Верхнемодулярные элементы решётки многообразий полугрупп. II*

Б. М. ВЕРНИКОВ
Уральский государственный университет
e-mail: Boris.Vernikov@usu.ru

УДК 512.532

Ключевые слова: полугруппа, многообразие, решётка, верхнемодулярный элемент решётки.

Аннотация

Многообразие полугрупп называется *многообразием ступени* $\leqslant 2$, если все его ниль-полугруппы нильпотентны ступени $\leqslant 2$, и *многообразием ступени* > 2 в противном случае. В работе полностью описаны многообразия ступени > 2, являющиеся верхнемодулярными элементами решётки всех многообразий полугрупп, и найдено сильное необходимое условие для многообразий ступени $\leqslant 2$ с тем же свойством.

Abstract

B. M. Vernikov, Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties. II, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 43—51.

A semigroup variety is called a *variety of degree* $\leqslant 2$ if all its nilsemigroups are semigroups with zero multiplication, and a *variety of degree* > 2 otherwise. We completely determine all semigroup varieties of degree > 2 that are upper-modular elements of the lattice of all semigroup varieties and find quite a strong necessary condition for semigroup varieties of degree $\leqslant 2$ to have the same property.

Хорошо известно, что решётка всех многообразий полугрупп **SEM** немодулярна. Многообразия полугрупп, решётка подмногообразий которых модулярна, полностью описаны [2]. Этот результат указывает, образно говоря, зоны «глобальной модулярности» в решётке **SEM**. Следующим естественным шагом в изучении феномена модулярности в **SEM** можно считать рассмотрение многообразий, обеспечивающих, так сказать, локальную модулярность в своём окружении. Говоря это, мы имеем в виду исследование модулярных элементов решётки **SEM** и других её элементов, определение которых так или иначе опирается на тождество модулярности. Напомним, что элемент x решётки $\langle L;\vee,\wedge\rangle$ называется *модулярным*, если

$$\forall\, y,z\in L\colon\, y\leqslant z \longrightarrow (x\vee y)\wedge z=(x\wedge z)\vee y,$$

*Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 06-01-00613).

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 7, с. 43—51.
© 2008 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

и *верхнемодулярным*, если

$$\forall y, z \in L\colon y \leqslant x \longrightarrow (z \vee y) \wedge x = (z \wedge x) \vee y.$$

Нижнемодулярные элементы определяются двойственно к верхнемодулярным. Многообразие полугрупп будем называть *модулярным* [*верхнемодулярным, нижнемодулярным*], если оно является модулярным [верхнемодулярным, нижнемодулярным] элементом решётки **SEM**. Первые результаты, относящиеся к модулярным и нижнемодулярным многообразиям, появились в работах [1, 8], где они играли вспомогательную роль. Систематическому изучению модулярных, верхнемодулярных и нижнемодулярных многообразий посвящены недавние работы [10—14, 16]. Краткое изложение результатов этих работ можно найти в обзорной статье [6]. В частности, в [13] получено необходимое условие верхней модулярности произвольного многообразия полугрупп и описаны верхнемодулярные коммутативные многообразия, а в [14] описаны верхнемодулярные ниль-многообразия (см. предложения 1 и 2 ниже). В данной заметке, являющейся непосредственным продолжением статьи [13], полностью описаны верхнемодулярные многообразия, содержащие по крайней мере одну ниль-полугруппу, не являющуюся полугруппой с нулевым умножением (теорема 1), и получено сильное необходимое условие верхней модулярности для многообразий, в которых все ниль-полугруппы являются полугруппами с нулевым умножением (теорема 2). Из этих результатов вытекают положительные ответы на два вопроса, поставленных в [13] (см. следствия 2 и 3).

