреугольным. Теорема доказана. □

Из теоремы 1.19 непосредственно следует теорема 1.23, утверждающая, что существует унипотентный радикал для произвольного PI-представления и этот радикал совпадает с локально унитреугольным радикалом.

Литература

[1] Голод Е. С., Шафаревич И. Р. О башне полей классов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — Т. 28. — С. 261—272.

[2] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.

[3] Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах. I, II, III // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1968. — Т. 32. — С. 212—244; 251—524; 709—731.

[4] Пихтильков С. А. О первичном радикале PI-представимых групп // Мат. заметки. — 2002. — Т. 72, вып. 5. — С. 739—744.

[5] Платонов В. П. Энгелевы элементы и радикал в PI-алгебрах и топологических группах // ДАН СССР. — 1965. — Т. 161, № 2. — С. 288—291.

[6] Плоткин Б. И. О некоторых признаках локально нильпотентных групп // Успехи мат. наук. — 1954. — Т. 9, № 3 (61). — С. 181—187.

[7] Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. — М.: Наука, 1966.

[8] Плоткин Б. И., Вовси С. М. Многообразия представлений групп. Общая теория, связи и приложения. — Рига: Зинатне, 1983.

[9] Токаренко А. О линейных группах над кольцами // Сиб. мат. журн. — 1968. — Т. 9, № 4. — С. 951—959.

[10] Hirsch K. A. Über lokal-nilpotente Gruppen // Math. Z. — 1955. — Vol. 63. — P. 290—294.

[11] Kaloujnine L. Über gewisse Beziehungen zwischen einer Gruppe und ihren Automorphismen // Beriliner Math. Tagung. — 1953. — P. 164—172.

[12] Kolchin E. R. On certain concepts in the theory of algebraic matrix groups // Ann. Math. — 1948. — Vol. 49. — P. 774—789.

[13] Plotkin B. I. Notes on Engel groups and Engel elements in groups. Some generalizations // Izv. Ural. Gos. Univ. Mat. Mekh. — 2005. — Vol. 36, no. 7. — P. 153—166; 192—193.

[14] Procesi C. The Burnside problem // J. Algebra. — 1966. — Vol. 4. — P. 421—425.

[15] Tits J. Free subgroups in linear groups // J. Algebra. — 1972. — Vol. 20. — P. 250—270.

[16] Zariski O., Samuel P. Commutative Algebra. Vol. 1. — Princeton: Van Nostrand, 1958.