Гипотезы Амицура и Регева для коразмерностей обобщённых полиномиальных тождеств*

А. С. ГОРДИЕНКО
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: gordienko_a_s@mail.ru

УДК 512.552.4

Ключевые слова: обобщённое полиномиальное тождество, коразмерность, кохарактер, ассоциативная алгебра, асимптотика, PI-экспонента, гипотеза Регева, гипотеза Амицура, диаграмма Юнга, представления симметрической группы.

Аннотация

Для всякой конечномерной ассоциативной алгебры A над полем характеристики 0 существуют такие числа $C \in \mathbb{Q}_+$ и $t \in \mathbb{Z}_+$, что $\mathrm{gc}_n(A) \sim Cn^t d^n$ при $n \to \infty$, где $d = \mathrm{PI}\exp(A) \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, для коразмерностей $\mathrm{gc}_n(A)$ обобщённых полиномиальных тождеств справедливы гипотезы С. А. Амицура и А. Регева.

Abstract

A. S. Gordienko, Regev's and Amitsur's conjectures for codimensions of generalized polynomial identities, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 53—62.

Let A be a finite-dimensional associative algebra over a field of characteristic 0. Then there exist $C \in \mathbb{Q}_+$ and $t \in \mathbb{Z}_+$ such that $\mathrm{gc}_n(A) \sim Cn^t d^n$ as $n \to \infty$, where $d = \mathrm{PI}\exp(A)$. In particular, Amitsur's and Regev's conjectures hold for the codimensions $\mathrm{gc}_n(A)$ of generalized polynomial identities.

Полиномиальные тождества изучались многими авторами с различных точек зрения. В начале 1980-х годов в теории полиномиальных тождеств зародилось и стало бурно развиваться новое направление, связанное с исследованием числовых характеристик многообразий алгебр. С. А. Амицуром и А. Регевом были сформулированы гипотезы об асимптотическом поведении коразмерностей полиномиальных тождеств ассоциативных алгебр. Гипотеза Амицура была доказана в 1999 г. М. В. Зайцевым и А. Джамбруно [6, с. 143, теорема 5.2] для всех ассоциативных алгебр. Для широкого класса алгебр была доказана и гипотеза Регева [1, 3, 4]. Кроме обычных тождеств, важную роль в теории колец играют обобщённые полиномиальные тождества [2]. Возникает вопрос о справедливости указанных гипотез для обобщённых коразмерностей. В данной работе

*Работа поддержана грантами РФФИ 06-01-00485 и НШ-1983.2008.1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 7, с. 53—62.

анонсируются результаты, полное доказательство которых будет опубликовано позднее.

Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем характеристики 0, $\mathrm{gc}_n(A)$ — последовательность её обобщённых коразмерностей.

Гипотеза 1 (С. А. Амицур). Существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{gc}_n(A)} \in \mathbb{Z}_+$.

Гипотеза Амицура подтверждается в теореме 3, причём оказывается, что число $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{gc}_n(A)}$ совпадает с экспонентой $\mathrm{PI}\exp(A)$ обычных тождеств.

Гипотеза 2 (А. Регев). Существуют такие числа $C \in \mathbb{Q}_+$ и $t \in \mathbb{Z}_+$, что $\mathrm{gc}_n(A) \sim Cn^t d^n$ при $n \to \infty$, где $d = \mathrm{PI}\exp(A)$. (Мы пишем, что $f \sim g$, если $\lim \frac{f}{g} = 1$.)

Справедливость гипотезы Регева следует из теоремы 4. Кроме того, мы вычисляем обобщённые коразмерности полных матричных алгебр (теорема 1).

Замечание. В случае обычных коразмерностей $\mathrm{c}_n(A)$ на константы C и t накладываются более слабые ограничения, так как существуют алгебры [5], для которых $\mathrm{c}_n(A) \sim Cn^t d^n$, где $C \notin \mathbb{Q}$ и $t < 0$.

Определение. Пусть $F\langle X\rangle$ — свободная алгебра без 1 на счётном множестве $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ над некоторым полем F, A — F-алгебра (здесь мы не накладываем условий $\operatorname{char} F = 0$ и $\dim A < +\infty$). Многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle *_F A$ называется *обобщённым тождеством* в алгебре A, если $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ для всех $a_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$. (Здесь знаком $*$ обозначено свободное произведение алгебр.)

Понятно, что обобщённые тождества алгебры A образуют идеал в алгебре $F\langle X\rangle *_F A$. Обозначим его через $\mathrm{GId}(A)$.

Пусть

$$V_n(A) = \langle a_0 x_{\sigma(1)} a_1 x_{\sigma(2)} a_2 \cdots a_{n-1} x_{\sigma(n)} a_n \mid \sigma \in \mathrm{S}_n,\ a_i \in A \cup \{1\}\rangle_F, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Элементы пространства $V_n(A)$ называются *обобщёнными полилинейными многочленами* с коэффициентами в алгебре A. Последовательность

$$\mathrm{gc}_n(A) = \dim \frac{V_n(A)}{V_n(A) \cap \mathrm{GId}(A)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

назовём *последовательностью обобщённых коразмерностей* алгебры A.