Нам понадобится ряд определений и обозначений. Хорошо известно, что всякое периодическое многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ содержит наибольшее ниль-подмногообразие, которое мы будем обозначать через $\mathrm{Nil}(\mathcal{V})$. Ясно, что система тождеств вида $wx = xw = w$, где w — слово, а x — буква, не входящая в запись w, выполнена в полугруппе S тогда и только тогда, когда S содержит нулевой элемент 0 и все значения слова w в S равны 0. Как обычно, мы будем кратко записывать эту систему тождеств в виде $w = 0$ и ссылаться на равенство $w = 0$ как на обычное тождество. Через $\mathcal{T}$ обозначается тривиальное многообразие, а через $\mathcal{SEM}$ — многообразие всех полугрупп. Через $\mathrm{var}\,\Sigma$ мы обозначаем многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ. Положим

$$\mathcal{SL} = \mathrm{var}\{x^2 = x,\ xy = yx\}, \quad \mathcal{C} = \mathrm{var}\{x^2 = x^3,\ xy = yx\}.$$

Нам понадобятся следующие два результата.

Предложение 1 [13, теорема 1.1]. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ верхнемодулярно, то либо $\mathcal{V} = \mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{V}$ — периодическое многообразие и многообразие $\mathrm{Nil}(\mathcal{V})$ удовлетворяет тождествам $x^2y = xy^2$ и $xy = yx$.* □

Предложение 2 [13, теорема 1.2]. *Многообразие коммутативных полугрупп $\mathcal{V}$ верхнемодулярно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) *$\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — ниль-многообразие, удовлетворяющее тождествам $x^2y = xy^2$ и $xy = yx$;*

2) *$\mathcal{V} = \mathcal{G}\vee\mathcal{M}\vee\mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие периодических абелевых групп, $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{C}$, а $\mathcal{N}$ — многообразие, удовлетворяющее тождествам $x^2y = 0$ и $xy = yx$.* □

Пусть n — натуральное число. Многообразие полугрупп называется *многообразием ступени* $\leqslant n$, если все его ниль-полугруппы нильпотентны ступени $\leqslant n$, причём n — наименьшее число с таким свойством. Многообразия, не являющиеся многообразиями ступени $\leqslant n$, будем называть *многообразиями ступени* $> n$ (в частности, многообразие, содержащее ненильпотентную ниль-полугруппу, является многообразием ступени $> n$ для всякого n). Многообразие полугрупп называется *собственным*, если оно отлично от многообразия $\mathcal{SEM}$.

Первым из двух основных результатов данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ ступени > 2 верхнемодулярно тогда и только тогда, когда либо $\mathcal{V} = \mathcal{SEM}$, либо выполнено одно из условий* 1) *и* 2) *предложения* 2.

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ — собственное верхнемодулярное многообразие ступени > 2. Согласно предложению 2 достаточно доказать, что $\mathcal{V}$ коммутативно. Как хорошо известно, всякое многообразие ступени > 2 содержит многообразие

$$\mathcal{N}_3 = \mathrm{var}\{xyz = x^2 = 0,\ xy = yx\}.$$

Далее, в силу предложения 1 $\mathcal{V}$ — периодическое многообразие. Следовательно, $\mathcal{V}$ содержит наибольшее групповое подмногообразие, которое мы будем обозначать через $\mathrm{Gr}(\mathcal{V})$. Обозначим через $\mathcal{G}$ произвольное неабелево многообразие периодических групп, экспонента которого взаимно проста с экспонентой многообразия $\mathrm{Gr}(\mathcal{V})$. Учитывая, что многообразие $\mathcal{V}$ верхнемодулярно и $\mathcal{N}_3 \subseteq \mathcal{V}$, имеем

$$(\mathcal{G}\vee\mathcal{N}_3)\wedge\mathcal{V} = (\mathcal{G}\wedge\mathcal{V})\vee\mathcal{N}_3 = \bigl(\mathcal{G}\wedge\mathrm{Gr}(V)\bigr)\vee\mathcal{N}_3 = \mathcal{T}\vee\mathcal{N}_3 = \mathcal{N}_3.$$

