Элементарная эквивалентность обобщённых колец инцидентности

Е. И. БУНИНА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: Helen.Bunina@yandex.ru

А. С. ДОБРОХОТОВА-МАЙКОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: dobrokhotova@gmail.com

УДК 512.55+510.67

Ключевые слова: обобщённые кольца инцидентности, частично упорядоченные множества, элементарная эквивалентность.

Аннотация

В работе доказано, что если два обобщённых кольца инцидентности $I(P_1, R_1)$ и $I(P_2, R_2)$ элементарно эквивалентны, то соответствующие упорядоченные множества (P_1, R_1) и (P_2, R_2) элементарно эквивалентны.

Abstract

E. I. Bunina, A. S. Dobrokhotova-Maykova, Elementary equivalence of generalized incidence rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 37—42.

In this paper, we prove that if two generalized incidence rings $I(P_1, R_1)$ and $I(P_2, R_2)$ are elementarily equivalent, then the corresponding ordered sets (P_1, R_1) and (P_2, R_2) are elementarily equivalent.

Идея алгебр инцидентности восходит к Р. Дедекинду и Е. Т. Беллу (см. [7]). Началом современных исследований алгебр инцидентности считают работу Дж.-К. Роты [7]. Он показал, что алгебры инцидентности локально конечных частично упорядоченных множеств являются удобным инструментом для решения перечислительных комбинаторных задач на частично упорядоченных множествах. Применения алгебр инцидентности в комбинаторике описаны в [2, 5]. В [4] понятие колец и алгебр инцидентности обобщено на квазипорядки. В [6,9] впервые рассматривались кольца инцидентности над бинарными отношениями. Активные исследования алгебраических свойств колец инцидентности начались с работы Р. П. Стенли [8], где было показано, что если изоморфны кольца инцидентности над полем, то изоморфны частично упорядоченные множества, на которых эти кольца определены.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 7, с. 37—42.

В [3] В. Д. Шматковым было введено понятие *обобщённого кольца инцидентности* (см. определение 5 ниже) и было доказано, что если два обобщённых кольца инцидентности $I(P_1, R_1)$ и $I(P_2, R_2)$ изоморфны, то изоморфны соответствующие множества (P_1, R_1) и (P_2, R_2). В этой работе мы доказываем аналогичную теорему для элементарной эквивалентности таких колец.

Определение 1. Назовём множество попарно ортогональных идемпотентов E, принадлежащих кольцу I, *максимальным*, если $\mathrm{Ann_r}(E) = \mathrm{Ann_l}(E) = \{0\}$.

Определение 2. Пусть E — максимальное множество ортогональных идемпотентов. Рассмотрим взаимно-однозначное отображение α множества E на какое-нибудь множество P. Будем обозначать $e \in E$ через e_u, если $\alpha(e) = u$.

Определение 3. Пусть I — кольцо, $E = \{e_u \mid u \in P\}$ — максимальное множество ортогональных идемпотентов, $\{0\} \neq E$. Определим на P бинарное отношение R: для любых $u, v \in P$ $u\ R\ v$ равносильно тому, что $e_u I e_v \neq \{0\}$. Будем использовать обозначения $I_{u,v} = e_u I e_v$, $I_{u,u} = I_u$.

Определение 4. Пусть K — кольцо с единицей. Тогда идеал

$$J(K) = \{r \in K \mid \text{для каждого } a \in K \text{ элемент } 1 + ra \text{ обратим}\}$$

называется *радикалом Джекобсона* кольца K.

Определение 5. Назовём кольцо с единицей I *обобщённым кольцом инцидентности*, если существует максимальное множество идемпотентов