Обозначим через $L(A^{\otimes n}; A)$ пространство n-линейных отображений из алгебры A в алгебру A. Тогда существует естественное вложение

$$\frac{V_n(A)}{V_n(A) \cap \mathrm{GId}(A)} \subseteq L(A^{\otimes n}; A).$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Если* $m = \dim A < +\infty$, *то* $\mathrm{gc}_n(A) \leqslant \dim L(A^{\otimes n}; A) = m^{n+1}$.

Замечание. Таким образом, обобщённые коразмерности всякой конечномерной алгебры конечны. Однако существуют бесконечномерные алгебры, у которых все обобщённые коразмерности бесконечны. Пусть G — алгебра Грассмана с образующими e_i, $i \in \mathbb{N}$, где $e_i e_j = -e_j e_i$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$. Тогда для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ многочлены $e_i x_1 \cdots x_n$, $i \in \mathbb{N}$, линейно независимы по модулю $\mathrm{GId}(G)$. Действительно, пусть

$$\alpha_{i_1} e_{i_1} x_1 \cdots x_n + \ldots + \alpha_{i_s} e_{i_s} x_1 \cdots x_n \equiv 0.$$

Подставив $x_j = e_{j+\ell}$, $1 \leqslant j \leqslant s$, где $\ell = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant s} i_j$, получим сумму линейно независимых элементов, поэтому все α_{i_j} равны нулю.

Теорема 1. *Пусть $\mathrm{M}_k(F)$ — алгебра всех $(k \times k)$-матриц. Тогда*

$$\mathrm{gc}_n\big(\mathrm{M}_k(F)\big) = k^{2(n+1)}.$$

Далее везде полагаем, что $\operatorname{char} F = 0$, $\dim A < +\infty$. Оказывается, что обобщённые коразмерности не меняются при расширении основного поля.

Теорема 2. *Пусть $K \supset F$ — расширение основного поля F, $\bar{A} = A \otimes_F K$,*

$$\mathrm{gc}_n^K(\bar{A}) = \dim_K \frac{V_n^K(\bar{A})}{V_n^K(\bar{A}) \cap \mathrm{GId}(\bar{A})}$$

(множество $\mathrm{GId}(\bar{A})$ является идеалом в $K\langle X\rangle *_K \bar{A}$). Тогда $\mathrm{gc}_n^K(\bar{A}) = \mathrm{gc}_n(A)$.

В силу теоремы Веддербёрна—Мальцева $A = A_0 + J$ — прямая сумма подпространств, где $J = J(A)$ — радикал Джекобсона алгебры A, а A_0 — её максимальная полупростая подалгебра, $A_0 = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_\omega$, $\omega \in \mathbb{N}$, — прямая сумма простых алгебр. Пусть

$$d = \max(\dim(A_{q_1} + \ldots + A_{q_t}) \mid A_{q_1} J A_{q_2} J \cdots J A_{q_t} \neq 0)$$

(можно считать, что $A_{q_i} \neq A_{q_j}$ при $i \neq j$). Согласно теореме М. В. Зайцева и А. Джамбруно [6, гл. 6, § 2] число d является экспонентой роста обычных тождеств. Докажем аналог этой теоремы для обобщённых тождеств.

Теорема 3. *Пусть $J^p = 0$, $J^{p-1} \neq 0$. Тогда*

$$d^n \leqslant \mathrm{gc}_n(A) \leqslant 2^\omega (\dim A)\left(\sum_{s=0}^{p-1} \binom{n}{s} (\dim J)^s d^{-s}\right) d^n$$

при $d > 0$ и $n \geqslant p-1$. При $d = 0$ и $n \geqslant p$ выполняется равенство $\mathrm{gc}_n(A) = 0$.

Следствие. *Для обобщённых коразмерностей любой конечномерной ассоциативной алгебры A над полем характеристики 0 справедлива гипотеза С. А. Амицура.*

Доказательство теоремы 3. Число $\mathrm{gc}_n(A)$ является рангом системы линейных уравнений на коэффициенты полилинейного обобщённого тождества степени n. Каждая строчка этой системы соответствует подстановке базисных элементов алгебры A вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$. Достаточно подставлять не более $p-1$ элементов радикала, так как иначе соответствующее уравнение будет нулевым. Фиксируем базис в A, являющийся объединением базисов алгебр A_i и J. Рассмотрим подстановку $a_1 \mapsto x_1$, $a_2 \mapsto x_2, \ldots$, $a_n \mapsto x_n$. Пусть

$A_{q_1} \oplus A_{q_2} \oplus \ldots \oplus A_{q_t}$ — минимальная сумма алгебр, содержащая все элементы алгебры A_0, встречающиеся в наборе $(a_i)_{i=1}^n$, т. е. для каждого k существует i, такое что $a_i \in A_{q_k}$. Если $\dim(A_{q_1} \oplus A_{q_2} \oplus \ldots \oplus A_{q_t}) > d$, то соответствующая подстановка обнуляет любой полилинейный многочлен, т. е. даёт нулевые уравнения. Поэтому достаточно рассматривать не более $2^\omega \sum\limits_{s=0}^{p-1} \binom{n}{s} (\dim J)^s d^{n-s}$ подстановок (число подмножеств во множестве $\{A_1, \ldots, A_\omega\}$ равно 2^ω). Отсюда получаем оценку сверху, так как всякая подстановка даёт одно уравнение на коэффициенты тождества, эквивалентное $\dim A$ скалярным уравнениям.