В частности, многообразие $(\mathcal{G}\vee\mathcal{N}_3)\wedge\mathcal{V}$ коммутативно. Следовательно, существует вывод тождества $xy = yx$ из тождеств многообразий $\mathcal{G}\vee\mathcal{N}_3$ и $\mathcal{V}$. В частности, одно из этих многообразий удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $xy = w$. Легко проверяется (см., например, [13, лемма 2.10]), что если некоторое многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет такому тождеству, то $\mathcal{X}$ либо коммутативно, либо является многообразием ступени $\leqslant 2$. Очевидно, однако, что каждое из многообразий $\mathcal{G}\vee\mathcal{N}_3$ и $\mathcal{V}$ является многообразием ступени > 2, а первое из этих многообразий некоммутативно. Следовательно, многообразие $\mathcal{V}$ коммутативно. □

Как обычно, мы обозначаем через $L(\mathcal{V})$ решётку подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$. Из теоремы 1 и результатов работы [15] вытекает следствие.

Следствие 1. *Если $\mathcal{V}$ — собственное верхнемодулярное многообразие полугрупп ступени > 2, то решётка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна.* □

Теорема 1 сводит задачу описания верхнемодулярных многообразий к рассмотрению многообразий ступени $\leqslant 2$. Отметим, что, в отличие от случая собственных многообразий ступени >2, существуют некоммутативные верхнемодулярные многообразия полугрупп ступени $\leqslant 2$. Простейшими примерами таких многообразий являются многообразия $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$ всех полугрупп левых и правых нулей соответственно. В самом деле, эти многообразия, как хорошо известно, являются атомами решётки **SEM** и потому верхнемодулярны.

Известно (см. [4, лемма 3] или [13, предложение 2.11]), что многообразие полугрупп является многообразием ступени $\leqslant 2$ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет одному из тождеств

$$xy = (xy)^{r+1}, \tag{1}$$

$$xy = x^{r+1}y, \tag{2}$$

$$xy = xy^{r+1} \tag{3}$$

для некоторого натурального r. Если многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству (1), то квадрат всякой полугруппы из $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x = x^{r+1}$. Как известно, выполнение последнего тождества в полугруппе S равносильно тому, что S *вполне регулярна* (т. е. является объединением групп). Поэтому многообразия, удовлетворяющие тождеству (1), называются *многообразиями полугрупп с вполне регулярным квадратом*. Положим

$$\mathcal{P} = \operatorname{var}\{xy = x^2y,\ x^2y^2 = y^2x^2\}.$$

Через $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ будем обозначать многообразие, двойственное к $\mathcal{P}$. Отметим, что многообразия $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ удовлетворяют тождествам $xyz = yxz$ и $xyz = xzy$ соответственно.

Вторым основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Если $\mathcal{V}$ — верхнемодулярное многообразие полугрупп ступени $\leqslant 2$, то выполнено одно из следующих условий*:

1) *$\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом*;
2) *$\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \mathcal{P}$, где $\mathcal{K}$ — вполне регулярное многообразие полугрупп, такое что $\mathcal{RZ} \nsubseteq \mathcal{K}$*;
3) *$\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \overleftarrow{\mathcal{P}}$, где $\mathcal{K}$ — вполне регулярное многообразие полугрупп, такое что $\mathcal{LZ} \nsubseteq \mathcal{K}$.*

Доказательство. Нам понадобятся несколько обозначений. Для всякого простого числа p обозначим через $\mathcal{A}_p$ многообразие всех абелевых групп экспоненты, делящей p, а через $\mathcal{CSA}_p$ — многообразие всех вполне простых полугрупп над группами из $\mathcal{A}_p$. Положим

$$\begin{aligned}
&\mathcal{LSNB} = \operatorname{var}\{x^2 = x,\ xyz = xyzxz\},\\
&\mathcal{Q} = \operatorname{var}\{xy = xy^2,\ xyz^2 = yxz^2,\ xyx = yx^2\},\\
&\mathcal{RRB} = \operatorname{var}\{x^2 = x,\ xy = xyx\},\\
&\mathcal{RZM} = \{xyz = yz\}.
\end{aligned}$$

