Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов*

В. ГОУЛД
Йоркский университет, Великобритания
e-mail: vargl@york.ac.uk

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mikhalev@rector.msu.ru

Е. А. ПАЛЮТИН
Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск
e-mail: palyutin@math.nsc.ru

А. А. СТЕПАНОВА
Дальневосточный государственный университет, Владивосток
e-mail: stepltd@mail.primorye.ru

УДК 510.67+512.56

Ключевые слова: моноид, плоский, проективный, свободный S-полигон, модель, аксиоматизируемость, полнота, модельная полнота, категоричность, стабильность, суперстабильность, ω-стабильность.

Аннотация

Это вторая из серии работ, предлагающих обзор результатов по теории моделей S-полигонов над моноидом S. Первая работа была посвящена теории регулярных S-полигонов. Здесь мы рассматриваем вопросы, связанные с теоретико-модельными свойствами свободных, проективных и (сильно, слабо) плоских S-полигонов, такие как аксиоматизируемость, полнота, модельная полнота и стабильность классов этих S-полигонов. Почти все представленные здесь результаты опубликованы, но есть и новые; отметим, что новым является описание моноидов S с аксиоматизируемым классом свободных S-полигонов.

Abstract

V. Gould, A. V. Mikhalev, E. A. Palyutin, A. A. Stepanova, Model-theoretic properties of free, projective, and flat S-acts, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 63—110.

This is the second in a series of articles surveying the body of work on the model theory of S-acts over a monoid S. The first concentrated on the theory of regular S-acts. Here we review the material on model-theoretic properties of free, projective, and (strongly, weakly) flat S-acts. We consider questions of axiomatizability, completeness, model completeness, and stability for these classes. Most but not all of the results have already appeared; we remark that the description of those monoids S such that the class of free left S-acts is axiomatizable, is new.

*Работа поддержана грантом ведущих научных школ РФ НШ-2810.2008.1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 7, с. 63—110.

1. Введение

Данная работа относится к области математики, которая связывает теорию моделей с другими направлениями математики. Теорию моделей модулей над кольцом R можно отнести как к теории моделей, так и к теории колец; прекрасное введение в этот раздел можно найти в [22]. Теория моделей полигонов над моноидами менее развита, чем теория моделей модулей, но опять же демонстрирует тесную взаимосвязь между алгеброй и теорией моделей, со своей спецификой. Пытаясь сделать существующие здесь результаты доступными широкой аудитории, группа авторов решила написать серию обзорных статей, в которой эта статья является второй. Первая работа [1] посвящена теории регулярных S-полигонов.

Под левым S-полигоном над моноидом S понимается множество, на котором S действует слева, при этом единица S действует тождественно. Левый S-полигон можно рассматривать как естественное обобщение левого модуля над кольцом. Именно поэтому многие вопросы, поставленные и решённые в теории моделей модулей, могут быть сформулированы и для S-полигонов, хотя часто ответ на них отличается от соответствующего ответа для модулей. Например, существует конечное кольцо R, такое что класс свободных левых R-модулей не аксиоматизируем, в то время как над любым конечным моноидом класс свободных левых S-полигонов *всегда* аксиоматизируем. Основное отличие между R-модулями и S-полигонами заключается в отсутствии структуры группы в S-полигоне, а следовательно, конгруэнции не могут в общем случае определяться специальными подмножествами.

Класс L-структур $\mathcal{C}$ языка первого порядка L является *аксиоматизируемым*, или *элементарным*, если существует такое множество предложений Π языка L, что L-структура $\mathbf{A}$ принадлежит $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда каждое предложение из Π истинно в $\mathbf{A}$. В [10] дана характеризация колец R с аксиоматизируемым классом всех плоских (проективных, свободных) левых R-модулей (в естественном языке первого порядка, ассоциированным с R-модулями). В теории S-полигонов есть три претендента на понятие плоского S-полигона — слабо плоский, плоский и сильно плоский S-полигон, — соответствующие аналоги которых для модулей над кольцом совпадают. Разделы с пятого по девятый посвящены характеризации таких моноидов S, что классы слабо плоских, плоских, сильно плоских, проективных и свободных левых S-полигонов аксиоматизируемы. Материал для разделов 5—8 взят из [3, 6, 14]. Девятый раздел содержит новый результат первого автора, дающий описание моноидов S с аксиоматизируемым классом свободных левых S-полигонов, и некоторые частные случаи, приведённые в [3].

Теория T языка L является *полной*, если для любого предложения φ языка L либо $\varphi \in T$, либо $\neg\varphi \in T$. Это эквивалентно тому, что любые модели $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ теории T, т. е. L-структуры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, в которых все предложения T истины, «в некотором смысле» одинаковы; более точно, они *элементарно эквивалентны*. Родственными понятиями являются понятия *модельной полноты* и *категоричности* теории. Можно определить соответствующие понятия полноты, модельной полноты и категоричности для классов L-структур. В разделе 11, результаты которого взяты из [3], рассматриваются вопросы полноты, модельной полноты и категоричности аксиоматизируемых классов сильно плоских, проективных и свободных левых S-полигонов.

В разделах 13 и 14 исследуется важное свойство *стабильности* (о понятии стабильности см. раздел 12) для наших классов S-полигонов. Выше мы заметили, что, хотя и можно провести параллель между некоторыми задачами теории моделей модулей и теории моделей S-полигонов, различий здесь много. Это становится совершенно очевидно, когда речь идёт о вопросах стабильности. Например, каждая полная теория R-модулей над кольцом R стабильна, тогда как существуют S-полигоны с нестабильной теорией [2, 4, 13]. Мы рассматриваем вопросы стабильности классов сильно плоских, проективных и свободных левых S-полигонов. Будем говорить, что класс $\mathcal{C}$ структур стабилен (суперстабилен, ω-стабилен), если для любой структуры $\mathbf{A} \in \mathcal{C}$ множество предложений, истинных в $\mathbf{A}$ (которое является полной теорией), стабильно (суперстабильно, ω-стабильно). Доказывается, что аксиоматизируемый класс сильно плоских левых S-полигонов, удовлетворяющий условию, известному как условие (A), суперстабилен; кроме того, если класс проективных (свободных) левых S-полигонов аксиоматизируем, то он суперстабилен. В заключение мы рассматриваем вопрос ω-стабильности для аксиоматизируемого класса сильно плоских левых S-полигонов над счётным моноидом S, удовлетворяющим условию (A) и доказываем ω-стабильность аксиоматизируемого класса левых проективных (свободных) S-полигонов для счётного моноида S.

Мы старались сделать изложение по возможности замкнутым, приведя все необходимые определения и утверждения с доказательствами или со ссылками на первоисточники. Эта статья должна быть доступна читателям, обладающим только начальными знаниями по теории полугрупп, полигонов над моноидами и теории моделей, знающим немного больше, чем понятия идеала, подполугруппы, S-полигона, языка первого порядка и интерпретации. Мы посвятили раздел 2 необходимым сведениям о моноидах и полигонах; в разделе 3 ввели понятия плоских, проективных и свободных S-полигонов, отметили их свойства и т. д. Четвёртый раздел касается таких понятий, как аксиоматизируемые классы и ультрапроизведения над некоторыми ультрафильтрами специального вида. В разделе 10 предлагаются необходимые сведения о полных, модельно полных и категоричных теориях, и, как отмечено выше, раздел 12 содержит необходимую информацию о стабильности. Для более детального изучения рекомендуем читателям работы [15] (по теории полугрупп), [18] (по теории S-полигонов) и [8] (по теории моделей).

Условия конечности, которые возникают при изучении свойств аксиоматизируемости и других свойств, а также моноиды, удовлетворяющие этим условиям, представляют самостоятельный интерес. Этими вопросами в настоящее время занимается Л. Шейхин, аспирант первого автора. В данной статье отсутствуют примеры, читатель может найти их в работах, содержащих основные результаты этой статьи.

2. Моноиды и полигоны

Всюду в этой статье S будет обозначать моноид с единицей 1, E — множество идемпотентов. Отображения будут писаться *слева* относительно своих аргументов. Мы будем часто использовать пять эквивалентностей на S, называемых *отношениями Грина*: $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{J}$. Для удобства напомним, что отношение $\mathcal{R}$ определяется для любых $a, b \in S$ по правилу

$$a \,\mathcal{R}\, b \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad aS = bS.$$

Ясно, что $a \,\mathcal{R}\, b$ тогда и только тогда, когда a и b — левые делители друг друга. Кроме того, $\mathcal{R}$ является левой конгруэнцией моноида S. Отношение $\mathcal{L}$ определяется двойственно. Пересечение $\mathcal{H}$ эквивалентностей $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ (в решётке эквивалентностей моноида S) определяется с помощью равенства $\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$. Из [15, утверждение 2.1.3] следует, что объединение $\mathcal{D}$ эквивалентностей $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ определяется равенствами

$$\mathcal{D} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}.$$

Пятое отношение $\mathcal{J}$ для любых $a, b \in S$ определяется следующим образом:

$$a \,\mathcal{J}\, b \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad SaS = SbS.$$

Следующий результат принадлежит Грину.

