Антиизоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным*

И. Н. БАЛАБА
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ibalaba@tula.net

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.552

Ключевые слова: градуированные кольца эндоморфизмов, антиполулинейный изоморфизм, градуированная антиэквивалентность.

Аннотация

Получены критерии, решающие вопрос о том, когда антиизоморфизм градуированных колец эндоморфизмов строгих gr-образующих модулей индуцируется градуированной антиэквивалентностью Мориты или градуированным антиполулинейным преобразованием.

Abstract

I. N. Balaba, A. V. Mikhalev, Anti-isomorphisms of graded endomorphism rings of graded modules close to free ones, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 23—36.

We obtain the criteria for anti-isomorphism of graded endomorphism rings of the strict gr-generators induced by graded Morita anti-equivalence or a graded anti-semilinear isomorphism.

Наряду с описанием изоморфизмов колец эндоморфизмов модулей значительный интерес представляет описание антиизоморфизмов колец эндоморфизмов.

Р. Бэром [6] было установлено, что кольца линейных преобразований $\mathrm{End}(V_D)$ и $\mathrm{End}(W_E)$ линейных пространств V_D и W_E над телами D и E соответственно антиизоморфны в том и только том случае, если линейные пространства V_D и W_E конечномерны и существует антиполулинейное преобразование сопряжённого пространства ${}_DV^*$ на пространство W_E, которое индуцирует исходный антиизоморфизм. Л. Гевирцман [12, 13] попытался расширить этот результат на классы свободных и локально свободных модулей над

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 08-01-00790-а.

кольцом главных идеалов. К. Дж. Уолфсон [17] отметил ошибочность некоторых результатов Л. Гевирцмана; он построил пример пары локально свободных (но не свободных) модулей несчётного ранга, имеющих антиизоморфные кольца эндоморфизмов, и привёл критерий индуцируемости антиизоморфизма колец эндоморфизмов строгих образующих модулей антиполулинейным преобразованием. Одним из авторов совместно с К. И. Бейдаром [5] был установлен критерий индуцируемости антиизоморфизма колец эндоморфизмов строгих образующих модулей антиэквивалентностью Мориты, откуда, в частности, следовало, что любой антиизоморфизм колец эндоморфизмов прообразующих модулей индуцируется антиэквивалентностью Мориты (этот результат можно считать аналогом теоремы М. Л. Боллы [11] для антиизоморфизмов). Отметим, что критерии индуцируемости изоморфизма колец эндоморфизмов строгих образующих модулей полным вложением, эквивалентностью Мориты или полулинейным преобразованием были даны в [8].

В последние десятилетия отмечается значительный интерес к алгебраическим объектам, снабжённым градуировкой. При этом специальные классы колец и модулей связываются с соответствующими классами градуированных колец и модулей [16]. В частности, вместо кольца эндоморфизмов для градуированного модуля естественно рассматривать градуированное кольцо эндоморфизмов. В [4] авторами были получены критерии, решающие вопрос о том, когда изоморфизм градуированных колец изоморфизмов градуированных модулей, имеющих gr-свободное циклическое прямое слагаемое, индуцируется gr-образующим модулем, градуированной эквивалентностью Мориты или полулинейным преобразованием, а в [3] анонсирован критерий индуцируемости антиизоморфизма градуированных колец эндоморфизмов таких градуированных модулей антиполулинейным преобразованием.

Целью данной работы является получение критериев индуцируемости антиизоморфизмов градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, имеющих gr-свободное циклическое прямое слагаемое, градуированной антиэквивалентностью Мориты или градуированным антиполулинейным преобразованием.

Все кольца предполагаются ассоциативными с единицей 1, все модули — унитарными; G — мультипликативная группа с единичным элементом e.

Кольцо A называется *G-градуированным* (или *градуированным по группе G*), если $A = \bigoplus\limits_{g\in G} A_g$, где $\{A_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп кольца A и $A_gA_h \subseteq A_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Элементы множества $h(A) = \bigcup\limits_{g\in G} A_g$ называются *однородными элементами* кольца, а ненулевой элемент $a \in A_g$ называется *однородным элементом степени g* (обозначение $\deg a = g$).

Правый A-модуль M называется *G-градуированным*, если $M = \bigoplus\limits_{g\in G} M_g$, где $\{M_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп в абелевой группе $(M, +)$, таких что $M_hA_g \subseteq M_{hg}$ для всех $h, g \in G$.

Аналогично можно определить левый G-градуированный модуль и G-градуированный бимодуль. Чтобы подчеркнуть, с какой стороны определена структура модуля, будем в этих ситуациях использовать обозначения: M_A, ${}_AM$, ${}_AM_R$ и т. п., здесь ${}_AM_R$ обозначает A-R-бимодуль (левый A-модуль и правый R-модуль, при этом $(am)r = a(mr)$ для всех $a \in A$, $m \in M$, $r \in R$).

Обозначим через $\mathrm{mod}\text{-}A$ ($A\text{-}\mathrm{mod}$) категорию правых (левых) A-модулей, а через $\mathrm{gr.mod}\text{-}A$ ($A\text{-}\mathrm{gr.mod}$) — категорию правых (левых) G-градуированных A-модулей, объектами которой являются правые (левые) G-градуированные A-модули, а морфизмами — сохраняющие градуировку гомоморфизмы.

Для $M_A, N_A \in \mathrm{gr.mod}\text{-}A$ обозначим через $\mathrm{HOM}(M_A, N_A)_g$ множество *однородных гомоморфизмов степени* g, т. е. A-линейных отображений, для которых $f(M_h) \subseteq N_{gh}$ для всех $h \in G$. Ясно, что $\mathrm{HOM}(M_A, N_A) = \bigoplus\limits_{g\in G} \mathrm{HOM}(M_A, N_A)_g$ — градуированная абелева группа, а $\mathrm{END}(M_A) = \mathrm{HOM}(M_A, M_A)$ — градуированное кольцо, которое называется *градуированным кольцом эндоморфизмов* градуированного A-модуля M_A. Если группа G конечна или модуль M_A конечно порождён, то $\mathrm{END}(M_A)$ совпадает с кольцом эндоморфизмов $\mathrm{End}(M_A)$ модуля M_A, рассматриваемого без градуировки [16, следствие 1.2.11]. При рассмотрении левых A-модулей гомоморфизмы будем писать справа; $f \in \mathrm{HOM}({}_AM, {}_AN)_g$ означает, что $(M_h)f \subseteq N_{hg}$.

Если $M = \bigoplus\limits_{g\in G} M_g$ — градуированный модуль и $\sigma \in G$, то *σ-сдвигом* $M(\sigma)$ называется модуль M, рассматриваемый с градуировкой $M(\sigma)_g = M_{\sigma g}$ для правого модуля (и $M(\sigma)_g = M_{g\sigma}$ для левого).