Отметим, что $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$. Сформулируем теперь несколько вспомогательных утверждений. Из [3, леммы 2 и 3] вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Если $\mathcal{X}$ — любое из многообразий $\mathcal{CSA}_p$, $\mathcal{LSNB}$, $\mathcal{RRB}$ и $\mathcal{RZM}$, то $\mathcal{X} \vee \mathcal{P} \supseteq \mathcal{Q}$.* □

Лемма 2 [3, лемма 7]. *Если многообразие полугрупп удовлетворяет тождеству* (2), *но не удовлетворяет тождеству* (1), *то оно содержит многообразие $\mathcal{P}$.* □

Всякое периодическое многообразие $\mathcal{X}$ содержит наибольшее вполне регулярное подмногообразие, которое мы будем обозначать через $\mathrm{CR}(\mathcal{X})$. Положим

$$\mathcal{ZM} = \mathrm{var}\{xy = 0\}.$$

Из [3, лемма 14] и [4, лемма 4] вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству* (2) *и не содержит многообразия $\mathcal{RZM}$, то $\mathcal{X} = \mathrm{CR}(X) \vee \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$, $\mathcal{ZM}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$.* □

Если u — слово, а x — буква, то через $c(u)$ обозначается множество всех букв, входящих в запись слова u, через $\ell(u)$ — длина этого слова, через $\ell_x(u)$ — число вхождений буквы x в запись u, а через $t(u)$ — последняя буква слова u. В следующей лемме пункты 1—3 хорошо известны и легко проверяются, а пункт 4 доказан в [4, лемма 7].

Лемма 4.

1. *Тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{RZ}$ тогда и только тогда, когда буквы $t(u)$ и $t(v)$ совпадают.*
2. *Тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{SL}$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$.*
3. *Тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$ и для всякой буквы $x \in c(u)$ либо $\ell_x(u) = \ell_x(v) = 1$, либо $\ell_x(u) > 1$ и $\ell_x(v) > 1$.*
4. *Тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$ и либо $\ell_{t(u)}(u) > 1$ и $\ell_{t(v)}(v) > 1$, либо $\ell_{t(u)}(u) = \ell_{t(v)}(v) = 1$ и буквы $t(u)$ и $t(v)$ совпадают.* □

Лемма 5. *$\mathcal{C} \vee \mathcal{RZ} \supseteq \mathcal{P}$.*

Доказательство. Пусть $u = v$ — произвольное тождество, выполненное в многообразии $\mathcal{C} \vee \mathcal{RZ}$. Очевидно, что оно выполнено в многообразиях $\mathcal{RZ}$ и $\mathcal{SL}$. Из пунктов 1 и 2 леммы 4 вытекает, что $c(u) = c(v)$ и буквы $t(u)$ и $t(v)$ совпадают. Кроме того, тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{C}$, и потому в силу пункта 3 леммы 4 каждая буква из $c(u)$ либо входит и в u и в v ровно один раз, либо входит и в u и в v более одного раза. Объединяя сказанное и учитывая пункт 4 леммы 4, мы получаем, что тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{P}$. □

Для произвольного элемента a решётки L обозначим через $(a]$ *главный идеал* решётки L, порождённый a; иными словами, $(a] = \{x \in L \mid x \leqslant a\}$. Несложные теоретико-решёточные соображения позволяют установить, что справедлива следующая лемма.