Теорема 2.1 [15, теорема 2.2.5]. *Если H — $\mathcal{H}$-класс в S, то либо $H^2 \cap H = \varnothing$, либо $H^2 = H$ и H — подгруппа S.*

Как обычно, $\mathcal{K}$-класс с представителем $a \in S$, где $\mathcal{K}$ — одно из отношений Грина, будем обозначать через K_a. Из теоремы 2.1 сразу же следует, что H_e — группа для любого $e \in E$. Заметим, что H_1 — *группа обратимых элементов* моноида S. Будем говорить, что моноид S *локален*, если $S \setminus H_1$ — идеал. Следующая лемма следует непосредственно из этого определения.

Лемма 2.2. *Моноид S локален тогда и только тогда, когда $R_1 = L_1 = H_1$.*

Ясно, что $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$; для произвольного моноида равенство $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ не выполняется. Однако для конечных моноидов это равенство верно, и, более общо, оно выполняется для эпигрупп. Будем говорить, что моноид S является *эпигруппой* (или *моноидом с групповой границей*), если для каждого элемента S его некоторая положительная степень лежит в некоторой подгруппе моноида S. Следующий результат хорошо известен, но для полноты изложения мы предлагаем его доказательство.

Предложение 2.3. *Пусть S — моноид с групповой границей. Тогда S локален и $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in S$, $a \mathcal{J} b$. Тогда существуют такие $x, y, u, v \in$ $\in S$, что $a = xby, b = uav$. Имеем

$$a = xby = x(uav)y = (xu)a(vy) = (xu)^n a(vy)^n$$

для любого $n \in \omega$. По предположению можно выбрать $n \geqslant 1$ так, что $(xu)^n$ лежит в подгруппе. По теореме 2.1 $(xu)^n \ \mathcal{L} \ (xu)^{2n}$, и так как $S(xu)^{2n} \subseteq$ $\subseteq S(xu)^{n+1} \subseteq S(xu)^n$, то $(xu)^{n+1} \ \mathcal{L} \ (xu)^n$. Поскольку $\mathcal{L}$ — левая конгруэнция, то

$$a = (xu)^n a(vy)^n \ \mathcal{L} \ (xu)^{n+1} a(vy)^n = xua.$$

Тогда $a \mathcal{L} ua$; из соображений двойственности $a \mathcal{R} av$. Следовательно,

$$a \mathcal{L} ua \mathcal{R} uav = b,$$

т. е. $a \mathcal{D} b$ и $\mathcal{D} = \mathcal{J}$, что и требуется.

Аналогично доказывается выполнение в S свойства «прямоугольника» (если $a \mathcal{D} b \mathcal{D} ab$, то $a \mathcal{R} ab \mathcal{L} b$).

Если $1 \ \mathcal{D} \ a$, то, поскольку $1a = a$, имеем $1 \ \mathcal{R} \ a$; двойственно, $1 \ \mathcal{L} \ a$. Следовательно, $1 \mathcal{H} a$ и $J_1 = D_1 = L_1 = R_1 = H_1$. □

Моноид S называется *регулярным*, если для любого $a \in S$ существует такой элемент $x \in S$, что $a = axa$. Заметим, что в этом случае $ax, xa \in E$ и $ax \mathcal{R} a \mathcal{L} xa$. Регулярный моноид называется *инверсным*, если $ef = fe$ для всех $e, f \in E$. В инверсном моноиде идемпотенты образуют коммутативную подполугруппу, которую будем называть *полурешёткой идемпотентов* моноида S.

Моноид S называется *стягиваемым слева*, если для любых $s, t \in S$ существует такой элемент $u \in S$, что $su = tu$.

Лемма 2.4. *Пусть S — стягиваемый слева моноид и $a_1, \ldots, a_n \in S$. Тогда существует такой элемент $r \in S$, что $a_1 r = a_2 r = \ldots = a_n r$.*

Доказательство. Очевидно, что результат верен для $n = 1$ и $n = 2$. Если $a_1 r = a_2 r = \ldots = a_i r$ для некоторого i, $2 \leqslant i < n$, то выберем $s \in S$ так, что $a_i rs = a_{i+1} rs$, и заметим, что $a_1 rs = \ldots = a_i rs = a_{i+1} rs$. Утверждение доказано. □

Подмоноид T моноида S называется *унитарным справа*, если для любых $t \in T$, $s \in S$ из $st \in T$ следует $s \in T$. Будем говорить, что моноид удовлетворяет *условию конечности правых решений*, если

$$\forall s \in S \ \exists n_s \in \mathbb{N} \ \forall t \in S \ |\{x \in S \mid sx = t\}| \leqslant n_s.$$

Аналоги отношений $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$, отношения $\mathcal{L}^*$ и $\mathcal{R}^*$, также играют в этой работе важную роль. Напомним, что элементы a, b моноида S находятся в отношении $\mathcal{R}^*$ в том и только том случае, когда для любых $x, y \in S$

$$xa = ya \ \text{ тогда и только тогда, когда } \ xb = yb.$$

Ясно, что $\mathcal{R}^*$ является левой конгруэнцией моноида S, содержащей $\mathcal{R}$; нетрудно убедиться, что $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$, если S регулярен. Отношение $\mathcal{L}^*$ определяется двойственно.

В данной работе рассматриваются теоретико-модельные аспекты теории представлений моноидов через морфизмы в моноиды эндоморфизмов множеств. Напомним, что множество A называется *левым S-полигоном*, если существует отображение $S \times A \to A$, $(s, a) \mapsto sa$, такое что для любых $a \in A$ и $s, t \in S$ $1\,a = a$ и $s(ta) = (st)a$. Это эквивалентно тому, что существует морфизм из S в моноид всех эндоморфизмов $\mathcal{T}_A$ множества A; если тождественное отображение множества X в себя обозначить через I_X, то данный морфизм должен переводить $1 \in S$ в $I_A \in \mathcal{T}_A$.

Отображение $\theta\colon A \to B$, такое что $\theta(sa) = s\theta(a)$ для любых $a \in A$, $s \in S$, называется *S-морфизмом* из левого S-полигона A в левый S-полигон B. Ясно, что класс левых S-полигонов с S-морфизмами образует категорию **S-Act**. Легко понять, что в **S-Act** копроизведением левых S-полигонов A_i, $i \in I$, является просто их дизъюнктное объединение, которое будем обозначать через $\coprod\limits_{i \in I} A_i$. Правые S-полигоны и категория **Act-S** определяются двойственно. Мы рекомендуем читателю работу [18], где представлен современный обзор теории S-полигонов.

Подмножество B множества A, замкнутое относительно действия S, называется S-подполигоном левого S-полигона A. Ясно, что S, а также любой его левый идеал можно рассматривать как левый S-полигон. Левый S-полигон A называется *конечно порождённым*, если существуют $a_1, \ldots, a_n \in A$, такие что $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} Sa_i$, и называется *циклическим*, если $A = Sa$ для некоторого $a \in A$. Если $x \in X$, где X — множество, не пересекающееся с S, то множество формальных выражений $Sx = \{sx \mid s \in S\}$ естественным образом становится циклическим левым S-полигоном. Заметим, что $Sx \cong S$. Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.5. *Пусть A, B — левые S-полигоны, $a \in A$ и $b \in B$. Тогда существует такой S-изоморфизм $\theta\colon Sa \to Sb$, что $\theta(a) = b$ в том и только том случае, когда для любых $x, y \in S$ $xa = ya$ тогда и только тогда, когда $xb = yb$.*

Из леммы 2.5, в частности, следует, что если $e \in E$, то существует такой изоморфизм $\theta\colon Sa \to Se$, что $\theta(a) = e$ тогда и только тогда, когда $ea = a$ и для любых $x, y \in S$ из $xa = ya$ следует $xe = ye$; такой элемент a называется *e-сократимым справа*.

Из леммы 2.5 получаем следующее утверждение.

Лемма 2.6 [12]. *Пусть $a, b \in S$. Тогда существует такой изоморфизм θ левых S-полигонов Sa и Sb, что $\theta(a) = b$ в том и только том случае, когда $a \mathrel{\mathcal{R}^*} b$.*

Моноид S называется *моноидом с правым сокращением*, если каждый элемент из S является 1-сократимым справа. Понятия e-сократимого слева элемента моноида и моноида с левым сокращением определяются двойственно.

Конгруэнция на левом S-полигоне A — это такое отношение эквивалентности ρ на A, что из $(a, a') \in \rho$ следует, что $(sa, sa') \in \rho$ для любых $a, a' \in A$, $s \in S$. Чтобы избежать двусмысленности, конгруэнцию на S, *рассматриваемом как* *левый S-полигон*, будем называть *левой конгруэнцией*. Если ρ — конгруэнция на A, то будем писать $a \, \rho \, a'$ для $(a, a') \in \rho$ и a/ρ для ρ-класса с представителем $a \in A$. Если $X \subseteq A \times A$, то через $\rho(X)$ обозначим наименьшую конгруэнцию на A, содержащую X.