Без ограничения общности $\dim(A_1 \oplus \ldots \oplus A_t) = d$, причём $A_1 J A_2 J \cdots J A_t \neq 0$. Согласно теореме 2 мы можем считать поле алгебраически замкнутым. Тогда $A_\ell \cong \mathrm{M}_{k_\ell}(F)$, где $k_\ell \in \mathbb{N}$. Пусть $e_{ij}^{(\ell)}$ — матричные единицы алгебр $\mathrm{M}_{k_\ell}(F)$. Для того чтобы доказать оценку снизу, достаточно для каждого набора

$$\nu = \big((\gamma_1, \alpha_1, \beta_1), \ldots, (\gamma_n, \alpha_n, \beta_n)\big), \quad 1 \leqslant \gamma_i \leqslant t, \quad 1 \leqslant \alpha_i, \beta_i \leqslant k_{\gamma_i},$$

построить такой многочлен $f_\nu \in V_n(A)$, что

$$f_\nu\big(e_{r_1 t_1}^{(m_1)}, \ldots, e_{r_n t_n}^{(m_n)}\big) = \begin{cases} a, & \text{если } m_q = \gamma_q,\ r_q = \alpha_q,\ t_q = \beta_q \text{ для всех } 1 \leqslant q \leqslant n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $a \neq 0$ — некоторый элемент алгебры A. Из определения видно, что число таких многочленов будет равно d^n и по модулю тождеств они будут линейно независимы.

Так как $e_{ii}^{(\ell)}$ — ортогональные идемпотенты, то

$$J = \sum_{\ell,i,m,v} J_{iv}^{(\ell,m)} + \sum_{m,v} J_{0v}^{(0,m)} + \sum_{\ell,i} J_{i0}^{(\ell,0)} + J_{00}^{(0,0)} - \tag{1}$$

прямая сумма подпространств, причём

$$e_{tt}^{(u)} j_{iv}^{(\ell,m)} = \delta_{u\ell} \delta_{ti} j_{iv}^{(\ell,m)}, \quad j_{iv}^{(\ell,m)} e_{tt}^{(u)} = \delta_{mu} \delta_{vt} j_{iv}^{(\ell,m)}, \tag{2}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $j_{iv}^{(\ell,m)} \in J_{iv}^{(\ell,m)}$ — произвольный элемент; либо $1 \leqslant \ell \leqslant \omega$ и $1 \leqslant i \leqslant k_\ell$, либо $\ell = i = 0$; либо $1 \leqslant m \leqslant \omega$ и $1 \leqslant v \leqslant k_m$, либо $m = v = 0$; $1 \leqslant u \leqslant \omega$; $1 \leqslant t \leqslant k_u$. В силу выбора алгебр A_i существуют такие $j_{i_s v_s}^{(s,s+1)} \in J_{i_s v_s}^{(s,s+1)}$, что можно найти

$$b \in A_1 j_{i_1 v_1}^{(1,2)} A_2 \cdots A_{t-1} j_{i_{t-1} v_{t-1}}^{(t-1,t)} A_t \setminus \{0\}.$$

Пусть для определённости $e_{11}^{(1)} b e_{11}^{(t)} \neq 0$. Положим

$$a = e_{1 i_1}^{(1)} j_{i_1 v_1}^{(1,2)} e_{v_1 i_2}^{(2)} j_{i_2 v_2}^{(2,3)} \cdots j_{i_{t-1} v_{t-1}}^{(t-1,t)} e_{v_{t-1} 1}^{(t)}.$$

Тогда достаточно рассмотреть

$$\begin{aligned}f_\nu = {}&\left(e^{(1)}_{1\xi_1} x_{\zeta_1} e^{(1)}_{\eta_1\xi_2} x_{\zeta_2} \cdots x_{\zeta_r} e^{(1)}_{\eta_r i_1}\right) j^{(1,2)}_{i_1 v_1} \times \\ &\times \left(e^{(2)}_{v_1\xi_{r+1}} x_{\zeta_{r+1}} e^{(2)}_{\eta_{r+1}\xi_{r+2}} x_{\zeta_{r+2}} \cdots x_{\zeta_\ell} e^{(t-1)}_{\eta_\ell i_{t-1}}\right) j^{(t-1,t)}_{i_{t-1}v_{t-1}} \times \\ &\times \left(e^{(t)}_{v_{t-1}\xi_{\ell+1}} x_{\zeta_{\ell+1}} \cdots x_{\zeta_n} e^{(t)}_{\eta_n 1}\right).\end{aligned}$$

Мы помещаем переменную x_k в γ_k-ю скобку, полагая $\xi_i = \alpha_k$, $\eta_i = \beta_k$, $\zeta_i = k$. □

Если алгебра A без единицы, т. е.

$$\sum_{m,v} J^{(0,m)}_{0v} + \sum_{\ell,i} J^{(\ell,0)}_{i0} + J^{(0,0)}_{00} \neq 0,$$