Лемма 6 [13, лемма 2.1]. *Пусть a — верхнемодулярный элемент решётки L. Решётка $(a]$ модулярна тогда и только тогда, когда всякий её элемент верхнемодулярен в L.* □

Приступим к непосредственному доказательству теоремы 2. Пусть $\mathcal{V}$ — верхнемодулярное многообразие полугрупп ступени $\leqslant 2$. Предположим, что $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{Q}$. В силу предложения 1 $\mathcal{V}$ — периодическое многообразие. Возьмём в качестве p произвольное простое число, не делящее экспоненту многообразия $\mathrm{Gr}(\mathcal{V})$. Ясно, что в этом случае $\mathcal{A}_p \nsubseteq \mathcal{V}$. Как хорошо известно, решётка $L(\mathcal{CSA}_p)$ имеет вид, изображённый на рис. 1. Следовательно, $\mathcal{CSA}_p \wedge \mathcal{V} \subseteq \mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ}$. С другой стороны, в силу леммы 1 $\mathcal{CSA}_p \vee \mathcal{P} \supseteq \mathcal{Q}$. Поскольку $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{V}$ и многообразие $\mathcal{V}$ верхнемодулярно, имеем

$$\mathcal{Q} \subseteq (\mathcal{CSA}_p \vee \mathcal{P}) \wedge \mathcal{V} = (\mathcal{CSA}_p \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{P} \subseteq \mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ} \vee \mathcal{P}.$$

Но $\mathcal{Q} \nsubseteq \mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ} \vee \mathcal{P}$, поскольку в многообразии $\mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ} \vee \mathcal{P}$ выполнено тождество $xyzt = xzyt$, не выполненное в $\mathcal{Q}$ (последнее вытекает из [3, лемма 1]). Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{Q} \nsubseteq \mathcal{V}$.

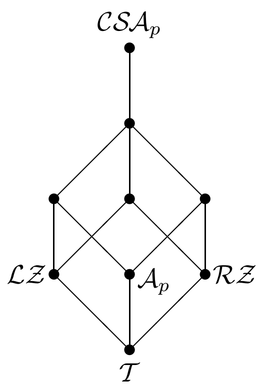

Рис. 1. Решётка $L(\mathcal{CSA}_p)$

Предположим, что $\mathcal{V}$ не является многообразием полугрупп с вполне регулярным квадратом, т. е. не удовлетворяет тождеству (1). Тогда в $\mathcal{V}$ выполнено одно из тождеств (2) и (3). В силу симметрии можно считать, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству (2). Покажем, что в этом случае выполнено условие 2) теоремы 2.

По лемме 2 имеем, что $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{P}$. Из леммы 1 вытекает теперь, что $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{CSA}_p$ (ни для какого p), $\mathcal{LSNB}$, $\mathcal{RRB}$ и $\mathcal{RZM}$. Применяя лемму 3 и учитывая, что $\mathcal{Q} \nsubseteq \mathcal{V}$, мы получаем, что $\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \mathcal{U}$, где $\mathcal{K} = \mathrm{CR}(\mathcal{V})$, а $\mathcal{U}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$, $\mathcal{ZM}$ и $\mathcal{P}$. Но если $\mathcal{U} = \mathcal{T}$ или $\mathcal{U} = \mathcal{ZM}$, то многообразие $\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \mathcal{U}$ удовлетворяет тождеству (1). Следовательно, $\mathcal{U} = \mathcal{P}$ и $\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \mathcal{P}$.

Итак, $\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \mathcal{P}$, где $\mathcal{K}$ — вполне регулярное многообразие, не содержащее многообразий $\mathcal{CSA}_p$, $\mathcal{RRB}$ и $\mathcal{LSNB}$. Отсюда и из результатов [2] вытекает, что решётка $L(\mathcal{V})$ модулярна. Применяя лемму 6, получаем, что всякое подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$ верхнемодулярно.