Градуированный A-модуль U_A называется *gr-образующим*, если модуль $V = \bigoplus\limits_{\sigma\in G} U(\sigma)$ является образующим в категории $\mathrm{gr.mod}\text{-}A$. Эквивалентные определения gr-образующего модуля можно найти в [4, лемма 2.1]. Конечно порождённый проективный gr-образующий модуль называется *gr-прообразующим*.

Градуированный A-модуль M_A называется *строгим gr-образующим*, если он имеет в качестве прямого слагаемого gr-свободный модуль ранга 1. Как было отмечено в [4], в этом случае существует такой однородный идемпотент $u \in \mathrm{END}(M_A)$, что $uM \cong A(\sigma)$ для некоторого $\sigma \in G$; u называется *однородным идемпотентным эндоморфизмом ранга* 1 (обозначение $\mathrm{gr.r}(u) = 1$).

Пусть $A = \bigoplus\limits_{g\in G} A_g$ — G-градуированное кольцо и A^{op} — противоположное кольцо, т. е. $x \circ y = yx$ для любых $x, y \in A$. Положим $A^{\mathrm{op}}_g = A_{g^{-1}}$, тогда $A^{\mathrm{op}} = \bigoplus\limits_{g\in G} A^{\mathrm{op}}_g$ — G-градуированное кольцо.

Если $M \in A\text{-}\mathrm{gr.mod}$, то, положив $M^{\mathrm{op}}_g = M_{g^{-1}}$, получим, что $M^{\mathrm{op}} = \bigoplus\limits_{g\in G} M^{\mathrm{op}}_g \in \mathrm{gr.mod}\text{-}A^{\mathrm{op}}$, где $m \circ a = am$ для любых $a \in A^{\mathrm{op}}$, $m \in M^{\mathrm{op}}$.

Отображение $\varphi\colon A \to B$ градуированных по группе G колец называется *антигомоморфизмом* (*антиизоморфизмом*) *градуированных колец*, если φ является антигомоморфизмом (антиизоморфизмом) колец (т. е. $\varphi(x+y) = \varphi(y)+\varphi(x)$ и $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$ для всех $x, y \in A$) и $\varphi(A_g) \subseteq B_{g^{-1}}$ для всех $g \in G$.

Легко убедиться, что если φ является антиизоморфизмом градуированных колец A и B, то φ является изоморфизмом градуированных колец A и B^{op}.

Пусть M_A — правый G-градуированный A-модуль. Тогда левый G-градуированный A-модуль $M^* = \mathrm{HOM}(M_A, A_A)$ называют *дуальным* к модулю M_A. Модуль $M^{**} = (M^*)^* = \mathrm{HOM}({}_A\,\mathrm{HOM}(M_A, A_A), {}_A A)$ называется *бидуальным* к модулю M_A.

Как и в неградуированном случае, будем использовать обозначения

$$\langle f, x\rangle = f(x), \quad \langle f, \varphi\rangle = (f)\varphi \quad \text{для} \quad x \in M_A, \quad f \in M^*, \quad \varphi \in M^{**}.$$

Легко убедиться, что существует канонический гомоморфизм градуированных A-модулей $\omega_M \colon M \to M^{**}$, такой что

$$\langle f, \omega_M(m)\rangle = \langle f, m\rangle \quad \text{для всех} \quad m \in M, \quad f \in M^*.$$

Градуированный A-модуль M_A будем называть *полурефлексивным* (или *модулем без кручения в смысле Басса*), если ω_M является мономорфизмом, и *рефлексивным*, если ω_M — изоморфизм. Рефлексивные градуированные модули рассматривались в [2, 15].

Заметим, что $\big(M(\sigma)\big)^* = M^*(\sigma^{-1})$. Действительно, из определения следует, что

$$\big(M(\sigma)\big)^*_g = \mathrm{HOM}(M(\sigma)_A, A_A)_g = \mathrm{HOM}(M_A, A_A)_{g\sigma^{-1}} = M^*(\sigma^{-1})_g$$

для любого $g \in G$.

Лемма 1.

1. *Модуль ${}_AM^*$ является полурефлексивным для любого градуированного модуля M_A.*
2. *Если M_A — рефлексивный градуированный модуль, то и модуль M^* рефлексивен.*

Доказательство не отличается от доказательства утверждения 12.2.1 в [7].

Лемма 2. *Если градуированный модуль M_A является строгим gr-образующим, то и модуль ${}_AM^*$ является строгим gr-образующим.*

Доказательство. Поскольку $M = A(\sigma) \oplus H$ для некоторого $\sigma \in G$, то

$$\begin{aligned} M^* &= \mathrm{HOM}(M_A, A_A) = \mathrm{HOM}(A(\sigma) \oplus H, A_A) = \\ &= \mathrm{HOM}(A(\sigma)_A, A_A) \oplus \mathrm{HOM}(H_A, A_A) = \\ &= \big(A(\sigma)\big)^* \oplus H^* = A^*(\sigma^{-1}) \oplus H^* = A(\sigma^{-1}) \oplus H^*. \end{aligned}$$

Следовательно, M^* является строгим gr-образующим. □

Лемма 3. *Если*

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \text{ —}$$

расщепляющаяся точная последовательность правых (или левых) градуированных A-модулей, то модуль M рефлексивен в том и только том случае, если рефлексивны модули P и Q.

Доказательство. Так как функтор $\mathrm{HOM}({}_A\mathrm{HOM}(-_A, A_A), {}_AA)$ аддитивен, из [9, предложение 3.38] следует, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\omega_P}\big\downarrow & & {\scriptstyle\omega_M}\big\downarrow & & {\scriptstyle\omega_Q}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & P^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & M^{**} & \xrightarrow{g^{**}} & Q^{**} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

имеет расщепляющие точные строки. Легко проверить, что она коммутативна. Из свойств коммутативных диаграмм в абелевых категориях [10, предложение 23.7] получим, что ω_M является изоморфизмом тогда и только тогда, когда ω_P и ω_Q — изоморфизмы. □

Следствие 1. *Каждый конечно порождённый проективный градуированный A-модуль является рефлексивным.*

Лемма 4. *Если M_A — полурефлексивный правый градуированный A-модуль, то существует единственный мономорфизм градуированных колец $\phi\colon \mathrm{END}(M_A) \to \mathrm{END}({}_AM^*)$, $\phi(\eta) = \eta^*$, обладающий свойством $\langle f, \eta m\rangle = \langle f\eta^*, m\rangle$ для любых $m \in M$, $f \in M^*$. Если модуль M_A рефлексивен, то ϕ — изоморфизм градуированных колец $\mathrm{END}(M_A)$ и $\mathrm{END}({}_AM^*)$. Обратно, если ϕ — изоморфизм градуированных колец, а M_A — полурефлексивный строгий gr-образующий модуль, то M_A рефлексивен.*

Доказательство. Пусть $\eta \in \mathrm{END}(M_A)$ и $f \in M^*$. Нетрудно проверить, что отображение η^*, обладающее свойством $\langle f, \eta m\rangle = \langle f\eta^*, m\rangle$ для любых $m \in M$, $f \in M^*$, определяет эндоморфизм модуля ${}_AM^*$, причём $\deg\eta = \deg\eta^*$.