то рассмотрим алгебру $A^+ = A + F\cdot 1$ с присоединённой единицей 1. Положим

$$e_0 = e^{(0)}_{00} = 1 - \sum_{\ell,i} e^{(\ell)}_{ii}.$$

Тогда $e_0^2 = e_0$, $A^+ = A_0^+ + J$, где $A_0^+ = Fe_0 \oplus A_0$ — прямая сумма алгебр, и равенства (2) выполняются теперь и в случае $u = r = t = 0$. Можно для удобства ввести символ e_0 в сигнатуру обобщённых тождеств алгебры A:

$$e_0 x = x - \sum_{\ell,i} e^{(\ell)}_{ii} x, \quad x e_0 = x - \sum_{\ell,i} x e^{(\ell)}_{ii}.$$

Разумеется, подставлять e_0 вместо переменных по-прежнему не разрешается. Тогда, независимо от наличия единицы в алгебре A, всякий элемент $V_n(A)$ есть линейная комбинация одночленов вида

$$f = a^{(\ell_0,m_1)}_{i_0 v_1} x_{\zeta_1} a^{(\ell_1,m_2)}_{i_1 v_2} x_{\zeta_2} a^{(\ell_2,m_3)}_{i_2 v_3} \cdots a^{(\ell_{n-1},m_n)}_{i_{n-1} v_n} x_{\zeta_n} a^{(\ell_n,m_{n+1})}_{i_n v_{n+1}}, \tag{3}$$

где $a^{(\ell,m)}_{iv}$ при $\ell \neq m$ — базисный элемент пространства $J^{(\ell,m)}_{iv}$, а $a^{(\ell,\ell)}_{iv}$ является либо базисным элементом пространства $J^{(\ell,\ell)}_{iv}$, либо матричной единицей $e^{(\ell)}_{iv}$ и, если A — алгебра без единицы, то элемент $a^{(0,0)}_{00} = e^{(0)}_{00}$ также допустим. Обозначим через Ξ множество всех многочленов вида (3). Далее считаем, что фиксированный базис Θ алгебры A состоит из матричных единиц и элементов базиса радикала, согласованного с разложением (1). Пусть $\Theta^+ = \Theta$ для алгебры A с единицей и $\Theta^+ = \Theta \cup \{e^{(0)}_{00}\}$, если A без единицы.

Определим отображения

$$\begin{aligned}\varphi\colon \Xi \times \{1,\ldots,n\} \to \mathbb{Z}^4_+, \quad \varphi(f,k) = (m_s, v_s, \ell_s, i_s),\\ \psi\colon \Theta^n \times \{1,\ldots,n\} \to \mathbb{Z}^4_+, \quad \psi(a,k) = (m, v, \ell, i).\end{aligned}$$

Здесь числа m_s, v_s, ℓ_s, i_s берутся из формулы (3) при s, удовлетворяющем условию $k = \zeta_s$. Через $a = (a_1,\ldots,a_n)$ мы обозначили набор из некоторых n элементов базиса Θ. Числа m, v, ℓ и i находятся из условий $a_k \in J^{(\ell,m)}_{iv}$ или $a_k = e^{(\ell)}_{iv}$. В последнем случае полагаем $m = \ell$.

Теперь заметим, что если для некоторого многочлена f и набора a выполнено условие $\varphi(f,\cdot) \neq \psi(a,\cdot)$, т. е. существует такое число $1 \leqslant k \leqslant n$, что $\varphi(f,k) \neq \psi(a,k)$, то $f(a) = 0$. Следовательно, если $f_s \in \Xi$ — такие одночлены, что ни один из них не является тождеством и $\varphi(f_s,\cdot) \neq \varphi(f_t,\cdot)$ при $s \neq t$, то f_s линейно независимы по модулю $\mathrm{GId}(A)$. Для проверки достаточно для каждого s совершить подстановку a, такую что $\varphi(f_s,\cdot) = \psi(a,\cdot)$ и $f_s(a) \neq 0$. Тогда для $t \neq s$ будет выполнено $f_t(a) = 0$. Отсюда получаем

$$\frac{V_n(A)}{V_n(A) \cap \mathrm{GId}(A)} = \bigoplus_{\chi} B(\chi),$$

где $B(\chi) = \pi\langle f \in \Xi \mid \varphi(f,\cdot) = \chi(\cdot)\rangle_F$, $\pi\colon V_n(A) \to \frac{V_n(A)}{V_n(A)\cap\mathrm{GId}(A)}$ — естественная проекция, $\chi\colon \{1,\ldots,n\} \to \mathbb{Z}_+^4$ — некие отображения.