Предложение 2.7 [18]. *Пусть A — левый S-полигон, $X \subseteq A \times A$ и $\rho = \rho(X)$. Тогда для любых $a, b \in A$ имеет место $a \, \rho \, b$ в том и только том случае, когда либо $a = b$, либо существуют такие $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n \in A$, $s_1, \dots, s_n \in S$, что $(p_i, q_i) \in X$ или $(q_i, p_i) \in X$ для любых i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $a = s_1 p_1$, $s_1 q_1 = s_2 p_2, \dots$, $s_n q_n = b$.*

Элементы x, y левого S-полигона A называются *связанными* (обозначение $x \sim y$), если существуют такие $n \in \omega$, $a_0, \dots, a_n \in A$, $s_1, \dots, s_n \in S$, что $x = a_0$, $y = a_n$ и $a_i = s_i a_{i-1}$ или $a_{i-1} = s_i a_i$ для любых i, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Связным* S-подполигоном левого S-полигона A называется такой S-подполигон B, что $x \sim y$ для любых $x, y \in B$. Легко понять, что $\sim$ — отношение конгруэнции на левом S-полигоне A. Классы $\sim$, являющиеся S-подполигонами, называются *связными компонентами* A. Таким образом, A является копроизведением связных компонент.

3. Свободные, проективные и плоские полигоны

Мы рассматриваем в этом разделе классы свободных, проективных и плоских левых S-полигонов. Как отмечается ниже, существует несколько кандидатов для понятия плоского S-полигона. Здесь мы предлагаем необходимую нам в дальнейшем информацию, для более детального изучения материала рекомендуем [18].

Напомним, что левый S-полигон F называется *свободным* (над подмножеством X в **S-Act**), если для любого левого S-полигона A и отображения $\theta \colon X \to A$ существует единственный S-морфизм $\bar{\theta} \colon F \to A$, такой что $\bar{\theta}\iota = \theta$, где $\iota \colon X \to F$ — вложение.

Теорема 3.1 [18]. *Левый S-полигон F является свободным над X тогда и только тогда, когда $F \cong \coprod\limits_{x \in X} Sx$.*

Из данной теоремы следует, что свободный левый S-полигон изоморфен копроизведению копий левого S-полигона S. Из замечания, приведённого после леммы 2.5, получаем следующее утверждение.

Следствие 3.2. *Циклический левый S-полигон A свободен тогда и только тогда, когда $A = Sa$ для некоторого 1-сократимого справа элемента $a \in A$.*

Левый S-полигон P называется *проективным*, если для любой диаграммы левых S-полигонов и S-морфизмов

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array},$$

где $\phi\colon M \to N$ — сюръекция, существует S-морфизм $\psi\colon P \to M$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "\theta"] \\ M \arrow[r, "\phi"] & N \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Ясно, что свободный левый S-полигон F проективен; это также непосредственно следует из теоремы 3.1 и теоремы 3.3.

Теорема 3.3 [9,19]. *Левый S-полигон P проективен тогда и только тогда, когда $P \cong \coprod_{i\in I} Se_i$, где $e_i \in E$ для всех $i \in I \neq \varnothing$.*

Следствие 3.4. *Циклический S-полигон A проективен тогда и только тогда, когда $A = Sa$ для некоторого e-сократимого справа элемента $a \in S$ и некоторого $e \in E$.*

Для определения класса плоских левых S-полигонов нам понадобится понятие *тензорного произведения* S-полигонов. Если A — *правый* S-полигон и B — левый S-полигон, то тензорное произведение A и B, обозначаемое через $A \otimes B$, — это фактор-множество множества $A \times B$ относительно эквивалентности, порождённой множеством $\{((as, b), (a, sb)) \mid a \in A,\ b \in B,\ s \in S\}$. Для $a \in A$ и $b \in B$ класс эквивалентности с представителем (a, b) будем обозначать через $a \otimes b$.

Для левого S-полигона B отображение $- \otimes B$ является функтором из категории **Act-S** в категорию **Set** множеств. Различные понятия *плоскости* определяются через этот функтор.

Левый S-полигон B называется *слабо плоским*, если функтор $- \otimes B$ сохраняет вложения правых идеалов S в S, *плоским*, если этот функтор сохраняет произвольные вложения правых S-полигонов, *сильно плоским*, если сохраняет универсальные квадраты (эквивалентно, уравнители и универсальные квадраты [5]). Следует отметить, что терминология с годами менялась: в частности, левый S-полигон B, такой что $- \otimes B$ сохраняет уравнители и универсальные квадраты, назывался слабо плоским в [11,23] и плоским в [14].

Существенный вклад в развитие теории плоских полигонов внёс Стенстрём, который сформулировал условия, в настоящее время известные как условия (P) и (E), которые вместе эквивалентны сильной плоскости полигона.

Теорема 3.5 [23]. *Левый S-полигон B является сильно плоским тогда и только тогда, когда B удовлетворяет условиям* (P) *и* (E):

(P): *если $x, y \in B$ и $s, t \in S$ такие, что $sx = ty$, то существуют такие элемент $z \in B$ и элементы $s', t' \in S$, что $x = s'z$, $y = t'z$ и $ss' = tt'$;*

(E): *если $x \in B$ и $s, t \in S$ такие, что $sx = tx$, то существуют такие $z \in B$ и $s' \in S$, что $x = s'z$ и $ss' = ts'$.*

Классы свободных, проективных, сильно плоских, плоских и слабо плоских левых S-полигонов будут обозначаться через $\mathcal{F}r$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{SF}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{WF}$ соответственно. Отметим, что «элементарного» описания (т. е. без использования стрелок) плоских и слабо плоских левых S-полигонов в духе теорем 3.1, 3.3 и 3.5 для $\mathcal{F}r$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{SF}$ не известно. Из данных результатов сразу же следует, что проективные левые S-полигоны являются сильно плоскими. Ясно, что плоские левые S-полигоны являются слабо плоскими и, следовательно, сохраняют уравнители в категории **Act-S**; сильно плоские левые S-полигоны являются плоскими. Таким образом,

$$\mathcal{F}r \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{SF} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{WF}.$$

Конгруэнция θ левого S-полигона A называется *сильно плоской*, если $A/\theta \in \mathcal{SF}$. Для наших дальнейших целей приведём непосредственное следствие теоремы 3.5.

Следствие 3.6 [7]. *Конгруэнция θ левого S-полигона S является сильно плоской тогда и только тогда, когда для любых $u, v \in S$ соотношение $u \;\theta\; v$ имеет место в том и только том случае, если существует такой элемент $s \in S$, что $s \;\theta\; 1$ и $us = vs$.*

4. Аксиоматизируемость

Каждому классу $\mathcal{A}$ структур ставится в соответствие язык первого порядка L. Можно поставить вопрос: выразимо ли в языке L свойство P, которое является определяющим для структур класса $\mathcal{A}$? Иными словами, существует ли множество предложений Π языка L, такое что структура A принадлежит $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда все предложения из Π истины в A, т. е. тогда и только тогда, когда A является моделью Π (обозначение $A \vDash \Pi$)? Если такое Π существует, то класс $\mathcal{A}$ называют *аксиоматизируемым*. Исследования классов структур, связанные с аксиоматизируемостью, — первый шаг в изучении *теории моделей* этих классов.

В этой работе мы изучаем теории первого порядка левых S-полигонов. В следующих пяти разделах рассматриваются вопросы аксиоматизируемости для классов свободных, проективных и (сильно, слабо) плоских левых S-полигонов. Язык теории левых S-полигонов L_S является языком первого порядка с равенством, не содержащим константных или предикатных символов, содержащим унарные функциональные символы λ_s для каждого $s \in S$ (вместо $\lambda_s(x)$ будем писать sx). Класс левых S-полигонов аксиоматизируем; Π — множество аксиом этого класса:

$$\Pi = \{(\forall\, x)(1x = x)\} \cup \{\mu_{s,t} \mid s, t \in S\},$$

где $\mu_{s,t}$ — предложение $(\forall\, x)\big((st)x = s(tx)\big)$.

Некоторые классы левых S-полигонов аксиоматизируемы для *любого* моноида S. Например, класс левых S-полигонов без кручения аксиоматизируем множеством предложений $\Pi \cup \Sigma_{\mathcal{TF}r}$ для

$$\Sigma_{\mathcal{TF}r} = \{(\forall x)(\forall y)(sx = sy \to x = y) \mid s \in T\},$$

где T — множество сократимых слева элементов S. На самом деле, поскольку речь идёт об S-полигонах, из контекста понятна истинность предложений из Π, и мы будем говорить более кратко, что $\Sigma_{\mathcal{TF}r}$ — множество аксиом класса $\mathcal{TF}r$. Другие естественные классы левых S-полигонов аксиоматизируемы для некоторых, но не для всех моноидов.

Одним из основных понятий, используемых при изучении вопросов аксиоматизируемости, является понятие ультрапроизведения, которое мы здесь кратко напомним.

Для множества A через $P(A)$ обозначим множество всех подмножеств этого множества. Множество $C \subseteq P(A)$ называется *центрированным*, если для любых $X_1, \ldots, X_n \in C$ пересечение $X_1 \cap \ldots \cap X_n$ не пусто. Напомним, что $\varnothing \notin C$ для центрированного C. Непустое множество $F \subseteq P(A)$ называется *фильтром на* A, если выполнены следующие условия:

а) $\varnothing \notin F$;
б) если $U, V \in F$, то $U \cap V \in F$;
в) если $U \in F$ и $U \subseteq X \subseteq A$, то $X \in F$.

Фильтр F на множестве A называется *однородным*, если для любого $X \in F$ выполнено $|X| = |A|$, и *ультрафильтром*, если $X \in F$ или $A \setminus X \in F$ для любого $X \subseteq A$. Отметим некоторые факты, относящиеся к этим понятиям и легко вытекающие из определений.