Покажем, что ϕ — мономорфизм. Действительно, пусть $\eta', \eta'' \in \mathrm{END}({}_AM^*)$ такие, что $\langle f\eta', m\rangle = \langle f\eta'', m\rangle$ для любых $m \in M$, $f \in M^*$. Тогда для $\eta' - \eta'' \in \mathrm{END}({}_AM^*)$ имеем, что $\langle f(\eta' - \eta''), m\rangle = 0$ для всех $m \in M$, $f \in M^*$. Так как модуль M_A полурефлексивен, получим, что $f(\eta' - \eta'') = 0$ для всех $f \in M^*$. Следовательно, $\eta' - \eta'' = 0$, т. е. $\eta' = \eta''$.

Пусть теперь M_A рефлексивен и $\varsigma \in h\big(\mathrm{END}({}_AM^*)\big)$. Если $m \in M$, то, как легко убедиться, отображение $\langle f, \varphi\rangle = \langle f\varsigma, m\rangle$ $(f \in M^*)$ определяет элемент $\varphi \in h(M^{**})$. В силу рефлексивности M_A найдётся такой элемент $m' \in M$, что $\langle f, m'\rangle = \langle f, \varphi\rangle = \langle f\varsigma, m\rangle$. Ясно, что отображение $m \to m'$ определяет эндоморфизм $\eta \in h\big(\mathrm{END}(M_A)\big)$, для которого $\langle f, \eta m\rangle = \langle f, \varphi\rangle = \langle f\varsigma, m\rangle$ для всех $m \in M, f \in M^*$, причём $\deg\eta = \deg\varsigma$. Следовательно, $\phi\colon \mathrm{END}(M_A) \to \mathrm{END}({}_AM^*)$ — изоморфизм градуированных колец.

Предположим, что $\phi\colon \mathrm{END}(M_A) \to \mathrm{END}({}_AM^*)$ — изоморфизм градуированных колец и M_A — полурефлексивный строгий gr-образующий модуль. Тогда $M = P \oplus H$, где $P = mA$ для некоторого $m \in M_\sigma$ и существует такой элемент $f \in M^*_{\sigma^{-1}}$, что $\langle f, m\rangle = 1$. Пусть $\varphi \in h(M^{**})$ и для каждого $x \in M^*$ положим

$x\eta' = \langle x, \varphi\rangle f$. Ясно, что $\eta' \in \mathrm{END}({}_A M^*)$, и значит, существует такой элемент $\eta \in \mathrm{END}(M_A)$, что $\eta^* = \eta'$. Следовательно,

$$\langle x, \eta m\rangle = \langle x\eta^*, m\rangle = \big\langle \langle x, \varphi\rangle f, m\big\rangle = \langle x, \varphi\rangle \,\langle f, m\rangle = \langle x, \varphi\rangle$$

для любого $x \in M^*$. Положив $\eta m = n \in M$, получим, что $\langle x, n\rangle = \langle x, \varphi\rangle$ для любого $x \in M^*$, что означает рефлексивность модуля M_A. □

Отображение $\phi\colon \mathrm{END}(M_A) \to \mathrm{END}({}_A M^*)$, как и в [17], будем называть *сопряжённым отображением*, а элемент $\eta^* = \phi(\eta) \in \mathrm{END}({}_A M^*)$ — *сопряжённым* к элементу $\eta \in \mathrm{END}(M_A)$.

Напомним, что *полулинейным изоморфизмом* правых модулей M_A и N_B называется пара отображений (β, γ), где $\beta\colon M \to N$ – изоморфизм абелевых групп, $\gamma\colon A \to B$ — изоморфизм колец и $(ma)^\beta = m^\beta a^\gamma$ для всех $a \in A$, $m \in M$.

Пусть ${}_A M$ — левый A-модуль, а N_B — правый B-модуль. Пара отображений (α, β) называется *антиполулинейным изоморфизмом* модулей ${}_A M$ и N_B, если $\beta\colon M \to N$ — изоморфизм абелевых групп, $\alpha\colon A \to B$ — антиизоморфизм колец и $(am)^\beta = m^\beta a^\alpha$ для всех $a \in A$, $m \in M$.

Для бимодулей ${}_R M_A$ и ${}_S N_B$ тройка отображений $(\alpha, \beta, \gamma)\colon {}_R M_A \to {}_S N_B$ называется *полулинейным изоморфизмом* бимодулей, если $(\alpha, \beta)\colon {}_R M \to {}_S N$ и $(\beta, \gamma)\colon M_A \to N_B$ — полулинейные изоморфизмы модулей.

Лемма 5. *Пусть M_A — строгий gr-образующий модуль, $R = \mathrm{END}(M_A)$, $E = \mathrm{End}(M_A)$, элемент $u = u^2 \in R$ таков, что $uM_A \cong A(\sigma)$. Тогда*

1) $\mathrm{End}({}_E M) = \mathrm{End}({}_R M) = \mathrm{END}({}_R M) \approx A$ (*изоморфизм градуированных колец*);
2) *существует полулинейный изоморфизм $(\mathrm{id}_R, \beta, \gamma)$ бимодулей ${}_R Ru_{uRu}$ и ${}_R M_A$, при котором $\big((Ru)_g\big)^\beta \subseteq M_{g\sigma}$ и $\big((uRu)_g\big)^\gamma \subseteq A_{\sigma^{-1}g\sigma}$ для всех $g \in G$;*
3) *если, кроме того, M_A полурефлексивен, а $\bar R$ — образ кольца R при сопряжённом отображении ϕ, то существует полулинейный изоморфизм (γ, δ, ϕ) бимодулей ${}_{uRu} uR_R$ и ${}_A M^*_{\bar R}$, при котором $\big((uR)_g\big)^\delta \subseteq M^*_{\sigma^{-1}g}$ для всех $g \in G$.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) были доказаны в [4, лемма 2.5].