Пусть теперь $N = \dim A_0$, тройки (m,v,i), где $1 \leqslant m \leqslant \omega$, $1 \leqslant v,i \leqslant k_m$, занумерованы числами $1,\ldots,N$, причём отображение Φ ставит в соответствие каждой тройке её номер. Фиксируем числа n_s, $1 \leqslant s \leqslant N$, такие что $\sum\limits_{s=1}^{N} n_s \leqslant n$. Пусть предикат $\Pi(\chi,n_1,\ldots,n_N)$ принимает значение «истина» тогда и только тогда, когда отображение χ имеет следующий вид:

$$\chi(k) = \begin{cases} (m,v,m,i) & \text{при } \sum\limits_{t=1}^{\Phi(m,v,i)-1} n_t < k \leqslant \sum\limits_{t=1}^{\Phi(m,v,i)} n_t \text{ и } 1 \leqslant m \leqslant \omega; \\ & 1 \leqslant v,i \leqslant k_m, \\ (m,v,\ell,i) & \text{при } k > \sum\limits_{t=1}^{N} n_t, \text{ где либо } m \neq \ell, \text{ либо } m = \ell = 0, \\ & \text{на } v,\ i \text{ ограничений не накладывается.} \end{cases}$$

Положим

$$\Pi_0(n_1,\ldots,n_N) = \{\chi \mid \Pi(\chi,n_1,\ldots,n_N)\}, \quad B_n(n_1,\ldots,n_N) = \bigoplus_{\chi\in\Pi_0(n_1,\ldots,n_N)} B(\chi).$$

Заметим, что если для $\chi_1,\chi_2\colon \{1,\ldots,n\} \to \mathbb{Z}_+^4$ при всех (m,v,ℓ,i) выполнено условие $|\chi_1^{-1}(m,v,\ell,i)| = |\chi_2^{-1}(m,v,\ell,i)|$, то $\dim B(\chi_1) = \dim B(\chi_2)$ (достаточно сделать замену переменных). Поэтому, сгруппировав сходные χ и выбрав среди них по представителю, для которого истинно $\Pi(\chi,n_1,\ldots,n_N)$, получим, что

$$\mathrm{gc}_n(A) = \sum_{(n_1,\ldots,n_N)} \binom{n}{n_1,\ldots,n_N} \dim B_n(n_1,\ldots,n_N).$$

Многочлены пространств $V_n(A)$ и $B_n(n_1,\ldots,n_N)$ зависели от переменных $x_1,\ldots,x_n$. Для удобства мы изменим обозначения. Пусть $x_i^{(s)} = x_k$, где $1 \leqslant s \leqslant N$ и $k = \sum\limits_{t=1}^{s-1} n_t + i$, а $x_i^{(0)} = x_\ell$, где $\ell = \sum\limits_{t=1}^{N} n_t + i$. Положим $n_0 = n - \sum\limits_{s=1}^{N} n_s$. Обозначим пространство обобщённых полилинейных многочленов от переменных $x_i^{(s)}$ через $V(A,n_0,n_1,\ldots,n_N)$. Пусть $\varepsilon\colon V_n(A) \to V(A,n_0,n_1,\ldots,n_N)$ —

соответствующий изоморфизм. Он индуцирует изоморфизм фактор-пространств:

$$\varepsilon\colon \frac{V_n(A)}{V_n(A)\cap \mathrm{GId}(A)} \to \frac{V(A,n_0,n_1,\ldots,n_N)}{V(A,n_0,n_1,\ldots,n_N)\cap \mathrm{GId}(A)}.$$

Пусть

$$B(n_0,n_1,\ldots,n_N)=\varepsilon B_n(n_1,\ldots,n_N),$$
$$F_0(n_0,n_1,\ldots,n_N)=\bigl\{\varepsilon f \mid (f\in\Xi)\ \&\ \Pi\bigl(\varphi(f,\cdot),n_1,\ldots,n_N\bigr)\bigr\}.$$

Иными словами, множество $F_0(n_0,n_1,\ldots,n_N)$ состоит из таких одночленов εf, что если $(\varepsilon f)(a)\neq 0$ для некоторой подстановки $a=\bigl(a_t^{(s)}\bigr)_{s,t}\in\Theta^n$ базисных элементов, то необходимо

$$a_t^{(s)}\in\{e_{vi}^{(m)}\}\cup J_{vi}^{(m,m)},$$

где $(m,v,i)=\Phi^{-1}(s)$ при $1\leqslant s\leqslant N$, и

$$a_t^{(0)}\in J_{00}^{(0,0)}\cup\bigcup_{\substack{m\neq\ell,\\ v,i}} J_{vi}^{(m,\ell)}.$$

Тогда

$$B(n_0,n_1,\ldots,n_N)=\varepsilon\pi\varepsilon^{-1}\langle F_0(n_0,n_1,\ldots,n_N)\rangle_F.$$

В новых обозначениях

$$\mathrm{gc}_n(A)=\sum_{(n_1,\ldots,n_N)}\binom{n}{n_1,\ldots,n_N}\dim B\biggl(n-\sum_{s=1}^{N}n_s,n_1,\ldots,n_N\biggr). \tag{4}$$

Определим представление группы $\mathrm{S}_{n_1}\times\ldots\times\mathrm{S}_{n_N}$ на $B(n_0,n_1,\ldots,n_N)$. Каждый множитель S_{n_k} переставляет переменные $x_t^{(k)}$, оставляя остальные буквы на месте. Так как $\operatorname{char}F=0$, то по теореме Машке модуль $B(n_0,n_1,\ldots,n_N)$ раскладывается в прямую сумму своих неприводимых подмодулей.

Лемма 2.