1. Фильтр F на множестве A является центрированным множеством и $A \in F$.
2. Если F — ультрафильтр на A и $U_0 \cup \ldots \cup U_n \in F$, то $U_i \in F$ для некоторого $i \leqslant n$.
3. Если множество A бесконечно, то множество

$$\Phi_A = \{X \mid X \subseteq A, |(A \setminus X)| < |A|\}$$

является фильтром (который называется *фильтром Фреше на* A).

4. Ультрафильтр F на бесконечном множестве A тогда и только тогда является однородным, когда F содержит фильтр Фреше Φ_A.

Мы сейчас покажем (используя лемму Цорна), что каждое центрированное множество можно расширить до ультрафильтра, а следовательно, на любом множестве можно построить ультрафильтр.

Предложение 4.1. *Пусть A — некоторое непустое множество. Тогда*

1) *центрированное множество $C \subseteq P(A)$ можно расширить до максимального центрированного множества D;*
2) *центрированное множество тогда и только тогда является ультрафильтром, когда оно является максимальным центрированным множеством;*

3) *любое центрированное множество $C \subseteq P(A)$ содержится в некотором ультрафильтре F на A;*
4) *фильтр является ультрафильтром тогда и только тогда, когда он является максимальным фильтром;*
5) *если A бесконечно, то существует однородный ультрафильтр на A.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть S — совокупность всех центрированных множеств подмножеств A, содержащих семейство C. Ясно, что объединение возрастающей цепи центрированных множеств является центрированным множеством. Следовательно, по лемме Цорна частично упорядоченное множество $\langle S, \subseteq \rangle$ удовлетворяет условию максимальности. Таким образом, существует центрированное множество D, являющееся максимальным в множестве $\langle S, \subseteq \rangle$.

Докажем утверждение 2). Пусть C — максимальное центрированное множество. Заметим, что $\varnothing \notin C$ и C замкнуто относительно пересечений. Если $X \in C$ и $X \subseteq Y \subseteq A$, то $C \cup \{Y\}$ — центрированное множество. Из максимальности C следует, что $Y \in C$ и, следовательно, C является фильтром. Если $X \notin C$, то $C \cup \{X\}$ не центрированное множество, следовательно, $X \cap Y = \varnothing$ для некоторого $Y \in C$. Тогда $Y \subseteq A \setminus X$ и $A \setminus X \in C$, поскольку C является фильтром. Таким образом, C — ультрафильтр.

Обратно, любой ультрафильтр F является центрированным множеством, и если $F \subset G$ для центрированного множества G, то, взяв $X \in G \setminus F$, получим $X, A \setminus X \in G$, что противоречит центрированности G. Следовательно, ультрафильтр F максимален среди центрированных множеств.

Утверждение 3) вытекает из 1) и 2).

Докажем утверждение 4). Ясно, что ультрафильтр является максимальным фильтром. С другой стороны, если F — максимальный фильтр, то по утверждению 1) F можно расширить до максимального центрированного множества G. Но по 2) G — ультрафильтр, следовательно, из максимальности F следует, что $F = G$.

Утверждение 5) следует из утверждения 3) и замечания 4 выше. $\square$

Теперь мы опишем конструкцию ультрапроизведения левых S-полигонов. Мы, конечно, могли бы определить ультрапроизведения для любого класса *L-структур*, но мы предпочитаем сделать это непосредственно для левых S-полигонов, обобщение этого понятия на произвольные языки оставляем читателю. Примем соглашение: для любого языка L мы различаем L-структуру $\mathbf{A}$ и основное множество (носитель) A L-структуры $\mathbf{A}$, в то время как для S-полигонов такого различия мы не делаем.

Если $B = \prod\limits_{i \in I} B_i$ — декартово произведение S-полигонов B_i, $i \in I$, и Φ — ультрафильтр на I, то определим отношение $\equiv_\Phi$ на B по правилу

$$(a_i) \equiv_\Phi (b_i) \text{ тогда и только тогда, когда } \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in \Phi.$$

Это отношение является отношением эквивалентности и, более того, отношением конгруэнции на левом S-полигоне B. Пусть

$$U = \Big(\prod_{i \in I} B_i\Big)/\Phi = \Big(\prod_{i \in I} B_i\Big)/{\equiv_\Phi}.$$

Класс конгруэнции $\equiv_\Phi$ с представителем $f \in \prod\limits_{i \in I} B_i$ обозначим через f/Φ. Тогда U является S-полигоном относительно операции

$$s\,(a_i)/\Phi = (sa_i)/\Phi$$

и называется *ультрапроизведением* левых S-полигонов B_i, $i \in I$, по фильтру Φ.

Понятие ультрапроизведения в данной работе играет большу́ю роль благодаря замечательной теореме Лося.

Теорема 4.2 [8]. *Пусть L — язык первого порядка и $\mathcal{A}$ — класс L-структур. Если $\mathcal{A}$ аксиоматизируем, то $\mathcal{A}$ замкнут относительно ультрапроизведений.*

Пусть $\varkappa$ — бесконечный кардинал. Тогда $\varkappa$ — предельный ординал и можно рассматривать его как объединение всех меньших ординалов. Фильтр F называется *$\varkappa$-регулярным*, если существует такое семейство $R = \{S_\alpha \mid \alpha \in \varkappa\}$ различных элементов F, что любое пересечение бесконечного подмножества семейства R пусто.

Предложение 4.3. *Для любой бесконечной мощности $\varkappa$ существует $\varkappa$-регулярный ультрафильтр на множестве I, где $|I| = \varkappa$.*

Доказательство. Согласно предложению 4.1 достаточно построить множество I, $|I| = \varkappa$, и центрированное множество $F = \{S_\alpha \mid \alpha \in \varkappa\}$ различных подмножеств I, такое что пересечение любых подмножеств F пусто.

Рассмотрим множество $I = \{v \mid v \subseteq \varkappa,\ v \text{ конечно}\}$. Ясно, что мощность I равна $\varkappa$. Пусть

$$S_\alpha = \{v \mid v \in I,\ \alpha \in v\}, \quad R = \{S_\alpha \mid \alpha \in \varkappa\}.$$

Если $S_{\alpha_1}, \ldots, S_{\alpha_n} \in R$, то $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in S_{\alpha_1} \cap \ldots \cap S_{\alpha_n}$. Следовательно, множество R центрированно и пересечение любого его бесконечного подмножества пусто. $\square$

Нам понадобится в дальнейшем следующий технический результат, касающийся ультрапроизведений.

Теорема 4.4. *Пусть F — $\varkappa$-регулярный фильтр на множестве I, $|I| = \varkappa$ и A_i $(i \in I)$ — S-полигоны бесконечной мощности λ. Тогда мощность фильтрованного произведения $\Big(\prod\limits_{i \in I} A_i\Big)/F$ равна $\lambda^\varkappa$.*

Доказательство. Пусть $\lambda^{<\omega}$ обозначает множество конечных последовательностей элементов кардинала λ. Ясно, что мощность множества $\lambda^{<\omega}$ совпадает с λ. Так как мощность фильтрованного произведения не зависит от того факта, что A_i являются S-полигонами, а только от мощностей A_i, то можно считать, что $A_i = \lambda^{<\omega}$ для всех $i \in I$. Так как $\left|(\lambda^{<\omega})^I\right| = \lambda^\varkappa$, то имеет место оценка $\left|(\lambda^{<\omega})^I/F\right| \leqslant \lambda^\varkappa$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно построить инъективное вложение ϕ множества отображений $\lambda^\varkappa = \{f \mid f\colon \varkappa \to \lambda\}$ в множество $(\lambda^{<\omega})^I/F$.

Пусть семейство $R = \{S_\alpha \mid \alpha \in \varkappa\}$ элементов фильтра F удовлетворяет условию из определения $\varkappa$-регулярного фильтра, т. е. любое пересечение бесконечного подмножества семейства R пусто. Ясно, что для любого $i \in I$ множество $\{\alpha\colon i \in S_\alpha\}$ конечно. Добавив множество $I \setminus \bigcup R$ к множеству S_0, можно считать, что $I = \bigcup R$. Возьмём произвольное отображение $f\colon \varkappa \to \lambda$. Определим отображение $f^*\colon I \to \lambda^{<\omega}$ путём постановки в соответствие элементу $i \in I$ последовательности $f^*(i) = \langle f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)\rangle$, где $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = \{\alpha \mid i \in S_\alpha\}$ и $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Предположим, что $\phi(f) = f^*/F$. Пусть $f_1, f_2 \in \lambda^\varkappa$ такие, что $f_1 \neq f_2$, т. е. $f_1(\alpha) \neq f_2(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in \varkappa$. Тогда $f_1^*(i) \neq f_2^*(i)$ для любого $i \in S_\alpha$. Поскольку $S_\alpha \in F$, имеем $f_1^*/F \neq f_2^*/F$, и следовательно, ϕ разнозначно, что и требуется. □

5. Аксиоматизируемость класса $\mathcal{WF}$

Мы начинаем рассматривать вопросы аксиоматизируемости с класса $\mathcal{WF}$; результаты этого раздела полностью взяты из [6].

В дальнейшем при работе с тензорным произведением нам будет полезен следующий результат.