Докажем утверждение 3). Пусть x — однородный базис gr-свободного A-модуля uM, т. е. $uM = xA$, $\deg x = \sigma$. Как было показано в [4, лемма 2.5], $(yu)^\beta = yux$, $m(uyu)^\gamma = \big(m^{\beta^{-1}} uyu\big)^\beta$ для любых $y \in R$, $m \in M$.

Ясно, что отображение $\delta\colon uR \to M^*$, для которого $\langle (uy)^\delta, m\rangle = \big(uym^{\beta^{-1}}\big)^\gamma$ при $m \in M$, $y \in R$, является гомоморфизмом абелевых групп. Если $(uy)^\delta = 0$ для некоторого $y \in R$, то $\big(uym^{\beta^{-1}}\big)^\gamma = 0$ для всех $m \in M$. Тогда $uym^{\beta^{-1}} = (uym)^{\beta^{-1}} = 0$, откуда следует, что $uym = 0$ для всех $m \in M$. Следовательно, $uy = 0$ и δ — мономорфизмом.

Если $f \in M^*$, то легко проверить, что отображение $\varphi\colon m \to x\langle f, m\rangle$ является эндоморфизмом модуля M_A. Более того, $\varphi = ur$ для некоторого $r \in R = \mathrm{END}(M_A)$. Тогда для $m \in M$ имеем

$$\langle (ur)^{\delta}, m\rangle = \big(urm^{\beta^{-1}}\big)^{\gamma} = \big(u(urm)^{\beta^{-1}}\big)^{\gamma} = \big(u(x\langle f,m\rangle)^{\beta^{-1}}\big)^{\gamma} = \\ = \big(ux^{\beta^{-1}}\langle f,m\rangle^{\gamma^{-1}}\big)^{\gamma} = \big(u\langle f,m\rangle^{\gamma^{-1}}\big)^{\gamma} = \langle f,m\rangle,$$

т. е. δ — эпиморфизм.

Легко убедиться, что (γ,δ,ϕ) — полулинейный изоморфизм бимодулей ${}_{uRu}uR_R$ и ${}_A M^*_{\bar{R}}$ и $\big((uR)_g\big)^{\delta} \subseteq M^*_{\sigma^{-1}g}$. □

Определение 1. Полулинейный изоморфизм (β,γ) градуированных модулей M_A и N_B будем называть полулинейным σ-изоморфизмом ($\sigma \in G$), если $(M_g)^{\beta} \subseteq N_{g\sigma}$ и $(A_g)^{\gamma} \subseteq B_{\sigma^{-1}g\sigma}$ для всех $g \in G$.

Антиполулинейный изоморфизм (γ,β) градуированных модулей ${}_AM$ и N_B будем называть антиполулинейным σ-изоморфизмом ($\sigma \in G$), если $(M_g)^{\beta} \subseteq \subseteq N_{g^{-1}\sigma}$ и $(A_g)^{\gamma} \subseteq B_{\sigma^{-1}g^{-1}\sigma}$ для всех $g \in G$.

Заметим, что тождественное отображение является антиполулинейным e-изоморфизмом модуля ${}_AM$ на модуль $M^{\mathrm{op}}_{A^{\mathrm{op}}}$.

Определение 2 [6]. Говорят, что антиизоморфизм $\alpha\colon \mathrm{End}_A(M) \to \mathrm{End}_B(N)$ колец эндоморфизмов правых модулей M_A и N_B индуцируется антиполулинейным изоморфизмом (γ,β) модулей ${}_AM^*$ и N_B, если $(f\eta^*)^{\beta} = \eta^{\alpha} f^{\beta}$ для всех $f \in M^*$, $\eta \in \mathrm{End}_A(M)$.

Теорема 1. *Пусть M_A — рефлексивный правый градуированный A-модуль. Тогда для каждого антиполулинейного σ-изоморфизма (γ,β) градуированных модулей ${}_AM^*$ и N_B ($\sigma \in G$) существует единственный антиизоморфизм градуированных колец $\alpha\colon \mathrm{END}(M_A) \to \mathrm{END}(N_B)$, который индуцируется антиполулинейным изоморфизмом (γ,β).*

Доказательство. Поскольку модуль M_A рефлексивен, то из леммы 4 следует, что сопряжённое отображение $\phi\colon \mathrm{END}(M_A) \to \mathrm{END}({}_AM^*)$ — изоморфизм градуированных колец. Положив $\eta^{\alpha}(n) = \big(n^{\beta^{-1}}\eta^*\big)^{\beta}$ для любого $n \in N$, получим, что $\eta^{\alpha} \in \mathrm{END}(N_B)$ для любого $\eta \in \mathrm{END}(M_A)$. Ясно также, что α — антиизоморфизм колец $\mathrm{END}(M_A)$ и $\mathrm{END}(N_B)$, а поскольку $(\mathrm{END}(M_A)_h)^{\alpha} \subseteq \subseteq \mathrm{END}(N_B)_{h^{-1}}$, то α — антиизоморфизм градуированных колец.

Если $\varphi\colon \mathrm{END}(M_A) \to \mathrm{END}(N_B)$ — антиизоморфизм градуированных колец, который индуцируется антиполулинейным изоморфизмом (γ,β), то для любого $n = f^{\beta} \in N$ имеем

$$(f\eta^*)^{\beta} = \big(n^{\beta^{-1}}\eta^*\big)^{\beta} = \eta^{\varphi} f^{\beta} = \eta^{\varphi} n = \eta^{\alpha}(n),$$

что доказывает единственность отображения α. □

Лемма 6. *Пусть M_A и N_B — правые G-градуированные модули, причём M_A полурефлексивен, и $\alpha\colon \mathrm{END}(M_A) \to \mathrm{END}(N_B)$ — антиизоморфизм градуированных колец, который индуцируется антиполулинейным σ-изоморфизмом (γ,β) модулей ${}_AM^*$ и N_B ($\sigma \in G$). Тогда сопряжённое отображение $\phi\colon \mathrm{END}(M_A) \to \mathrm{END}({}_AM^*)$ — изоморфизм.*

Доказательство. Пусть $\varsigma \in h\big(\mathrm{END}({}_AM^*)\big)$ и $n \in h(N)$. Тогда отображение $\psi\colon n \to \big(n^{\beta^{-1}}\varsigma\big)^{\beta}$ — эндоморфизм B-модуля N_B, причём $\deg\psi = (\deg\varsigma)^{-1}$. Следовательно, существует $\eta \in \mathrm{END}(M_A)$, такой что $\eta^{\alpha} = \psi$. Тогда для $n = f^{\beta}$ получим

$$(f\eta^*)^{\beta} = \eta^{\alpha} f^{\beta} = \big(n^{\beta^{-1}}\varsigma\big)^{\beta} = (f\varsigma)^{\beta}.$$