$$E = \{e_u \mid u \in P,\ e_u \in I\},$$

такое что

1) каждый идемпотент $e \in E$ *локален*, т. е. фактор-кольцо $eIe/J(eIe)$ — тело;
2) бинарное отношение (P, R) *локально конечно*, т. е. для любых $u, v \in P$ множество $[u, v] = \{w \in P \mid u\ R\ w,\ w\ R\ v\}$ конечно;
3) операции умножения и сложения в I определены следующим образом: для любых $f, g \in I$, $x, y \in P$, если $(x, y) \notin R$, то $(fg)(x, y) = 0$, если $(x, y) \in R$, то
$$(fg)(x, y) = \sum_{z \in P} f(x, z) g(z, y),$$
$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y),$$
где $f(x, z) = e_x f e_y$, $g(z, y) = e_x g e_y$;
4) для любого локального идемпотента $f \in I$ существуют такие $x, y \in P$, что $f(x, y) \notin J(I)$;
5) для любого множества $\{c(u, v) \mid u, v \in P,\ c(u, v) \in Iu, v\}$ существует такой элемент $f \in I$, что для любых $u, v \in P$ $f(u, v) = e_u f e_v = c(u, v)$.

Будем обозначать построенное кольцо через $I(P, R)$.

Пример 1. Назовём кольцо K *полусовершенным*, если существует множество $E(K) = \{e_i \mid e_i \in K,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ локальных попарно ортогональных идемпотентов, такое что $e_1 + \ldots + e_n = e$, где e — единица кольца K. В [3, раздел 1.6] доказано, что полусовершенное кольцо является обобщённым кольцом инцидентности над бинарным отношением $\big(E(K), R(K)\big)$, где для любых $e_i, e_j \in K$ $e_i\ R(K)\ e_j$ равносильно тому, что $e_i K e_j \neq \{0\}$.

Определение 6. Пусть $I = I(P,R)$ — обобщённое кольцо инцидентности. Для произвольного $u \in P$ назовём $r \in I$ *u-столбцом*, если для любых $x, y \in P$ выполнено $r(x,y) = 0$, когда $y \neq u$. Обозначим множество всех u-столбцов через R_u.

Для произвольного $u \in P$ назовём $l \in I$ u-строкой, если для любых $x, y \in P$ выполнено $r(x,y) = 0$, когда $x \neq u$. Обозначим множество всех u-строк через L_u.

Определение 7. Для $f \in I$ положим $G(I,f) := IfI$.

Определение 8. Обозначим через $F(I)$ множество всех локальных идемпотентов f, таких что для любого локального идемпотента $g \in I$ из $G(I,g) \subset G(I,f)$ следует, что $G(I,g) = G(I,f)$.

Лемма 1 [3, леммы 1.3.1, 1.3.2]. *Пусть $I = I(P,R)$ — обобщённое кольцо инцидентности, $f \in F(I)$. Тогда существует такой элемент $u \in P$, что $G(I,f) = R_u L_u$.*

Лемма 2 [3, лемма 1.3.4]. *Пусть $I = I(P,R)$ — обобщённое кольцо инцидентности. Тогда для любого $u \in P$ выполнено $e_u \in F(I)$ и $G(I,e_u) = R_u L_u$.*

Определение 9. Пусть $I = I(P,R)$ — обобщённое кольцо инцидентности. Определим на множестве P отношение эквивалентности $\sim$: для любых $u, v \in P$ $u \sim v$ равносильно тому, что $R_u L_u = R_v L_v$. Обозначим через $P/{\sim}$ фактор-множество P по отношению $\sim$. Пусть $\tilde{u}$ — класс эквивалентности по отношению $\sim$, которому принадлежит u.

Лемма 3 [3, лемма 1.3.3]. *Для любых $u, v \in P$ следующие утверждения равносильны*: $u \sim v$, $I_{u,v} I_{v,u} = I_u$, $I_{v,u} I_{u,v} = I_v$.

Лемма 4. *Для любого $u \in P$ множество $\tilde{u}$ конечно.*

Доказательство. Пусть $v \in \tilde{u}$. Тогда $I_{u,v} I_{v,u} = I_u \neq \{0\}$. Следовательно, $I_{u,v} \neq \{0\}$ и $I_{v,u} \neq \{0\}$. Значит, $v \in [u,u]$. Учитывая, что (P,R) локально конечно, получаем, что $\tilde{u}$ — конечное множество. $\square$

Определение 10. Определим на множестве $F(I)$ отношение эквивалентности $\sim$: для любых $f_1, f_2 \in F(I)$ $f_1 \sim f_2$ равносильно тому, что $G(I,f_1) = G(I,f_2)$. Обозначим через $F(I)/{\sim}$ фактор-множество $F(I)$ по отношению $\sim$.