Лемма 5.1 [18]. *Пусть A — правый S-полигон и B — левый S-полигон. Тогда для $a, a' \in A$ и $b, b' \in B$ равенство $a \otimes b = a' \otimes b'$ выполняется в том и только том случае, когда существуют $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_m, t_m \in S$, $a_2, \ldots, a_m \in A$ и $b_1, \ldots, b_m \in B$, такие что*

$$\begin{aligned} & & b &= s_1 b_1, \\ a s_1 &= a_2 t_1, & t_1 b_1 &= s_2 b_2, \\ a_2 s_2 &= a_3 t_2, & t_2 b_2 &= s_3 b_3, \\ &\ \vdots & &\ \vdots \\ a_m s_m &= a' t_m, & t_m b_m &= b'. \end{aligned}$$

Последовательность равенств из леммы 5.1 называется *схемой* $\mathcal{T}$ длины m над A и B, связывающей (a, b) с (a', b'). *Остов* $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{T})$ схемы $\mathcal{T}$ — это последовательность

$$\mathcal{S} = (s_1, t_1, \ldots, s_m, t_m) \in S^{2m}.$$

Множество всех остовов обозначается через $\mathbb{S}$. Легко понять, что для тривиальных полигонов $\mathbb{S}$ состоит из всех последовательностей элементов S чётной длины.

Пусть $a, a' \in S$ и $\mathcal{S} = (s_1, t_1, \ldots, s_m, t_m)$ — остов длины m. Будем говорить, что тройка $(a, \mathcal{S}, a')$ *реализуется*, если существуют такие элементы $a_2, a_3, \ldots, a_m \in S$, что

$$\begin{aligned} as_1 &= a_2 t_1, \\ a_2 s_2 &= a_3 t_2, \\ &\vdots \\ a_m s_m &= a' t_m. \end{aligned}$$

Через $\mathbb{T}$ обозначим множество всех реализуемых троек.

Элементы $b, b_1, \ldots, b_m, b'$ левого S-полигона B называются *свидетелями* реализуемой тройки $(a, \mathcal{S}, a')$, если

$$\begin{aligned} b &= s_1 b_1, \\ t_1 b_1 &= s_2 b_2, \\ &\vdots \\ t_m b_m &= b'. \end{aligned}$$

Мы знаем, что если $a, a' \in A$ и $b, b' \in B$, где A — правый S-полигон и B — левый S-полигон, то $a \otimes b = a' \otimes b'$ в $A \otimes B$ тогда и только тогда, когда существует схема $\mathcal{T}$ из (a, b) в (a', b') над A и B, с остовом $\mathcal{S}$ например. Если равенство $a \otimes b = a' \otimes b'$ выполняется также в $(aS \cup a'S) \otimes B$ и определяется некоторой схемой $\mathcal{T}'$ из (a, b) в (a', b') над $aS \cup a'S$ и B с остовом $\mathcal{S}' = \mathcal{S}(\mathcal{T}')$, то схему $\mathcal{T}'$ будем называть *замещающей схемой* для $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}'$ — *замещающим остовом* для $\mathcal{S}$ и (в случае $A = S$) тройку $(a, \mathcal{S}', a')$ — *замещающей тройкой* для $(a, \mathcal{S}, a')$.

Заметим, что для левого S-полигона B, правого S-полигона A и (a, b), $(a', b') \in A \times B$, если $\mathcal{S} = (s_1, t_1, \ldots, s_m, t_m)$ — остов схемы из (a, b) в (a', b') над A и B, то $\gamma_{\mathcal{S}}(b, b')$ истинно в B, где

$$\gamma_{\mathcal{S}}(y, y') \leftrightharpoons (\exists\, y_1)(\exists\, y_2) \ldots (\exists\, y_m)(y = s_1 y_1 \wedge t_1 y_1 = s_2 y_2 \wedge \ldots \wedge t_m y_m = y').$$

Для любых $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ через $\psi_{\mathcal{S}}$ обозначим предложение

$$\psi_{\mathcal{S}} \leftrightharpoons (\forall\, y)(\forall\, y')\, \neg \gamma_{\mathcal{S}}(y, y').$$

Теорема 5.2 [6]. *Следующие условия для моноида S эквивалентны:*

1) *класс $\mathcal{WF}$ аксиоматизируем;*
2) *класс $\mathcal{WF}$ замкнут относительно ультрапроизведений;*
3) *для любого остова $\mathcal{S}$ над S и любых $a, a' \in S$ существует конечное число остовов $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{\alpha(a,\mathcal{S},a')}$ над S, таких что для любого слабо плоского левого S-полигона B, если $(a, b), (a', b') \in S \times B$ связаны схемой $\mathcal{T}$ над S и B с $\mathcal{S}(\mathcal{T}) = \mathcal{S}$, то (a, b) и (a', b') связаны схемой $\mathcal{T}'$ над $aS \cup a'S$ и B, такой что $\mathcal{S}(\mathcal{T}') = \mathcal{S}_k$ для некоторого $k \in \{1 \ldots, \alpha(a, \mathcal{S}, a')\}$.*

Доказательство. Из теоремы 4.2 (теоремы Лося) следует импликация 1) $\Longrightarrow$ 2).

Предположим, что условие 2) выполняется, а 3) не выполняется. Через J обозначим множество всех конечных подмножеств $\mathbb{S}$. Предположим, что для некоторого остова $\mathcal{S}_0 = (s_1, t_1, \ldots, s_m, t_m) \in \mathbb{S}$ и $a, a' \in S$ для каждого $f \in J$ существуют слабо плоский левый S-полигон B_f и $b_f, b'_f \in B_f$, для которых пары $(a, b_f), (a', b'_f) \in S \times B_f$ связаны схемой $\mathcal{T}_f$ с остовом $\mathcal{S}_0$, при этом не существует схемы над $aS \cup a'S$ и B_f, связывающей (a, b_f) и (a', b'_f) с остовом, принадлежащим множеству f.

Для каждого $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ положим $J_{\mathcal{S}} = \{f \in J \colon \mathcal{S} \in f\}$. Все пересечения конечного числа множеств $J_{\mathcal{S}}$ непусты (потому что $\mathbb{S}$ бесконечно), следовательно, существует ультрафильтр Φ над J, такой что каждое $J_{\mathcal{S}}$ ($\mathcal{S} \in \mathbb{S}$) принадлежит Φ. Заметим, что $a \otimes \underline{b} = a' \otimes \underline{b'}$ в $S \otimes B$, где $B = \prod\limits_{f \in J} B_f$, $\underline{b}(f) = b_f$ и $\underline{b'}(f) = b'_f$, и это равенство определяется схемой над S и B с остовом $\mathcal{S}_0$. Отсюда следует, что равенство $a \otimes (\underline{b}/\Phi) = a' \otimes (\underline{b'}/\Phi)$ выполняется и в $S \otimes U$, где $U = \Big(\prod\limits_{f \in J} B_f\Big)/\Phi$, и определяется схемой над S и U с остовом $\mathcal{S}_0$.

По предположению U является слабым плоским, следовательно, $(a, \underline{b}/\Phi)$ и $(a', \underline{b'}/\Phi)$ связаны замещающей схемой $\mathcal{T}'$ над $aS \cup a'S$ и U:

$$\begin{aligned}
& & \underline{b}/\Phi &= u_1\underline{d_1}/\Phi,\\
au_1 &= c_2v_1, & v_1\underline{d_1}/\Phi &= u_2\underline{d_2}/\Phi,\\
c_2u_2 &= c_3v_2, & v_2\underline{d_2}/\Phi &= u_3\underline{d_3}/\Phi,\\
&\vdots & &\vdots\\
c_nu_n &= a'v_n, & v_n\underline{d_n}/\Phi &= \underline{b'}/\Phi,
\end{aligned}$$

где $\underline{d_i}(f) = d_{i,f}$ для любых $f \in J$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$. Положим $\mathcal{S}' = \mathcal{S}(\mathcal{T}')$.

Поскольку ультрафильтр Φ замкнут относительно конечных пересечений, то существует такое $D \in \Phi$, что

$$\begin{aligned}
& & b_f &= u_1d_{1,f},\\
au_1 &= c_2v_1, & v_1d_{1,f} &= u_2d_{2,f},\\
c_2u_2 &= c_3v_2, & v_2d_{2,f} &= u_3d_{3,f},\\
&\vdots & &\vdots\\
c_nu_n &= a'v_n, & v_nd_{n,f} &= b'_f
\end{aligned}$$

для $f \in D$. Предположим, что $f \in D \cap J_{\mathcal{S}'}$. Тогда остов $\mathcal{S}'$ является замещающим для остова $\mathcal{S}_0$, связывающего (a, b_f) и (a', b'_f) над $aS \cup a'S$ и B_f. Но $\mathcal{S}' \in f$, что противоречит выбору (a, b_f) и (a', b'_f). Таким образом, условие 3) выполнено.

Предположим, что 3) выполняется. Каждому элементу из $\mathbb{T}$ поставим в соответствие предложение таким образом, чтобы полученное множество предложений явилось множеством аксиом для класса $\mathcal{WF}$.