Итак, $(f\eta^*)^{\beta} = (f\varsigma)^{\beta}$ для любого $f \in M^*$. Тогда $\eta^* = \varsigma$ в силу однозначности β, и ϕ — изоморфизмом. □

Теорема 2. *Пусть A и B — G-градуированные кольца, M_A и N_B — строгие gr-образующие модули, причём модуль M_A полурефлексивен, $R = \mathrm{END}(M_A)$ и $S = \mathrm{END}(N_B)$ — градуированные кольца эндоморфизмов, $\alpha\colon R \to S$ — антиизоморфизм градуированных колец. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *если $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, то $\mathrm{gr.r}(u^{\alpha}) = 1$;*
2) *существует такой идемпотентный эндоморфизм $u = u^2 \in h(R)$, что $\mathrm{gr.r}(u) = \mathrm{gr.r}(u^{\alpha}) = 1$;*
3) *существуют элемент $\sigma \in G$ и антиполулинейный σ-изоморфизм (γ, β) модулей ${}_AM^*$ и N_B, который индуцирует антиизоморфизм α.*

При выполнении этих условий оба градуированных модуля M_A и N_B являются рефлексивными и существует антиполулинейный σ^{-1}-изоморфизм модулей ${}_BN^*$ и M_A.

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидна.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Так как $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, то $uM \cong A(\tau)$ для некоторого $\tau \in G$. Следовательно, в силу леммы 5 существует полулинейный изоморфизм $(\gamma_1, \delta_1, \phi)$ бимодулей ${}_{uRu}uR_R$ и ${}_AM^*_R$, такой что $\big((uRu)_g\big)^{\gamma_1} \subseteq A_{\tau^{-1}g\tau}$, $\big((uR)_g\big)^{\delta_1} \subseteq M^*_{\tau^{-1}g}$ для всех $g \in G$ (здесь $\phi\colon R \to \mathrm{END}({}_AM^*)$ — сопряжённое отображение).

Положим $w = u^{\alpha}$. Ясно, что антиизоморфизм градуированных колец $\alpha\colon R \to S$ индуцирует отображение бимодулей $\alpha\colon {}_{uRu}uR_R \to {}_SSw_{wSw}$, которое является антиполулинейным e-изоморфизмом правого градуированного R-модуля uR_R на левый градуированный S-модуль ${}_SSw$ и антиполулинейным e-изоморфизмом левого градуированного uRu-модуля ${}_{uRu}uR$ на правый градуированный wSw-модуль Sw_{wSw}.

Поскольку $r(w) = 1$, то в силу леммы 5 существует полулинейный изоморфизм $(\mathrm{id}_S, \beta_2, \gamma_2)$ бимодулей ${}_SSw_{wSw}$ и ${}_SN_B$, такой что $\big((wSw)_g\big)^{\gamma_2} \subseteq B_{\varsigma^{-1}g\varsigma}$, $\big((Sw)_g\big)^{\beta_2} \subseteq N_{g\varsigma}$ для всех $g \in G$ (здесь $wN \cong B(\varsigma)$).

Тогда пара отображений ($\gamma = \gamma_1^{-1}\alpha\gamma_2$, $\beta = \delta_1^{-1}\alpha\beta_2$) является антиполулинейным изоморфизмом модулей ${}_AM^*$ и N_B, причём $(M^*_g)^{\beta} \subseteq N_{g^{-1}\tau^{-1}\varsigma}$, $(A_g)^{\gamma} \subseteq B_{\varsigma^{-1}\tau g^{-1}\tau^{-1}\varsigma}$, т. е. (γ, β) — антиполулинейный $(\tau^{-1}\varsigma)$-изоморфизм градуированных модулей ${}_AM^*$ и N_B.

Пусть $f \in M^*$, $\eta \in R$. Тогда

$$(f\eta^*)^{\beta} = (f\eta^*)^{\beta_2\alpha\delta_1^{-1}} = (f^{\delta_1^{-1}}\eta)^{\beta_2\alpha} = (\eta^{\alpha} f^{\alpha\delta_1^{-1}})^{\beta_2} = \eta^{\alpha} f^{\beta}.$$

Таким образом, антиизоморфизм α индуцируется антиполулинейным $(\tau^{-1}\varsigma)$-изоморфизмом (γ, β).

Убедимся в справедливости импликации 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть существуют элемент $\sigma \in G$ и антиполулинейный σ-изоморфизм (γ, β) модулей ${}_AM^*$ и N_B, который индуцирует антиизоморфизм α, т. е. $(f\eta^*)^\beta = \eta^\alpha f^\beta$ для всех $f \in M^*$, $\eta \in R$.

Если $u = u^2 \in h(R)$ и $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, то в силу леммы 5 существует полулинейный изоморфизм (γ, δ, ϕ) бимодулей ${}_{uRu}uR_R$ и ${}_AM^*_{\bar{R}}$, причём $\big((uR)_g\big)^\delta \subseteq$ $\subseteq M^*_{\tau^{-1}g}$ и $\big((uRu)_g\big)^\gamma \subseteq A_{\tau^{-1}g\tau}$, где $uM \approx A(\tau)$. Следовательно, для $\eta \in R$ имеем $M^*\eta^* \approx (uR)\eta = uR\eta$, откуда при $\eta = u$ получим $M^*u^* \approx uRu$. Поскольку uRu — свободный циклический uRu-модуль, то M^*u^* — свободный циклический A-модуль, значит, и $(M^*u^*)^\beta = u^\alpha(M^*)^\beta = u^\alpha N$ — свободный циклический B-модуль. Простая проверка показывает, что $u^\alpha N \approx B(\tau\sigma)$, следовательно, $u^\alpha N$ — gr-свободный модуль ранга 1, т. е. $\mathrm{gr.r}(u^\alpha) = 1$.

При выполнении условий 1)—3) из лемм 4 и 6 получим, что градуированный модуль M_A является рефлексивным, а значит, в силу леммы 1 рефлексивным является и модуль ${}_AM^*$. Но тогда рефлексивным будет N_B, и следовательно, существует антиполулинейный σ^{-1}-изоморфизм градуированных модулей ${}_BN^*$ и M_A. □

Определение 3. Пусть A и B — градуированные кольца, M_A и N_B — правые градуированные модули, $R = \mathrm{END}(M_A)$ и $S = \mathrm{END}(N_B)$ — градуированные кольца эндоморфизмов, $\alpha\colon R \to S$ — антиизоморфизм градуированных колец. Будем говорить, что антиизоморфизм α индуцируется градуированной антиэквивалентностью Мориты, если существует градуированная эквивалентность категорий $H\colon \mathrm{gr.mod}\text{-}A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{gr.mod}\text{-}B$, для которой канонический гомоморфизм $R \to \mathrm{END}({}_AM^*)$ является изоморфизмом, $H\big((M^*)^{\mathrm{op}}\big) = N$ и $H(r)n = r^\alpha n$ для всех $n \in N$, $r \in R^{\mathrm{op}}$.