Предположим, что $\mathcal{RZ} \subseteq \mathcal{K}$. Тогда $\mathcal{P} \vee \mathcal{RZ} \subseteq \mathcal{V}$, и потому многообразие $\mathcal{P} \vee \mathcal{RZ}$ верхнемодулярно. Используя лемму 5 и учитывая, что многообразие $\mathcal{P} \vee \mathcal{RZ}$ верхнемодулярно и $\mathcal{RZ} \subseteq \mathcal{P} \vee \mathcal{RZ}$, имеем

$$\big(\mathcal{C} \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{RZ})\big) \vee \mathcal{RZ} = (\mathcal{C} \vee \mathcal{RZ}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{RZ}) = \mathcal{P} \vee \mathcal{RZ}.$$

С другой стороны, многообразие $\mathcal{C} \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{RZ})$ удовлетворяет тождествам $xy = x^2y$ и $xy = yx$. Хорошо известно и легко проверяется, что эти два тождества задают многообразие $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$. Следовательно, это многообразие содержит $\mathcal{C} \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{RZ})$. Обратное включение очевидно, и потому

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{RZ} = \big(\mathcal{C} \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{RZ})\big) \vee \mathcal{RZ} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM} \vee \mathcal{RZ}.$$

Однако многообразия $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM} \vee \mathcal{RZ}$ и $\mathcal{P} \vee \mathcal{RZ}$ различны, поскольку первое из них удовлетворяет тождеству $xy = xy^2$, не выполненному во втором. Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{RZ} \nsubseteq \mathcal{K}$. □

Из теорем 1 и 2 и результатов [2] вытекает следствие 2.

Следствие 2. *Если $\mathcal{V}$ — собственное верхнемодулярное многообразие полугрупп, то решётка $L(\mathcal{V})$ модулярна.* □

Из следствия 2 и леммы 6 вытекает следствие 3.

Следствие 3. *Всякое подмногообразие собственного верхнемодулярного многообразия полугрупп верхнемодулярно.* □

Следствия 2 и 3 дают положительные ответы на вопросы 5.4 б) и 5.4′ работы [13] соответственно.

В следствии 1 указан обширный класс полугрупповых многообразий, в котором верхняя модулярность многообразия влечёт дистрибутивность решётки его подмногообразий. Ещё два таких класса многообразий приводятся в следующих двух утверждениях.

Следствие 4. *Пусть $\mathcal{V}$ — собственное верхнемодулярное многообразие полугрупп, не являющееся многообразием полугрупп с вполне регулярным квадратом. Решётка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна [удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству] тогда и только тогда, когда решётка подмногообразий произвольного группового подмногообразия многообразия $\mathcal{V}$ дистрибутивна [удовлетворяет этому тождеству].*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $\mathcal{V}$ — собственное верхнемодулярное многообразие полугрупп, не являющееся многообразием полугрупп с вполне регулярным квадратом, а ε — нетривиальное решёточное тождество (в частности, тождество дистрибутивности). Если $\mathcal{V}$ — многообразие ступени >2, то решётка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна (а значит, удовлетворяет тождеству ε) в силу следствия 1. Пусть теперь $\mathcal{V}$ — многообразие ступени $\leqslant 2$. Из теоремы 2 по соображениям двойственности следует, что $\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \mathcal{P}$, где $\mathcal{K}$ — вполне регулярное многообразие, не содержащее $\mathcal{RZ}$. Напомним, что вполне регулярное многообразие называется *ортодоксальным*, если в каждой его полугруппе множество всех её идемпотентов образует подполугруппу. Хорошо известно (см., например, [9]), что вполне регулярное многообразие ортодоксально тогда и только тогда, когда оно не содержит многообразия $\mathcal{CSA}_p$ ни для какого простого p. Учитывая, что $\mathcal{CSA}_p \supseteq \mathcal{RZ}$ для всякого простого p (см. рис. 1) и $\mathcal{K} \not\supseteq \mathcal{RZ}$, получаем, что многообразие $\mathcal{K}$ ортодоксально. Из [5, следствие 5] вытекает теперь, что если решётка подмногообразий произвольного группового многообразия, содержащегося в $\mathcal{K}$, удовлетворяет тождеству ε, то и решётка $L(\mathcal{K})$ удовлетворяет этому тождеству. Остаётся учесть, что в силу [3, лемма 15] решётка $L(\mathcal{V})$ изоморфна подпрямому произведению решётки $L(\mathcal{K})$ и трёхэлементной цепи. □

Напомним, что многообразие полугрупп называется *комбинаторным*, если все группы в нём тривиальны.