1. *Неприводимые представления группы* $\mathrm{S}_{n_1}\times\ldots\times\mathrm{S}_{n_N}$ *описываются наборами* $\lambda^{(\cdot)}=\bigl(\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(N)}\bigr)$ *разбиений* $\lambda^{(k)}=\bigl(\lambda_1^{(k)},\ldots,\lambda_{s_k}^{(k)}\bigr)\vdash n_k$, *где* $\lambda_1^{(k)}\geqslant\ldots\geqslant\lambda_{s_k}^{(k)}>0$, $\sum\limits_{t=1}^{s_k}\lambda_t^{(k)}=n_k$.
2. $M_{\lambda^{(\cdot)}}\cong M_{\lambda^{(1)}}\otimes_F\ldots\otimes_F M_{\lambda^{(N)}}$, *где* $M_{\lambda^{(\cdot)}}$ *— неприводимый* $F(\mathrm{S}_{n_1}\times\ldots\times\mathrm{S}_{n_N})$*-модуль, отвечающий разбиению* $\lambda^{(\cdot)}$, $M_{\lambda^{(k)}}$ *— неприводимые* $F\mathrm{S}_{n_k}$*-модули, отвечающие разбиениям* $\lambda^{(k)}$.
3. *Кратность вхождения* $M_{\lambda^{(\cdot)}}$ *в разложение модуля* M *равна*

   $$\dim e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}}M=\dim e_{T_{\lambda^{(1)}}}\cdots e_{T_{\lambda^{(N)}}}M,$$

   где $e_{T_\lambda}=\sum\limits_{\substack{\sigma\in C_{T_\lambda},\\ \rho\in R_{T_\lambda}}}(-1)^\sigma\rho\sigma$ *— симметризатор, отвечающий некоторой таблице Юнга* T_λ [6, гл. 3, с. 64].

Можно указать класс разбиений, которые заведомо не будут встречаться в разложении модуля $B(n_0, n_1, \ldots, n_N)$.

Лемма 3. *Пусть фиксировано число* $1 \leqslant k \leqslant N$ *и разбиение* $\lambda^{(k)} \vdash n_k$, *где* $\sum\limits_{t=2}^{s_k} \lambda_t^{(k)} \geqslant p$, *а* $T_{\lambda^{(k)}}$ *— некоторая таблица Юнга. Тогда* $e_{T_{\lambda^{(k)}}} B(n_0, n_1, \ldots, n_N) = 0$.

В доказательстве леммы 4 будет изложен метод, позволяющий переупорядочивать переменные $x_t^{(s)}$ многочленов $f \in F_0(n_0, n_1, \ldots, n_N)$ так, что каждая переменная с данным s либо переносится в определённый участок произведения и в этом участке переменные выстраиваются по убыванию индекса t, либо к ней применяется операция $R_t^{(s)}$, суть которой изложена ниже, и при подстановке любой матричной единицы в такую переменную одночлен обращается в нуль. Множество получившихся многочленов будет обозначено через $F_1(n_0, n_1, \ldots, n_N)$. Добавим в сигнатуру «фантомы» $\hat{x}_t^{(s)}$ переменных $x_t^{(s)}$. Их смысл заключается в указании позиций для проведения операций $R_t^{(s)}$. При фиксированных значениях s и t операция $R_t^{(s)}$ игнорирует символы $\hat{x}_\beta^{(\alpha)}$ и $x_\beta^{(\alpha)}$ при $(\alpha, \beta) \neq (s, t)$. Пусть $(m, v, i) = \Phi^{-1}(s)$. Тогда на полилинейный одночлен, содержащий $x_t^{(s)}$ и $\hat{x}_t^{(s)}$, операция $R_t^{(s)}$ действует следующим образом:

$$R_t^{(s)}\big(P x_t^{(s)} Q \hat{x}_t^{(s)} T\big) = P x_t^{(s)} Q e_{vi}^{(m)} T - P e_{vi}^{(m)} Q x_t^{(s)} T$$

(через P, Q и T мы обозначили произведения остальных переменных и элементов базиса Θ^+). Подставляя в такой многочлен вместо $x_t^{(s)}$ любой элемент $a \in \Theta \setminus J_{vi}^{(m,m)}$, мы обязательно получим нуль.

Если перед выражением стоит $R_t^{(s)}$, подразумевается, что в обобщённом полилинейном многочлене после него один раз встречается $x_t^{(s)}$ и один раз $\hat{x}_t^{(s)}$.

Теперь формально опишем требуемый вид многочленов с переупорядоченными буквами.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$\langle F_0(n_0, n_1, \ldots, n_N)\rangle_F = \langle F_1(n_0, n_1, \ldots, n_N)\rangle_F,$$

где $F_1(n_0, n_1, \ldots, n_N)$ *— конечное множество полилинейных многочленов вида*

$$R_{\varepsilon_1}^{(\rho_1)} \ldots R_{\varepsilon_w}^{(\rho_w)} \Bigg(\prod_{\alpha=1}^{\delta} W_\alpha \prod_{v=1}^{k_{\sigma(\alpha)}} \prod_{i=1}^{k_{\sigma(\alpha)}} e_{iv}^{(\sigma(\alpha))} x_{\xi(\alpha,v,i,1)}^{(\Phi(\sigma(\alpha),v,i))} \times \\ \times e_{iv}^{(\sigma(\alpha))} x_{\xi(\alpha,v,i,2)}^{(\Phi(\sigma(\alpha),v,i))} e_{iv}^{(\sigma(\alpha))} \ldots e_{iv}^{(\sigma(\alpha))} x_{\xi(\alpha,v,i,\, n(\sigma(\alpha),v,i))}^{(\Phi(\sigma(\alpha),v,i))} e_{ii'}^{(\sigma(\alpha))} \Bigg) W_{\delta+1}, \quad (5)$$