Теорема 3. *Пусть A и B — G-градуированные кольца, M_A и N_B — строгие gr-образующие модули, причём модуль M_A полурефлексивен, $R = \mathrm{END}(M_A)$ и $S = \mathrm{END}(N_B)$ — градуированные кольца эндоморфизмов, $\alpha\colon R \to S$ — антиизоморфизм градуированных колец. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *если $u \in R$ и $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, то $u^\alpha N_B$ — gr-прообразующий B-модуль*;
2) *если $u \in R$, $w \in S$ и $\mathrm{gr.r}(u) = \mathrm{gr.r}(w) = 1$, то $u^\alpha N_B$ и $w^{\alpha^{-1}}M_A$ — конечно порождённые проективные градуированные модули*;
3) *если $u \in R$, $w \in S$ и $\mathrm{gr.r}(u) = \mathrm{gr.r}(w) = 1$, то $u^\alpha N_B$ и $w^{\alpha^{-1}}M_A$ — gr-образующие модули*;
4) *существует такой однородный идемпотентный эндоморфизм $u \in R$ ранга 1, что $u^\alpha N_B$ — gr-прообразующий B-модуль*;
5) *существуют такие однородные идемпотентные эндоморфизмы $u \in R$ и $w \in S$ ранга 1, что $u^\alpha N_B$ и $w^{\alpha^{-1}}M_A$ — конечно порождённые проективные градуированные модули*;

6) *существуют такие однородные идемпотентные эндоморфизмы* $u \in R$ *и* $w \in S$ *ранга* 1, *что* $u^\alpha N_B$ *и* $w^{\alpha^{-1}} M_A$ — gr-*образующие модули*;
7) *антиизоморфизм* α *индуцируется градуированной антиэквивалентностью Мориты.*

При выполнении любого из перечисленных выше условий градуированные модули M_A *и* N_B *являются рефлексивными.*

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы из [4].

Лемма 7 [4, лемма 2.6]. *Пусть* M_A — *градуированный* A-*модуль*, $R = \mathrm{END}(M_A)$, $u = u^2$, $v = v^2 \in h(R)$. *Тогда* uRv *и* $\mathrm{HOM}(vM_A, uM_A)$ *изоморфны как градуированные* uRu-vRv-*бимодули. В частности,* Rv *и* $\mathrm{HOM}_A(vM, M)$ *изоморфны как градуированные* R-vRv-*бимодули, а* uR *и* $\mathrm{HOM}_A(M, uM)$ — *как градуированные* uRu-R-*бимодули.*

Лемма 8 [4, лемма 2.7]. *Пусть* M_A — *строгий* gr-*образующий модуль*, $R = \mathrm{END}(M_A)$, $u = u^2$, $v = v^2 \in h(R)$, *причём* $\mathrm{gr.r}(u) = 1$. *Тогда равносильны следующие условия*:

1) wM_A — *конечно порождённый проективный градуированный* A-*модуль*;
2) $(wRu)_{uRu}$ — *конечно порождённый проективный градуированный* uRu-*модуль*;
3) $wRuRw = wRw$.

Доказательство теоремы 3. Так как модули M_A и N_B являются строгими gr-образующими, а модуль M_A полурефлексивен, то в силу леммы 5 существуют однородные идемпотентные эндоморфизмы $u \in R$ и $w \in S$ ранга 1 и полулинейные изоморфизмы бимодулей

$$\begin{gathered}(\mathrm{id}_R, \beta_1, \gamma_1)\colon {}_R Ru_{uRu} \to {}_R M_A,\\ (\gamma_1, \delta_1, \phi)\colon {}_{uRu} uR_R \to {}_A M^*_R,\\ (\mathrm{id}_S, \beta_2, \gamma_2)\colon {}_S Sw_{wSw} \to {}_S N_B,\end{gathered}$$

такие что

$$\begin{gathered}\bigl((uRu)_g\bigr)^{\gamma_1} \subseteq A_{\sigma^{-1}g\sigma}, \quad \bigl((Ru)_g\bigr)^{\beta_1} \subseteq M_{g\sigma}, \quad \bigl((uR)_g\bigr)^{\delta_1} \subseteq M^*_{\sigma^{-1}g},\\ \bigl((wSw)_g\bigr)^{\gamma_2} \subseteq B_{\tau^{-1}g\tau}, \quad \bigl((Sw)_g\bigr)^{\beta_2} \subseteq N_{g\tau}\end{gathered}$$

для всех $g \in G$ и таких $\sigma, \tau \in G$, для которых $uM \cong A(\sigma)$, $wN \cong B(\tau)$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $u^\alpha N_B$ и $w^{\alpha^{-1}} M_A$ — конечно порождённые проективные градуированные правые модули. Тогда из леммы 8 следует, что $w^{\alpha^{-1}} RuRw^{\alpha^{-1}} = w^{\alpha^{-1}} Rw^{\alpha^{-1}}$. Применяя к данному равенству антиизоморфизм α, получим

$$wSu^\alpha Sw = wSw. \tag{1}$$

По лемме 7 имеем изоморфизм градуированных wSw-$u^\alpha Su^\alpha$-бимодулей $wSu^\alpha \cong \mathrm{HOM}(u^\alpha N_B, wN_B)$. Легко проверить, что если $f \in h\bigl(\mathrm{HOM}(u^\alpha N_B, wN_B)\bigr)$, то

$\beta_2^{-1} f \beta_2 \in h\big(\mathrm{HOM}(u^\alpha Sw_{wSw}, wSw_{wSw})\big)$, причём $\deg f = \deg(\beta_2^{-1} f \beta_2)$, следовательно, $\mathrm{HOM}(u^\alpha N_B, wN_B)$ и $\mathrm{HOM}(u^\alpha Sw_{wSw}, wSw_{wSw})$ изоморфны как градуированные абелевы группы. Отсюда и из (1) получим, что

$$\mathrm{gr.tr}_{wSw}(u^\alpha Sw) = \sum_{f \in \mathrm{HOM}(u^\alpha Sw_{wSw}, wSw_{wSw})} f(u^\alpha Sw) = (u^\alpha Sw)(u^\alpha Sw) = wSw.$$

Таким образом, в силу [4, лемма 2.1] $u^\alpha Sw$ является gr-образующим wSw-модулем, а следовательно, таковым является и градуированный B-модуль $u^\alpha N_B$, что доказывает утверждение 1).