Пусть $\mathbb{T}_1$ — множество реализуемых троек, для которых нет свидетелей ни в одном слабо плоском левом S-полигоне B, и $\mathbb{T}_2 = \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_1$. Для $T = (a, \mathcal{S}, a') \in \mathbb{T}_1$ через ψ_T обозначим предложение $\psi_{\mathcal{S}}$, определённое перед формулировкой теоремы. Если $T = (a, \mathcal{S}, a') \in \mathbb{T}_2$, то $\mathcal{S}$ — остов некоторой схемы, соединяющей (a, b) с (a', b') над S и некоторым слабо плоским левым S-полигоном B. Из условия 3) следует, что существует конечное число замещающих остовов $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{\alpha(T)}$. Следовательно, для каждого $k \in \{1, \ldots, \alpha(T)\}$, если $\mathcal{S}_k = (u_1, v_1, \ldots, u_h, v_h)$, то существуют такие слабо плоский левый S-полигон C_k и элементы $c, c', c_1, \ldots, c_h \in C_k$ и $q_2, \ldots, q_h \in aS \cup a'S$, что

$$\begin{aligned} & & c &= u_1 c_1, \\ a u_1 &= q_2 v_1, & v_1 c_1 &= u_2 c_2, \\ q_2 u_2 &= q_3 v_2, & v_2 c_2 &= u_3 c_3, \\ &\vdots & &\vdots \\ q_h u_h &= a' v_h, & v_h c_h &= c'. \end{aligned} \tag{1}$$

Для каждого k зафиксируем последовательность $q_2, \ldots, q_h$ элементов. Через φ_T обозначим предложение

$$\varphi_T \risingdotseq (\forall\, y)(\forall\, y')\big(\gamma_{\mathcal{S}}(y, y') \to \gamma_{\mathcal{S}_1}(y, y') \vee \ldots \vee \gamma_{\mathcal{S}_{\alpha(T)}}(y, y')\big).$$

Пусть

$$\Sigma_{\mathcal{WF}} = \{\psi_T \colon T \in \mathbb{T}_1\} \cup \{\varphi_T \colon T \in \mathbb{T}_2\}.$$

Покажем, что $\Sigma_{\mathcal{WF}}$ является множеством аксиом для $\mathcal{WF}$.

Предположим, что D — слабо плоский левый S-полигон. Пусть $T \in \mathbb{T}_1$. Тогда $T = (a, \mathcal{S}, a')$ является реализуемой тройкой. Поскольку T не имеет свидетелей ни в каком слабо плоском левом S-полигоне, то T, очевидно, не имеет свидетелей и в D, следовательно, $D \vDash \psi_T$.

С другой стороны, для $T = (a, \mathcal{S}, a') \in \mathbb{T}_2$, где $\mathcal{S} = (s_1, t_1, \ldots, s_m, t_m)$, если $d, d' \in D$ такие, что $\gamma_{\mathcal{S}}(d, d')$ истинно, то существуют элементы $d_1, \ldots d_m \in D$, для которых выполняются равенства

$$\begin{aligned} d &= s_1 d_1, \\ t_1 d_1 &= s_2 d_2, \\ &\vdots \\ t_m d_m &= d'. \end{aligned}$$

Поскольку T является реализуемой тройкой, то отсюда следует, что (a, d) связана с (a', d') над S и D схемой с остовом $\mathcal{S}$. Так как S-полигон D слабо плоский, то (a, d) и (a', d') связаны над $aS \cup a'S$ и D, и по условию 3) можно взять схему с одним из остовов $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{\alpha(T)}$, например $\mathcal{S}_k$. Таким образом, $D \vDash \gamma_{\mathcal{S}_k}(d, d')$, откуда получаем, что $D \vDash \varphi_T$. Следовательно, D является моделью предложения $\Sigma_{\mathcal{WF}}$.

Покажем, что каждая модель $\Sigma_{\mathcal{WF}}$ является слабо плоским левым S-полигоном. Пусть $C \models \Sigma_{\mathcal{WF}}$, $a, a' \in S$, $c, c' \in C$ и существует схема

$$\begin{aligned}
& & c &= s_1c_1,\\
as_1 &= a_2t_1, & t_1c_1 &= s_2c_2,\\
a_2s_2 &= a_3t_2, & t_2c_2 &= s_3c_3,\\
&\ \vdots & &\ \vdots\\
a_ms_m &= a't_m, & t_mc_m &= c'
\end{aligned}$$

с остовом $\mathcal{S} = (s_1, t_1, \ldots, s_m, t_m)$ над S и C. Тогда тройка $T = (a, \mathcal{S}, a')$ реализуема, т. е. $T \in \mathbb{T}$. Поскольку $\gamma_{\mathcal{S}}(c, c')$ истинна, то C не может быть моделью $\psi_{\mathcal{S}}$. Поскольку $C \models \Pi$, то $T \in \mathbb{T}_2$. Но тогда формула φ_T истинна в C, т. е. для некоторого $k \in \{1, \ldots, \alpha(T)\}$ предложение $\gamma_{\mathcal{S}_k}(c, c')$ истинно. Отсюда и из (1) следует существование схемы над $aS \cup a'S$ и C, связывающей (a, c) с (a', c'). Таким образом, S-полигон C является слабо плоским. □

6. Аксиоматизируемость класса $\mathcal{F}$

В этом разделе мы рассмотрим класс $\mathcal{F}$ плоских левых S-полигонов. Результаты этого раздела опять взяты из [6]. Начнём с леммы о конечной представимости для плоских S-полигонов (см. [6]), которая является ключевой в наших рассуждениях.

Пусть $\mathcal{S} = (s_1, t_1, \ldots, s_m, t_m) \in \mathbb{S}$ — остов, F^{m+1} — свободный правый S-полигон

$$xS \amalg x_2S \amalg \ldots \amalg x_mS \amalg x'S$$

и $\rho_{\mathcal{S}}$ — конгруэнция F^{m+1}, порождённая

$$\{(xs_1, x_2t_1),\ (x_2s_2, x_3t_2), \ldots, (x_{m-1}s_{m-1}, x_mt_{m-1}),\ (x_ms_m, x't_m)\}.$$

Обозначим $\rho_{\mathcal{S}}$-класс с представителем $w \in F^{m+1}$ через $[w]$. Если B — левый S-полигон и $b, b_1, \ldots, b_m, b' \in B$ такие, что $b = s_1b_1$, $t_1b_1 = s_2b_2, \ldots$, $t_mb_m = b'$, то схема

$$\begin{aligned}
& & b &= s_1b_1,\\
[x]s_1 &= [x_2]t_1, & t_1b_1 &= s_2b_2,\\
[x_2]s_2 &= [x_3]t_2, & t_2b_2 &= s_3b_3,\\
&\ \vdots & &\ \vdots\\
[x_{m-1}]s_{m-1} &= [x_m]t_{m-1}, & t_{m-1}b_{m-1} &= s_mb_m,\\
[x_m]s_m &= [x']t_m, & t_mb_m &= b'
\end{aligned}$$

над $F^{m+1}/\rho_{\mathcal{S}}$ и B называется *стандартной схемой* с остовом $\mathcal{S}$, связывающей $([x], b)$ с $([x'], b')$.

Мы отсылаем читателя к [6] за доказательством следующей леммы.

Лемма 6.1 [6]. *Следующие условия для левого S-полигона B эквивалентны*:

1) *B плоский*;
2) *$-\otimes B$ сохраняет вложения A в C для произвольного конечно порождённого S-подполигона A конечно представимого правого S-полигона C*;
3) *$-\otimes B$ сохраняет вложения $[x]S \cup [x']S$ в $F^{m+1}/\rho_{\mathcal{S}}$ для произвольного остова $\mathcal{S}$*;
4) *если $([x], b)$ и $([x'], b')$ связаны стандартной схемой над $F^{m+1}/\rho_{\mathcal{S}}$ и B с остовом $\mathcal{S}$, то они связаны схемой над $[x]S \cup [x']S$ и B.*

Конструкция $F^{m+1}/\rho_{\mathcal{S}}$ позволяет нам заметить, что для любого левого S-полигона B и любых $b, b' \in B$ остов $\mathcal{S} = (s_1, t_1, \ldots, s_m, t_m)$ является остовом схемы из (a, b) в (a', b') над A и B для некоторого A и некоторых $a, a' \in A$ тогда и только тогда, когда предложение $\gamma_{\mathcal{S}}(b, b')$ истинно в B, где $\gamma_{\mathcal{S}}$ определено перед теоремой 5.2. Заметим также, что если (a, b), (a', b') связаны схемой с остовом $\mathcal{S}$, то $([x], b), ([x'], b) \in F^{m+1}/\rho_{\mathcal{S}}$ связаны стандартной схемой с остовом $\mathcal{S}$.

Теорема 6.2 [6]. *Следующие условия для моноида S эквивалентны*:

1) *класс $\mathcal{F}$ аксиоматизируем*;
2) *класс $\mathcal{F}$ замкнут относительно ультрапроизведений*;
3) *для любого остова $\mathcal{S}$ над S существует конечное число замещающих остовов $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{\alpha(\mathcal{S})}$ над S, таких что для любого правого S-полигона A и любого плоского левого S-полигона B, если $(a, b), (a', b') \in A \times B$ связаны схемой $\mathcal{T}$ над A и B с остовом $\mathcal{S}(\mathcal{T}) = \mathcal{S}$, то (a, b) и (a', b') связаны схемой $\mathcal{T}'$ над $aS \cup a'S$ и B, причём $\mathcal{S}(\mathcal{T}') = \mathcal{S}_k$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, \alpha(\mathcal{S})\}$.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) следует из теоремы 4.2.

Докажем, что из 2) следует 3). Так же как в доказательстве аналогичной импликации в теореме 5.2, построим множество J, множества $J_{\mathcal{S}}$ для $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ и ультрафильтр Φ.