причём

1) $i' = \begin{cases} 1 & \text{при} \;\; i = k_{\sigma(\alpha)}, \\ i+1 & \text{при} \;\; i < k_{\sigma(\alpha)}; \end{cases}$

2) $\sigma \colon \{1, \ldots, \delta\} \hookrightarrow \{1, \ldots, \omega\}$ *— некоторое вложение,* $\delta \leqslant \omega$;

3) *$\xi(\alpha,v,i,\beta) > \xi(\alpha,v,i,\gamma)$ при $\beta < \gamma$;*
4) *W_α, где $1 \leqslant \alpha \leqslant \delta+1$, — произведения переменных $x_t^{(s)}$, их фантомов и элементов базиса Θ^+;*
5) *для всякой переменной $x_t^{(s)}$, $1 \leqslant s \leqslant N$, либо существуют такие α, β, v, i, что $s = \Phi(\sigma(\alpha),v,i)$ и $t = \xi(\sigma(\alpha),v,i,\beta)$, тогда в* (5) *фантом $\hat{x}_t^{(s)}$ и обозначение $R_t^{(s)}$ не встречаются, либо к одночлену* (5) *применяется операция $R_t^{(s)}$, а $x_t^{(s)}$ и $\hat{x}_t^{(s)}$ входят в произведения W_α;*
6) *при подстановке произвольного элемента алгебры A_0 вместо любой переменной $x_t^{(s)}$, не встречающейся в* (5) *в виде $x_{\xi(\alpha,v,i,\beta)}^{(\Phi(\sigma(\alpha),v,i))}$, выражение* (5) *обращается в нуль.*

Доказательство. Элементы множества $F_0(n_0,n_1,\ldots,n_N)$ можно привести к виду

$$a_{i_0v_1}^{(\ell_0,m_1)}\big(e_{v_1v_1}^{(m_1)}x_{t_1}^{(s_1)}e_{i_1i_1}^{(\ell_1)}\big)a_{i_1v_2}^{(\ell_1,m_2)}\big(e_{v_2v_2}^{(m_2)}x_{t_2}^{(s_2)}e_{i_2i_2}^{(\ell_2)}\big)\cdots\big(e_{v_nv_n}^{(m_n)}x_{t_n}^{(s_n)}e_{i_ni_n}^{(\ell_n)}\big)a_{i_nv_{n+1}}^{(\ell_n,m_{n+1})}, \tag{6}$$

где

$$s_\theta = \begin{cases}\Phi(m_\theta,v_\theta,i_\theta) & \text{при } 1 \leqslant m_\theta = \ell_\theta \leqslant \omega,\\ 0 & \text{при } m_\theta \neq \ell_\theta \text{ или } m_\theta = \ell_\theta = 0\end{cases}$$

для всех $1 \leqslant \theta \leqslant n$.

Для того что доказать лемму, необходимо, по существу, в произвольном одночлене собрать и переупорядочить выражения $e_{vv}^{(m)}x_t^{(s)}e_{ii}^{(m)}$. Это делается следующим образом: находим в последовательности $(\ell_0,m_1,\ell_1,m_2,\ldots,\ell_n,m_{n+1})$ первое такое ненулевое число ℓ_θ или m_θ (положим $\sigma(1)$ равным этому числу), что выражение $e_{vv}^{(\sigma(1))}x_t^{(s)}e_{ii}^{(\sigma(1))}$, $s=\Phi(\sigma(1),v,i)$, входит в (6) для некоторых v, i и t. Пусть число u равно наименьшему α для всех присутствующих в (6) выражений $e_{\alpha\alpha}^{(\sigma(1))}x_\eta^{(\varkappa)}e_{\beta\beta}^{(\sigma(1))}$, γ — наименьшему β для всех таких выражений с $\alpha=u$, t — наибольшему η для таких выражений с $\varkappa = s$, где $s=\Phi(\sigma(1),u,\gamma)$. Если $\sigma(1)=\ell_\theta$, то вставим перед $a_{i_\theta v_{\theta+1}}^{(\ell_\theta,m_{\theta+1})}$ фантом $\hat{x}_t^{(s)}$:

$$e_{i_\theta u}^{(\ell_\theta)}\big(e_{uu}^{(\ell_\theta)}\hat{x}_t^{(s)}e_{\gamma\gamma}^{(\ell_\theta)}\big)e_{\gamma i_\theta}^{(\ell_\theta)}a_{i_\theta v_{\theta+1}}^{(\ell_\theta,m_{\theta+1})}.$$