Определим отображение $\alpha\colon F(I) \to P/{\sim}$ следующим образом: для $f \in F(I)$ положим $\alpha(f) = \tilde{u}$, если $G(I,f) = R_u L_u$. Построенное отображение корректно по лемме 1 и сюръективно по лемме 2. Обозначим через $F_{\tilde{u}}$ тот класс $F(I)/{\sim}$, для которого $\alpha(F_{\tilde{u}}) = \tilde{u}$.

Лемма 5 [3, лемма 1.3.7]. *Пусть $I = I(P,R)$ — обобщённое кольцо инцидентности, $u \in P$. Тогда $IF_{\tilde{u}}I / J(IF_{\tilde{u}}I) \cong \mathrm{M}_n$, где M_n — кольцо всех $(n \times n)$-матриц над некоторым телом, $n = \operatorname{card} \tilde{u}$, J — радикал Джекобсона.*

Определение 11. Определим на множестве $P/{\sim}$ отношение $\leqslant$: для любых $\tilde{u}, \tilde{v} \in P/{\sim}$ условие $\tilde{u} \leqslant \tilde{v}$ равносильно отношению $u\ R\ v$.

На множестве $F(I)$ также определим отношение $\leqslant$: для любых $F_{\tilde{u}}, F_{\tilde{v}} \in F(I)$ условие $F_{\tilde{u}} \leqslant F_{\tilde{v}}$ равносильно тому, что $F_{\tilde{u}} I F_{\tilde{v}} \neq \{0\}$.

Лемма 6 [3, лемма 1.3.8]. *Введённые отношения заданы корректно* (*т. е. если $u_1, u_2 \in \tilde{u}$, то $u_1\ R\ u_2$, $u_2\ R\ u_1$; для $u_1, u_2 \in \tilde{u}$, $v_1, v_2 \in \tilde{v}$ из $u_1\ R\ v_1$ следует, что $u_2\ R\ v_2$*) *и для любых $\tilde{u}, \tilde{v} \in P/{\sim}$ условие $\tilde{u} \leqslant \tilde{v}$ равносильно условию $F_{\tilde{u}} \leqslant F_{\tilde{v}}$.*

Определение 12. Две модели U и U' одного языка первого порядка $\mathcal{L}$ называются *элементарно эквивалентными* (обозначение $U \equiv U'$), если любое предложение φ языка $\mathcal{L}$ истинно в модели U тогда и только тогда, когда оно истинно в модели U'.

Теперь, используя леммы 1, 2, 5 и 6, мы можем доказать основную теорему этой работы.

Теорема. *Пусть $I_1 = I(P_1, R_1)$, $I_2 = I(P_2, R_2)$ — обобщённые кольца инцидентности, $I_1 \equiv I_2$. Тогда $(P_1, R_1) \equiv (P_2, R_2)$.*

Доказательство. Напишем несколько формул первого порядка кольцевого языка, которые нам понадобятся для доказательства теоремы.

Формула
$$\mathrm{I}(a, b, x) := (a^2 = a) \wedge (b^2 = b) \wedge (axb = x)$$
утверждает, что $x \in aIb$, где a и b — идемпотенты.

Формула
$$\mathrm{Jac}(e, x) := \mathrm{I}(e, e, x) \wedge \Bigl(\forall a\ \Bigl(\mathrm{I}(f, f, a) \Rightarrow \exists y\ \mathrm{I}(e, e, y) \wedge \bigl((e + ax)y = y(e + ax) = e\bigr)\Bigr)\Bigr)$$
утверждает, что $x \in J(eIe)$, т. е. $x \in eIe$ и $e + ax$ обратим в eIe для любого $a \in eIe$.

Формула
$$\mathrm{LocIdem}(f) := (f^2 = f) \wedge \\ \wedge \Bigl(\forall a\ \bigl(\mathrm{I}(f, f, a) \Rightarrow \exists y\ \mathrm{I}(f, f, y) \wedge \mathrm{Jac}(e, ay - e) \wedge \mathrm{Jac}(e, ya - e)\bigr)\Bigr)$$
утверждает, что f — локальный идемпотент (по определению 5).