Предположим, что класс $\mathcal{F}$ замкнут относительно ультрапроизведений, но условие 3) не выполняется. Через J обозначим семейство всех конечных подмножеств $\mathbb{S}$. Предположим, что остов $\mathcal{S}_0 = (s_1, t_1, \ldots, s_m, t_m) \in \mathbb{S}$ такой, что для любого $f \in J$ существуют такие правый S-полигон A_f, плоский левый S-полигон B_f и пары $(a_f, b_f), (a'_f, b'_f) \in A_f \times B_f$, что (a_f, b_f) и (a'_f, b'_f) связаны над A_f и B_f схемой $\mathcal{T}_f$ с остовом $\mathcal{S}_0$, но не существует замещающей схемы над $a_f S \cup a'_f S$ и B_f, связывающей (a_f, b_f) и (a'_f, b'_f) с остовом их множества f. Заметим, что $\underline{a} \otimes \underline{b} = \underline{a'} \otimes \underline{b'}$ в $A \otimes B$, где $A = \prod\limits_{f \in J} A_f$, $B = \prod\limits_{f \in J} B_f$ и $\underline{a}(f) = a_f$, $\underline{b}(f) = b_f$ для любого $f \in J$, и что это равенство определяется схемой над A и B с остовом $\mathcal{S}_0$. Отсюда следует, что равенство $\underline{a} \otimes (\underline{b}/\Phi) = \underline{a'} \otimes (\underline{b'}/\Phi)$ выполняется в $A \otimes U$, где $U = \Big(\prod\limits_{f \in J} B_f\Big)/\Phi$, и определяется схемой над A и U с остовом $\mathcal{S}_0$. Поскольку S-полигон U плоский, то для остова $\mathcal{S}_0$ существует замещающий остов $\mathcal{S}(\mathcal{T}') = \mathcal{S}' = (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$, где $\mathcal{T}'$ — схема

$$\begin{aligned} & & \underline{b}\,/\Phi &= u_1\underline{d_1}\,/\Phi, \\ \underline{a}u_1 &= \underline{c_2}v_1, & v_1\underline{d_1}\,/\Phi &= u_2\underline{d_2}\,/\Phi, \\ \underline{c_2}u_2 &= \underline{c_3}v_2, & v_2\underline{d_2}\,/\Phi &= u_3\underline{d_3}\,/\Phi, \\ &\vdots & &\vdots \\ \underline{c_n}u_n &= \underline{a'}v_n, & v_n\underline{d_n}\,/\Phi &= \underline{b'}\,/\Phi, \end{aligned}$$

причём $\underline{c_j}(f) = c_{j,f} \in a_fS \cup a'_fS$ для $2 \leqslant j \leqslant n$ и $f \in J$ и $\underline{d_j}(f) = d_{f,j} \in B_f$ для $1 \leqslant j \leqslant n$ и $f \in J$. Так как ультрафильтр Φ замкнут относительно конечных пересечений, то существует такое $D \in \Phi$, что

$$\begin{aligned} & & b_f &= u_1d_{f,1}, \\ a_fu_1 &= c_{f,2}v_1, & v_1d_{f,1} &= u_2d_{f,2}, \\ c_{f,2}u_2 &= c_{f,3}v_2, & v_2d_{f,2} &= u_3d_{f,3}, \\ &\vdots & &\vdots \\ c_{f,n}u_n &= a'_fv_n, & v_nd_{f,n} &= b'_f \end{aligned}$$

для $f \in D$. Предположим, что $f \in D \cap J_{\mathcal{S}'}$. Тогда из только что рассмотренной схемы следует, что $\mathcal{S}'$ — замещающий остов для остова $\mathcal{S}_0$, являющегося остовом схемы $\mathcal{T}_f$, соединяющей пары (a_f, b_f) и (a'_f, b'_f) над A_f и B_f. Но поскольку $\mathcal{S}'$ принадлежит f, это невозможно. Это завершает доказательство того, что из условия 2) следует 3).

Покажем, что из условия 3) следует условие 1). Предположим, что для каждого остова существует конечное число замещающих остовов со свойством, указанным в 3). Наша задача — построить множество аксиом для класса $\mathcal{F}$.

Через $\mathbb{S}_1$ обозначим множество всех элементов $\mathbb{S}$, для которых *не существует* остова схемы, соединяющей два элемента из $A \times B$, где A пробегает все правые S-полигоны, а B — все плоские левые S-полигоны. Пусть $\mathbb{S}_2 = \mathbb{S} \setminus \mathbb{S}_1$.

По замечанию, сделанному перед этой теоремой, $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_2$ является остовом по крайней мере одной схемы из $([x], b)$ в $([x'], b')$ над $F^{m+1}/\rho_{\mathcal{S}}$ и B, где B плоский, $b, b' \in B$, F^{m+1} и $\rho_{\mathcal{S}}$ определяются так же, как в лемме 6.1. Пусть $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{\beta(\mathcal{S})}$ — множество замещающих остовов для $\mathcal{S}$ из условия 3). Тогда для каждого $k \in \{1, \ldots, \beta(\mathcal{S})\}$, если $\mathcal{S}_k = (u_1, v_1, \ldots, u_h, v_h)$, то существуют такие плоский левый S-полигон C, элементы $c, c', c_1, \ldots, c_h \in C_k$ и элементы $p_2, \ldots, p_h \in [x]S \cup [x']S$, что

$$\begin{aligned} & & c &= u_1c_1, \\ [x]u_1 &= p_2v_1, & v_1c_1 &= u_2c_2, \\ p_2u_2 &= p_3v_2, & v_2c_2 &= u_3c_3, \\ &\vdots & &\vdots \\ p_hu_h &= [x']v_h, & v_hc_h &= c'. \end{aligned} \tag{2}$$

Для каждого k зафиксируем последовательность $p_2, \ldots, p_h$ элементов и определим предложение $\varphi_{\mathcal{S}}$ следующим образом:

$$\varphi_{\mathcal{S}} \leftrightharpoons (\forall\, y)(\forall\, y')\bigl(\gamma_{\mathcal{S}}(y, y') \to \gamma_{\mathcal{S}_1}(y, y') \vee \ldots \vee \gamma_{\mathcal{S}_{\alpha(\mathcal{S})}}(y, y')\bigr).$$

Пусть

$$\Sigma_{\mathcal{F}} = \{\psi_{\mathcal{S}} \colon \mathcal{S} \in \mathbb{S}_1\} \cup \{\varphi_{\mathcal{S}} \colon \mathcal{S} \in \mathbb{S}_2\}.$$

Докажем, что $\Sigma_{\mathcal{F}}$ — множество аксиом класса $\mathcal{F}$.

Пусть D — произвольный плоский левый S-полигон. Для $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_1$, если бы в D было ложно предложение $\psi_{\mathcal{S}}$, то выполнялось бы $\gamma_{\mathcal{S}}(d, d')$ для некоторых $d, d' \in D$. Следовательно, $\mathcal{S}$ — остов некоторой схемы из (a, d) в (a', d') над некоторым правым S-полигоном A и плоским левым S-полигоном D, что противоречит тому факту, что $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_1$. Таким образом, $D \vDash \psi_{\mathcal{S}}$.

Пусть $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_2$. Выберем $d, d' \in D$ так, что в D истинно $\gamma_{\mathcal{S}}(d, d')$. Тогда, как было замечено ранее, $([x], d)$ и $([x'], d')$ связаны над $F^{m+1}/\rho_{\mathcal{S}}$ и D схемой с остовом $\mathcal{S}$, а следовательно, по предположению, схемой над $[x]S \cup [x']S$ и D с остовом $\mathcal{S}_k$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, \beta(\mathcal{S})\}$. Тогда $\gamma_{\mathcal{S}_k}(d, d')$ истинно в D, что и требовалось доказать. Таким образом, $\mathcal{F} \vDash \Sigma_{\mathcal{F}}$.

Осталось показать, что левый S-полигон C, в котором истинны все предложения из $\Sigma_{\mathcal{F}}$, является плоским. Достаточно доказать выполнение условия 4) из леммы 6.1 для C. Пусть $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$. Предположим, что мы имеем схему

$$\begin{aligned} & & c &= s_1 c_1, \\ [x]s_1 &= [x_2]t_1, & t_1 c_1 &= s_2 c_2, \\ &\vdots & &\vdots \\ [x_m]s_m &= [x']t_m, & t_m c_m &= c' \end{aligned} \tag{3}$$

над $F^{m+1}/\rho_{\mathcal{S}}$ и C. Если бы остов $\mathcal{S}$ принадлежал $\mathbb{S}_1$, то в C было бы истинно предложение $(\forall\, y)(\forall\, y')\, \neg\gamma_{\mathcal{S}}(y, y')$ и, следовательно, выполнялась бы формула $\neg\gamma_{\mathcal{S}}(c, c')$, что противоречит последовательности равенств в правой колонке (3). Таким образом, $\mathcal{S}$ принадлежит $\mathbb{S}_2$. Поскольку в C истинны $\varphi_{\mathcal{S}}$ и $\gamma_{\mathcal{S}}(c, c')$, истинно и $\gamma_{\mathcal{S}_k}(c, c')$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, \beta(\mathcal{S})\}$. Если $\mathcal{S}_k = (u_1, v_1, \ldots, u_h, v_h)$, то существуют такие $e_1, \ldots, e_h \in C$, что

$$\begin{aligned} c &= u_1 e_1, \\ v_1 e_1 &= u_2 e_2, \\ &\vdots \\ v_h e_h &= c'. \end{aligned} \tag{4}$$

Равенства (4) вместе с последовательностью равенств в левой колонке (2) являются схемой над $[x]S \cup [x']S$ и C, связывающей $([x], c)$ и $([x'], c')$, т. е. S-полигон C плоский. Теорема доказана. □

7. Аксиоматизируемость класса $\mathcal{SF}$

Самый ранний и наиболее просто получающийся результат в серии результатов об аксиоматизируемости, представленных в данной статье, — характеризация моноидов S, для которых класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем. Этот результат появился в [14]. Читатель должен иметь в виду, что в [14] сильно плоские полигоны называются плоскими.