Если же $\sigma(1)=m_\theta$, то вставим этот фантом после $a_{i_{\theta-1}v_\theta}^{(\ell_{\theta-1},m_\theta)}$:

$$a_{i_{\theta-1}v_\theta}^{(\ell_{\theta-1},m_\theta)}e_{v_\theta u}^{(m_\theta)}\big(e_{uu}^{(m_\theta)}\hat{x}_t^{(s)}e_{\gamma\gamma}^{(m_\theta)}\big)e_{\gamma v_\theta}^{(m_\theta)}.$$

Далее заменим $\ldots\hat{x}_t^{(s)}\ldots x_t^{(s)}\ldots$ на

$$\big(\ldots x_t^{(s)}\ldots e_{u\gamma}^{(\sigma(1))}\ldots\big)+R_t^{(s)}\big(\ldots\hat{x}_t^{(s)}\ldots x_t^{(s)}\ldots\big).$$

Аналогично перенесём по порядку остальные выражения алгебры $M_{k_{\sigma(1)}}(F)$, не обращая внимания на переменные, уже связанные операциями $R_t^{(s)}$. Затем рассмотрим следующую алгебру $M_{k_{\sigma(2)}}(F)$, единицы которой стоят правее, и т. д. $\square$

Нас интересует, как ведут себя кратности неприводимых подмодулей модуля $B(n_0, n_1, \dots, n_N)$ с ростом чисел $n_1, \dots, n_N$.

Лемма 5. *Пусть заданы начальные наборы чисел* $(\tilde n_0, \tilde n_1, \dots, \tilde n_N)$, $\sum\limits_{t=0}^{N} \tilde n_t = \tilde n$, *и разбиений* $\tilde\lambda^{(\cdot)} = \big(\tilde\lambda^{(1)}, \dots, \tilde\lambda^{(N)}\big)$, $\tilde\lambda^{(k)} \vdash \tilde n_k$. *Пусть*

$$I = \{k \mid \tilde n_k \geqslant 4p,\ 1 \leqslant k \leqslant N\} \neq \varnothing,$$

$n_k = \tilde n_k$ *при* $k \notin I$, *в том числе* $n_0 = \tilde n_0$, *а при* $k \in I$ *числа* $n_k \geqslant 4p$ *являются переменными,* $\lambda_t^{(k)} = \tilde\lambda_t^{(k)}$ *при* $t \geqslant 2$ *или* $k \notin I$, $\lambda_1^{(k)} = n_k - \sum\limits_{t=2}^{s_k} \lambda_t^{(k)}$ *при* $k \in I$,

$$T_{\lambda^{(k)}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline \text{числа от 1 до } 2p-1 & 2p & 2p+1 & \dots & n_k - 1 & n_k \\ \cline{2-6} & \multicolumn{5}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

(*Полагаем, что любое число в первой строчке таблицы* $T_{\lambda^{(k)}}$ *больше любого числа из остальных строчек.*) *Тогда существуют такие число* $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$ *и многочлен* $P \in \mathbb{Q}[n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}] \setminus \{0\}$, *где* $\{m_1, \dots, m_\gamma\} = I$, *что* $\dim e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} B(n_0, n_1, \dots, n_N) \leqslant \varkappa$ *для всех наборов* $(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}) = (n_k)_{k \in I}$, *удовлетворяющих условию* $n_k \geqslant \tilde n_k$, *а при* $P(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}) \neq 0$ *достигается равенство* $\dim e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} B(n_0, n_1, \dots, n_N) = \varkappa$.

Лемма 5 используется в доказательстве основного утверждения.

Теорема 4. *Для обобщённых коразмерностей любой конечномерной ассоциативной алгебры* A *над полем* F, $\operatorname{char} F = 0$, *справедлива гипотеза А. Регева: существуют такие числа* $C \in \mathbb{Q}_+$ *и* $t \in \mathbb{Z}_+$, *что* $\operatorname{gc}_n(A) \sim C n^t d^n$ *при* $n \to \infty$, *где* $d = \operatorname{PI}\exp(A)$.

Литература

[1] Гордиенко А. С. Гипотеза Регева и кохарактеры тождеств ассоциативных алгебр PI-экспоненты 1 и 2 // Мат. заметки. — 2008. — Т. 83, № 6. — С. 815—824.

[2] Beidar K. I., Martindale W. S., Mikhalev A. V. Rings with Generalized Polynomial Identities. — New York: Marcel Dekker, 1996.

[3] Berele A., Regev A. Asymptotic behaviour of codimensions of p.i. algebras satisfying Capelli identities // Trans. Amer. Math. Soc. — 2008. — Vol. 360. — P. 5155—5172.

[4] Drensky V. S. Relations for the cocharacter sequences of T-ideals // Algebra, Proc. Int. Conf. Memory A. I. Mal'cev, Novosibirsk/USSR 1989. Pt. 2. — Providence: Amer. Math. Soc., 1992. — (Contemp. Math.; Vol. 131). — P. 285—300.

[5] Regev A. Codimensions and trace codimensions of matrices are asymptotically equal // Israel J. Math. — 1984. — Vol. 48, no. 2-3. — P. 246—250.

[6] Zaicev M. V., Giambruno A. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. — Providence: Amer. Math. Soc., 2005. — (Math. Surveys Monographs; Vol. 122).