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $w^{\alpha^{-1}} M_A$ — gr-образующий A-модуль. Тогда gr-образующим будет и uRu-модуль $w^{\alpha^{-1}} Ru_{uRu}$. Следовательно,

$$\mathrm{gr.tr}_{uRu}\big(w^{\alpha^{-1}} Ru\big) = \mathrm{HOM}\big(w^{\alpha^{-1}} Ru_{uRu}, uRu_{uRu}\big) w^{\alpha^{-1}} Ru = uRu.$$

С другой стороны, по лемме 7 имеем

$$uRw^{\alpha^{-1}} \cong \mathrm{HOM}\big(w^{\alpha^{-1}} M_A, uM_A\big) \cong \mathrm{HOM}\big(w^{\alpha^{-1}} Ru_{uRu}, uRu_{uRu}\big). \tag{2}$$

Следовательно, $uRw^{\alpha^{-1}} Ru = uRu$. Применив α, получим, что $u^\alpha SwSu^\alpha = u^\alpha Su^\alpha$. Из леммы 8 вытекает, что $u^\alpha N$ является конечно порождённым проективным B-модулем. Но по условию этот модуль является gr-образующим, следовательно, $u^\alpha N$ является gr-прообразующим.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Так как $u^\alpha N$ — gr-образующий B-модуль, то $wSu^\alpha Sw = wSw$. Применив α^{-1}, получим, что $w^{\alpha^{-1}} RuRw^{\alpha^{-1}} = w^{\alpha^{-1}} Rw^{\alpha^{-1}}$. Из леммы 8 следует, что $w^{\alpha^{-1}} M$ — конечно порождённый проективный A-модуль.

Убедимся в справедливости импликации 1) $\Longrightarrow$ 3). Так как $u^\alpha N_B$ — конечно порождённый проективный B-модуль, то по лемме 8 имеем, что $u^\alpha SwSu^\alpha = u^\alpha Su^\alpha$. Применив α^{-1}, получим $uRw^{\alpha^{-1}} Ru = uRu$. Отсюда и из соотношения (2) следует, что $w^{\alpha^{-1}} Ru$ — gr-образующий uRu-модуль, значит, $w^{\alpha^{-1}} M_A$ — gr-образующий A-модуль.

Эквивалентности 4) $\Longleftrightarrow$ 5) $\Longleftrightarrow$ 6) доказываются аналогично эквивалентностям 1) $\Longleftrightarrow$ 2) $\Longleftrightarrow$ 3).

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 4) очевидна.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 7). Пусть $u^\alpha N_B$ — gr-прообразующий B-модуль. Тогда $u^\alpha Sw$ — gr-прообразующий wSw-модуль. Из леммы 7 следует, что

$$uR \cong \mathrm{HOM}(M_A, uM_A) \cong \mathrm{HOM}(Ru_{uRu}, uRu_{uRu}). \tag{3}$$

Если $f \in h\big(\mathrm{HOM}(Ru_{uRu}, uRu_{uRu})\big)$, то, положив $(x)f^\alpha = \Big(f\big(x^{\alpha^{-1}}\big)\Big)^\alpha$ для всех $x \in u^\alpha S$, получим, что $f^\alpha \in h\big(\mathrm{HOM}({}_{u^\alpha Su^\alpha} u^\alpha S, {}_{u^\alpha Su^\alpha} u^\alpha Su^\alpha)\big)$. Поскольку α является антиизоморфизмом градуированных колец, то отображение $f \to f^\alpha$ индуцирует изоморфизм абелевых групп, причём $\deg(f^\alpha) = (\deg f)^{-1}$. Тогда из (3) вытекает, что

$$Su^\alpha \cong \mathrm{HOM}({}_{u^\alpha Su^\alpha} u^\alpha S, {}_{u^\alpha Su^\alpha} u^\alpha Su^\alpha). \tag{4}$$

С другой стороны, из леммы 7 следует, что

$$Su^\alpha \cong \mathrm{HOM}(u^\alpha N_B, N_B) \cong \mathrm{HOM}(u^\alpha Sw_{wSw}, Sw_{wSw}). \tag{5}$$

Так как $u^\alpha Sw$ является gr-прообразующим wSw-модулем, то из градуированного варианта теоремы Мориты (см. [1,14]) следует, что существует градуированная эквивалентность категорий

$$\mathrm{HOM}(u^\alpha Sw_{wSw}, -)\colon \mathrm{gr.mod}\text{-}wSw \longrightarrow \mathrm{gr.mod}\text{-}u^\alpha Su^\alpha.$$

Используя соотношение (5), из неё получим изоморфизм градуированных колец

$$S = \mathrm{END}(N_B) \cong \mathrm{END}(Sw_{wSw}) \cong \mathrm{END}(Su^\alpha_{u^\alpha Su^\alpha}). \tag{6}$$

С другой стороны, из леммы 7 вытекает изоморфизм градуированных бимодулей

$$u^\alpha S \cong \mathrm{HOM}(Su^\alpha_{u^\alpha Su^\alpha}, u^\alpha Su^\alpha_{u^\alpha Su^\alpha}). \tag{7}$$

Из соотношений (4) и (7) следует, что Su^α является рефлексивным градуированным $u^\alpha Su^\alpha$-модулем. Поскольку градуированная эквивалентность категорий градуированных модулей сохраняет рефлексивность, то Sw — рефлексивный wSw-модуль, а значит, и N_B — рефлексивный B-модуль.

Поскольку из условия 4) следуют условия 5) и 6), то $w^{\alpha^{-1}}M_A$ является gr-прообразующим, следовательно, M_A рефлексивен. Тогда в силу леммы 4 $R = \mathrm{END}(M_A) \cong \mathrm{END}({}_AM^*)$. Поскольку M является строгим gr-образующим, то и ${}_AM^*$ является строгим gr-образующим по лемме 2. Таким образом, $(M^*)^{\mathrm{op}}_{A^{\mathrm{op}}}$ — строгий gr-образующий и $\mathrm{END}\big((M^*)^{\mathrm{op}}_{A^{\mathrm{op}}}\big) = R^{\mathrm{op}}$.

Ясно, что $u \in R^{\mathrm{op}}$ и $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, а антиизоморфизм α индуцирует изоморфизм градуированных колец $\beta\colon R^{\mathrm{op}} \to S$. Так как $u^\alpha N_B$ — gr-прообразующий модуль, то из [4, теорема 3.2] следует, что существует градуированная эквивалентность

$$H\colon \mathrm{gr.mod}\text{-}A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{gr.mod}\text{-}B,$$

которая индуцирует изоморфизм β. Следовательно, $H\big((M^*)^{\mathrm{op}}\big) = N$ и $H(r)n = r^\alpha n$ для всех $n \in N$, $r \in R^{\mathrm{op}}$, что доказывает 7).