Следующая формула утверждает, что $x \in G(I, f) = IfI$:
$$\mathrm{G}(f, x) := \exists a\ \exists b\ (afb = x).$$

Формула
$$\mathrm{F}(f) := \mathrm{LocIdem}(f) \wedge \\ \wedge \Bigl(\forall g\ \Bigl(\mathrm{LocIdem}(g) \wedge \bigl(\forall x\ \mathrm{G}(g, x) \Rightarrow \mathrm{G}(f, x)\bigr) \Rightarrow \bigl(\forall y\ \mathrm{G}(f, y) \Rightarrow \mathrm{G}(g, y)\bigr)\Bigr)\Bigr)$$

утверждает, что $f \in F(I)$ (по определению 8). Она проверяет минимальность полугруппового идеала $G(I,f)$ среди полугрупповых идеалов $G(I,g)$, где g — локальный идемпотент.

С помощью формул можно проверить отношения $\sim$ (определение 10) и $\leqslant$ (определение 11) на множестве $F(I)$:

$$\begin{aligned}&f_1 \sim f_2 := \mathrm{F}(f_1) \wedge \mathrm{F}(f_2) \wedge \big(\forall x\, \mathrm{G}(f_1,x) \Rightarrow \mathrm{G}(f_2,x)\big)\\ &\quad (G(I,f_1) = G(I,f_2));\\ &f_1 \leqslant f_2 := \mathrm{F}(f_1) \wedge \mathrm{F}(f_2) \wedge (\exists x\ f_1 x f_2 \neq \{0\})\\ &\quad (f_1 \in F_{\tilde u}(I),\ f_2 \in F_{\tilde v}(I),\ F_{\tilde u}(I) \leqslant F_{\tilde v}(I)).\end{aligned}$$

Рассмотрим множество пар (f,x), где $f \in F(I)$, $x \in G(I,f)$, $x \notin J(fIf)$. Они задаются формулой

$$\mathrm{Rep}(f,x) := \mathrm{F}(f) \wedge \mathrm{G}(f,x) \wedge \big(\neg \mathrm{Jac}(f,x)\big).$$

Введём отношение $\sim_1$ следующим образом. Будем считать, что $(f,x_1) \sim_1 (f,x_2)$, если $x_1, x_2 \in IfI/J(IfI)$ и при изоморфизме на матричное кольцо M_n элементы x_1, x_2 переходят в ненулевые матрицы одинакового ранга (т. е. существуют обратимые элементы $y_1, y_2 \in IfI/J(IfI)$, такие что $y_1 x_1 y_2 = x_2$). Будем считать, что $(f_1,x) \sim_1 (f_2,x)$, если $f_1 \sim f_2$. Также введём отношение R следующим образом: $(f_1,x_1)\ R\ (f_2,x_2)$, если $f_1 \leqslant f_2$.

Отношения $\sim_1$ и R проверяются формулами

$$\begin{aligned}&(f_1,x_1) \sim_1 (f_2,x_2) := \mathrm{Rep}(f_1,x_1) \wedge \mathrm{Rep}(f_2,x_2) \wedge (f_1 \sim f_2) \wedge \mathrm{Eq}(f_1,x_1,x_2),\\ &(f_1,x_1)\ R\ (f_2,x_2) := \mathrm{Rep}(f_1,x_1) \wedge \mathrm{Rep}(f_2,x_2) \wedge (f_1 \leqslant f_2),\\ &\mathrm{Eq}(f,x_1,x_2) := \mathrm{Rep}(f,x_1) \wedge \mathrm{Rep}(f,x_2) \wedge\\ &\quad \wedge \big(\exists y_1\, \exists y_2\, \exists z\ \mathrm{Jac}(f, yz - f) \wedge \mathrm{Jac}(f, x_1 - y_1 x_2 y_2)\big).\end{aligned}$$