Следствие 5. *Если $\mathcal{V}$ — комбинаторное верхнемодулярное многообразие полугрупп, то решётка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна.*

Доказательство. По следствию 4 можно считать, что $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом. Пусть $S \in \mathcal{V}$ и $x, y \in S$. Поскольку $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству (1), xy является групповым элементом в S. Но в силу комбинаторности многообразия $\mathcal{V}$ все подгруппы в S одноэлементны. Следовательно, xy — идемпотент в S. Таким образом, $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $xy = (xy)^2$. Но, как показано в [7], многообразие, заданное последним тождеством, имеет дистрибутивную решётку подмногообразий. □

Нам не известно ни одного примера собственного верхнемодулярного многообразия с недистрибутивной решёткой подмногообразий. Кроме того, нам не известно ни одного примера многообразия, не являющегося верхнемодулярным, которое удовлетворяло бы одному из условий 1)—3) теоремы 2. Это приводит к следующим трём вопросам, первый из которых уже отмечался в [13], а второй — в [6].

Вопрос 1. Существует ли собственное верхнемодулярное многообразие полугрупп, решётка подмногообразий которого недистрибутивна?

Вопрос 2. Существует ли многообразие полугрупп, не являющееся верхнемодулярным, с вполне регулярным квадратом?

Вопрос 3. Существует ли многообразие полугрупп, не являющееся верхнемодулярным, удовлетворяющее одному из условий 2) и 3) теоремы 2?

Литература

[1] Верников Б. М., Волков М. В. Решётки нильпотентных многообразий полугрупп // Алгебраические системы и их многообразия. — Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1988. — С. 53—65.

[2] Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решёткой подмногообразий // Докл. РАН. — 1992. — Т. 326, № 3. — С. 409—413.

[3] Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решёткой подмногообразий. III // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1992. — № 8. — С. 21—29.

[4] Голубов Э. А., Сапир М. В. Финитно аппроксимируемые многообразия полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1982. — № 11. — С. 21—29.

[5] Расин В. В. Многообразия ортодоксальных клиффордовых полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1982. — № 11. — С. 82—85.

[6] Шеврин Л. Н., Верников Б. М., Волков М. В. Решётки многообразий полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — В печати.

[7] Gerhard J. A. Semigroups with an idempotent power. II. The lattice of equational subclasses of $[(xy)^2 = xy]$ // Semigroup Forum. — 1977. — Vol. 14, no. 4. — P. 375—388.

[8] Ježek J., McKenzie R. N. Definability in the lattice of equational theories of semigroups // Semigroup Forum. — 1993. — Vol. 46, no. 2. — P. 199—245.

[9] Polák L. On varieties of completely regular semigroups. I // Semigroup Forum. — 1985. — Vol. 32, no. 1. — P. 97—123.

[10] Vernikov B. M. Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties // Semigroup Forum. — 2007. — Vol. 75, no. 3. — P. 554—566.

[11] Vernikov B. M. On modular elements of the lattice of semigroup varieties // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2007. — Vol. 48, no. 4. — P. 595—606.

[12] Vernikov B. M. Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties. II // Acta Sci. Math. (Szeged). — To appear.

[13] Vernikov B. M. Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties // Algebra Universalis. — To appear.

[14] Vernikov B. M., Volkov M. V. Modular elements of the lattice of semigroup varieties. II // Contrib. General Algebra. — 2006. — Vol. 17. — P. 173—190.

[15] Volkov M. V. Commutative semigroup varieties with distributive subvariety lattices // Contrib. General Algebra. — 1991. — Vol. 7. — P. 351—359.

[16] Volkov M. V. Modular elements of the lattice of semigroup varieties // Contrib. General Algebra. — 2005. — Vol. 16. — P. 275—288.