Наконец, докажем импликацию 7) $\Longrightarrow$ 1). Пусть выполнено 7), т. е. существует градуированная эквивалентность категорий

$$H\colon \mathrm{gr.mod}\text{-}A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{gr.mod}\text{-}B,$$

для которой канонический гомоморфизм $R \to \mathrm{END}({}_AM^*)$ является изоморфизмом, $H\big((M^*)^{\mathrm{op}}\big) = N$ и $H(r)n = r^\alpha n$ для всех $n \in N$, $r \in R^{\mathrm{op}}$. По условию M_A — строгий gr-образующий модуль, поэтому из леммы 4 следует, что M_A является рефлексивным и R^{op} и $\mathrm{END}\big((M^*)^{\mathrm{op}}_{A^{\mathrm{op}}}\big)$ изоморфны как градуированные кольца.

Таким образом, α — изоморфизм градуированных колец $\mathrm{END}\big((M^*)^{\mathrm{op}}_{A^{\mathrm{op}}}\big)$ и $\mathrm{END}(N_B)$, который индуцируется градуированной эквивалентностью Мориты. По [4, теорема 3.2] получим, что для $u \in R$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$ модуль $u^\alpha N_B$ является gr-прообразующим. $\square$

В качестве следствия получаем теорему 4.

Теорема 4. *Пусть A и B — градуированные кольца, M_A и N_B — gr-прообразующие, $\alpha\colon \mathrm{END}(M_A) \to \mathrm{END}(N_B)$ — антиизоморфизм градуированных колец. Тогда α индуцируется градуированной антиэквивалентностью Мориты.*

Доказательство. Так как M_A и N_B — конечно порождённые проективные градуированные модули, то по следствию 1 они являются рефлексивными модулями, и $\mathrm{END}(M_A) \cong \mathrm{END}({}_AM^*)$. Из свойств gr-образующих модулей (см. [4, лемма 2.1]) следует, что существуют эпиморфизмы правых градуированных модулей $\varphi\colon \bigoplus\limits_{i=1}^{k} M(g_i) \to A$ и $\psi\colon \bigoplus\limits_{i=1}^{l} N(h_i) \to B$ для некоторых $g_1, g_2, \ldots, g_k$, $h_1, h_2, \ldots, h_l \in G$. Следовательно, существуют такие $\sigma_1 = e, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in G$, что модули $\tilde{M} = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} M(\sigma_i)$ и $\tilde{N} = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} N(\sigma_i)$ являются строгими gr-образующими.

Легко проверить, что если $R = \mathrm{END}(M_A)$, а $S = \mathrm{END}(N_B)$, то

$$\tilde{R} = \mathrm{END}_A(\tilde{M}) = \mathrm{M}_n(R)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \quad \tilde{S} = \mathrm{END}_A(\tilde{N}) = \mathrm{M}_n(S)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

где через $\mathrm{M}_n(R)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ обозначается градуированное кольцо матриц над градуированным кольцом R (см. [16]), и α индуцирует антиизоморфизм градуированных колец $\tilde{\alpha}\colon \tilde{R} \to \tilde{S}$.

Если $u \in R$, $w \in S$ и $\mathrm{gr.r}(u) = \mathrm{gr.r}(w) = 1$, то $u^{\tilde{\alpha}}\tilde{N}_B$ и $w^{\tilde{\alpha}^{-1}}\tilde{M}_A$ являются конечно порождёнными проективными градуированными модулями как прямые слагаемые конечно порождённых проективных модулей. По теореме 3 антиизоморфизм $\tilde{\alpha}$ индуцируется градуированной эквивалентностью категорий

$$H\colon \mathrm{gr.mod}\text{-}A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{gr.mod}\text{-}B.$$

Тогда

$$H\big((M^*)^{\mathrm{op}}\big) = H(E_{11}(\tilde{M}^*)^{\mathrm{op}}) = E_{11}^{\tilde{\alpha}}\tilde{N} = E_{11}\tilde{N} = N,$$

и для всех $r \in R^{\mathrm{op}}$, $n \in N$ получим, что

$$H(r)n = H(E_{11}r)(n, n, \ldots, n) = (E_{11}r)^{\tilde{\alpha}}(n, n, \ldots, n) = r^{\alpha}n$$

(здесь E_{11} — матричная единица). Доказательство завершено. □

Литература

[1] Балаба И. Н. Эквивалентности Мориты категорий градуированных модулей // Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, № 3. — С. 177—178.

[2] Балаба И. Н. Рефлексивные градуированные модули // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула: ТГПИ, 1991. — С. 88—96.

[3] Балаба И. Н. Индуцируемость антиизоморфизмов колец эндоморфизмов градуированных модулей антиполулинейным преобразованием // Успехи мат. наук. — 2008. — Т. 63, № 3. — С. 151—152.

[4] Балаба И. Н., Михалёв А. В. Изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 5. — С. 3—18.

[5] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Антиизоморфизмы колец эндоморфизмов модулей, близких к свободным, индуцированные антиэквивалентностями Мориты // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1996. — Вып. 19. — С. 338—344.

[6] Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. — М.: Изд. иностр. лит., 1955.

[7] Каш Ф. Кольца и модули. — М.: Мир, 1981.

[8] Михалёв А. В. Изоморфизмы колец эндоморфизмов модулей, близких к свободным // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1989. — № 2. — С. 20—27.

[9] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. I. — М.: Мир, 1977.

[10] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. II. — М.: Мир, 1979.

[11] Bolla M. L. Isomorphisms between endomorphism rings of progenerators // J. Algebra. — 1984. — Vol. 87. — P. 261—281.

[12] Gewirtzman L. Anti-isomorphisms of the endomorphism rings of a class of free module // Math. Ann. — 1965. — Vol. 159. — P. 278—284.

[13] Gewirtzman L. Anti-isomorphisms of endomorphism rings of torsion-free module // Math. Z. — 1967. — Vol. 98. — P. 391—400.

[14] Menini C., Năstăsescu C. When is R-gr equivalent to the category of modules? // J. Pure Appl. Algebra. — 1988. — No. 3. — P. 277—291.

[15] Menini C., del Rio A. Morita duality and graded rings // Commun. Algebra. — 1991. — Vol. 19, no. 6. — P. 1765—1794.

[16] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded Ring Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1982.

[17] Wolfson K. G. Anti-isomorphism of endomorphism rings of locally free modules // Math. Z. — 1989. — Vol. 202. — P. 151—159.