По лемме 1 каждой паре (f,x) можно поставить в соответствие единственный класс $\tilde u$, такой что $f \in F_{\tilde u}(I)$. По лемме 2 каждому классу $\tilde u$ можно поставить в соответствие $f \in F_{\tilde u}(I)$. По лемме 5, если $f \in F_{\tilde u}(I)$, то $IfI/J(IfI) = IF_{\tilde u}I/J(IF_{\tilde u}I) \cong \mathrm{M}_n$, $n = \operatorname{card}\tilde u$. Мы определили отношение $\sim_1$ так, что для любого фиксированного f справедливо $\{x \mid \mathrm{Rep}(f,x)\} = IfI \setminus J(IfI)$ и при изоморфизме на M_n элементы x_1, x_2 переходят в матрицы одинакового ранга тогда и только тогда, когда $(f,x_1) \sim_1 (f,x_2)$. В $\mathrm{M}_n \setminus \{0\}$ имеется n матриц различного ранга, значит,

$$\operatorname{card}\tilde u = \operatorname{card}\{(f,x) \mid f \in F_{\tilde u},\ \mathrm{Rep}(f,x)\}/{\sim_1}.$$

Таким образом, существует взаимно-однозначное отображение

$$\tau\colon P \to \{(f,x) \mid \mathrm{Rep}(f,x)\}/{\sim_1}.$$

Оно сохраняет отношение R по лемме 6.

Построим алгоритм, по которому каждое предложение φ языка структуры (P,R) переводится в предложение $\tilde\varphi$ кольцевого языка таким образом, что φ выполняется в (P,R) тогда и только тогда, когда $\tilde\varphi$ выполняется в $I(P,R)$:

подформула $\forall\, u\ \varphi(u,\ldots)$ переводится в подформулу

$$\forall\, f\ \forall\, x\ \bigl(\mathrm{Rep}(f,x) \Rightarrow \tilde{\varphi}(f,x,\ldots)\bigr);$$

подформула $\exists\, u\ \varphi(u,\ldots)$ переводится в подформулу

$$\exists\, f\ \exists\, x\ \bigl(\mathrm{Rep}(f,x) \wedge \tilde{\varphi}(f,x,\ldots)\bigr);$$

подформула $u_1 = u_2$ переводится в подформулу

$$(f_1,x_1) \sim_1 (f_2,x_2);$$

подформула $u_1\ R\ u_2$ переводится в подформулу

$$(f_1,x_1)\ R\ (f_2,x_2).$$

Очевидно, что такой алгоритм является искомым.

Пусть теперь кольца I_1 и I_2 элементарно эквивалентны, $\varphi \in \mathrm{Th}\bigl((P_1,R_1)\bigr)$. Тогда $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Th}(I_1)$, следовательно, $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Th}(I_2)$ и $\varphi \in \mathrm{Th}\bigl((P_2,R_2)\bigr)$. Значит, $(P_1,R_1) \equiv (P_2,R_2)$, что и требовалось доказать. □

Литература

[1] Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // Проблемы математики и механики. — Новосибирск, 1961. — С. 110—132.

[2] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990.

[3] Шматков В. Д. Изоморфизмы и автоморфизмы колец и алгебр инцидентности: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М., 1994.

[4] Belding W. Incidence rings of pre-ordered sets // Notre Dame J. Formal Logic. — 1973. — Vol. 14. — P. 481—509.

[5] Doubilet P., Rota G.-C., Stanley R. P. On the foundation of combinatorial theory. VI. The idea of generating functions // Proc. of the Sixth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probab. Vol. 2. — Univ. California Press, 1972. — P. 267—318; Перечислительные задачи комбинаторного анализа / под ред. Г. П. Гаврилова. — М.: Мир, 1979. — С. 160—228.

[6] Finch P. D. On the Möbius-function of non singular binary relation // Bull. Austral. Math. Soc. — 1970. — Vol. 3. — P. 155—162.

[7] Rota G.-C. On the foundation of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. — 1964. — Vol. 2, no. 4. — P. 340—368.

[8] Stanley R. P. Structure of incidence algebras and their automorphism groups // Amer. Math. Soc. Bull. — 1970. — Vol. 76. — P. 1236—1239.

[9] Tainiter M. Incidence algebras on generalized semigroups // J. Combin. Theory. — 1971. — Vol. 11. — P. 170—177.