Для произвольных элементов s, t моноида S определим правые аннигиляторы $R(s,t)$ и $r(s,t)$ следующим образом:

$$R(s,t) = \{(u,v) \in S \times S \mid su = tv\}, \quad r(s,t) = \{u \in S \mid su = tu\}.$$

Ясно, что $R(s,t)$ и $r(s,t)$, если не пусты, являются S-подполигоном правого S-полигона $S \times S$ и правым идеалом S соответственно.

Предложение 7.1. *Следующие условия для моноида S эквивалентны*:

1) *класс левых S-полигонов, удовлетворяющих условию* (E), *аксиоматизируем*;
2) *класс левых S-полигонов, удовлетворяющих условию* (E), *замкнут относительно ультрапроизведений*;
3) *любая ультрастепень S как левый S-полигон удовлетворяет условию* (E);
4) *для любых $s, t \in S$ аннигилятор $r(s,t)$ либо пуст, либо конечно порождён как правый идеал S.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) следует из теоремы 4.2. Поскольку S очевидным образом удовлетворяет условию (E), то из 2) следует 3).

Предположим, что любая ультрастепень S удовлетворяет условию (E). Пусть $s, t \in S$, $r(s,t) \neq \varnothing$ и $r(s,t)$ *не* является конечно порождённым правым идеалом.

Пусть $\{u_\beta \mid \beta < \gamma\}$ — множество порождающих $r(s,t)$ минимальной мощности γ. Поскольку кардинал γ бесконечен, он является предельным ординалом. Пусть $\underline{u} \in \prod\limits_{\beta<\gamma} S_\beta$ такой, что $\underline{u}(\beta) = u_\beta$, где каждое S_β — копия S. Можно считать, что $u_\beta \notin \bigcup\limits_{\alpha<\beta} u_\alpha S$ для любого $\beta < \gamma$.

По предложению 4.1 на γ существует однородный ультрафильтр Φ. Пусть $U = \Big(\prod\limits_{\beta<\gamma} S_\beta\Big)/\Phi$. По предположению 3) U удовлетворяет условию (E).

Поскольку $su_\beta = tu_\beta$ для любых $\beta < \gamma$, то $s\underline{u} = t\underline{u}$ и, следовательно, $s\underline{u}/\Phi = t\underline{u}/\Phi$. Так как U удовлетворяет условию (E), по теореме 3.5 существуют такие $s' \in S$ и $\underline{v}/\Phi \in U$, что $ss' = ts'$ и $\underline{u}/\Phi = s'\underline{v}/\Phi$.

Из равенства $ss' = ts'$ следует, что $s' \in r(s,t)$, т. е. $s' = u_\beta w$ для некоторых $\beta < \gamma$ и $w \in S$. Пусть $T = \{\alpha < \gamma \mid u_\alpha = s'v_\alpha\}$. Из однородности ультрафильтра Φ следует, что существует такой $\sigma \in T$, что $\sigma > \beta$. Тогда $u_\sigma = s'v_\sigma = u_\beta w v_\sigma \in u_\beta S$, противоречие. Следовательно, $r(s,t)$ конечно порождён.

Предположим, что выполняется условие 3). Найдём множество аксиом для класса левых S-полигонов, удовлетворяющих условию (E).

Для каждого элемента ρ из $S \times S$, если $r(\rho) \neq \varnothing$, выберем и зафиксируем конечное множество порождающих $w_{\rho 1}, \ldots, w_{\rho\, m(\rho)}$ из $r(\rho)$. Для $\rho = (s,t)$ определим предложение ξ_ρ языка L_S следующим образом: если $r(\rho) = \varnothing$, то

$$\xi_\rho \leftrightharpoons (\forall\, x)(sx \neq tx).$$

В противном случае, когда $r(\rho) \neq \varnothing$, положим

$$\xi_\rho \leftrightharpoons (\forall\, x)\Bigg(sx = tx \to (\exists\, z)\Bigg(\bigvee_{i=1}^{m(\rho)} x = w_{\rho\, i} z\Bigg)\Bigg).$$

Покажем, что

$$\Sigma_{\mathrm{E}} = \{\xi_\rho \mid \rho \in S \times S\}$$

является множеством аксиом для класса левых S-полигонов, удовлетворяющих условию (E).

Предположим, что левый S-полигон A удовлетворяет условию (E) и $\rho = (s,t) \in S \times S$. Если $r(\rho) = \varnothing$ и $sa = ta$ для некоторого $a \in S$, то, поскольку A удовлетворяет условию (E), существует такой $s' \in S$, что $ss' = ts'$, противоречие. Следовательно, $A \vDash \xi_\rho$. С другой стороны, если $r(\rho) \neq \varnothing$ и $sa = ta$ для некоторого $a \in S$, то опять же $ss' = ts'$ для некоторого $s' \in S$ и $a = s'b$ для некоторого $b \in A$. Тогда $s' \in r(\rho)$, т. е. $s' = w_{\rho\, i} v$ для некоторых $i \in \{1, \ldots, m(\rho)\}$ и $v \in S$. Тогда $a = w_{\rho\, i} c$, где $c = vb \in A$. Таким образом, $A \vDash \xi_\rho$. Тем самым мы показали, что A — модель Σ_{E}.

Предположим, что $A \vDash \Sigma_{\mathrm{E}}$ и $sa = ta$ для некоторых $s,t \in S$ и $a \in A$. Положим $\rho = (s,t)$. Так как $A \vDash \xi_\rho$ и $r(\rho) \neq \varnothing$, то $a = w_{\rho\, i} b$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, m(\rho)\}$. Из выбора $w_{\rho\, i}$ следует, что $sw_{\rho\, i} = tw_{\rho\, i}$. Следовательно, A удовлетворяет условию (E), что и требовалось доказать. □

Аналогично получается соответствующий результат для условия (P), полное доказательство можно найти в [14].

Предложение 7.2. *Следующие условия для моноида S эквивалентны*:

1) *класс левых S-полигонов, удовлетворяющих условию* (P), *аксиоматизируем*;
2) *класс левых S-полигонов, удовлетворяющих условию* (P), *замкнут относительно ультрапроизведений*;
3) *любая ультрастепень S удовлетворяет условию* (P) *как левый S-полигон*;
4) *для любых $s, t \in S$ аннигилятор $R(s,t)$ либо пуст, либо конечно порождён как подполигон правого S-полигона $S \times S$.*

Соединяя вместе предложения 7.1 и 7.2, получаем следующий результат для класса $\mathcal{SF}$ (см. [14]).

Теорема 7.3 [14]. *Следующие условия для моноида S эквивалентны*:

1) *класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем*;
2) *класс $\mathcal{SF}$ замкнут относительно ультрапроизведений*;

3) *любая ультрастепень S является сильно плоским левым S-полигоном*;
4) *для любых $s, t \in S$ либо аннигилятор $R(s, t)$ пуст или конечно порождён как правый S-полигон, либо аннигилятор $r(s, t)$ пуст или конечно порождён как правый идеал S.*

8. Аксиоматизируемость класса $\mathcal{P}$

Моноиды, для которых класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем, исследовались А. А. Степановой в [3] с использованием результатов, полученных В. Гоулд в [14]. Фактически, класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем и $\mathcal{P} = \mathcal{SF}$. Моноиды, для которых $\mathcal{P} = \mathcal{SF}$, являются совершенными слева моноидами. Поскольку совершенные слева моноиды занимают весьма значительное место в этом и последующих разделах, уделим им здесь внимание, отметив попутно некоторые их новые свойства.

Левый S-полигон B называется *накрытием* левого S-полигона A, если существует такой S-эпиморфизм $\theta\colon B \to A$, что никакое ограничение θ на собственный S-подполигон левого S-полигона B не является эпиморфизмом в A. Если B при этом проективен, то B называется *проективным накрытием* A. Моноид S называется *совершенным слева*, если каждый левый S-полигон имеет проективное накрытие.

Сформулируем некоторые условия конечности, используемые при рассмотрении свойств совершенных слева моноидов и в дальнейшем.

(A) Каждый левый S-полигон удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи циклических S-подполигонов.

(D) Каждый правый унитарный подмоноид моноида S имеет минимальный левый идеал, порождённый идемпотентом.

$(\mathrm{M_R})/(\mathrm{M_L})$ Моноид S удовлетворяет условию обрыва убывающей цепи главных правых/левых идеалов.

$(\mathrm{M^R})/(\mathrm{M^L})$ Моноид S удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи главных правых/левых идеалов.

Теорема 8.1 [11, 16, 18]. *Следующие условия для моноида S эквивалентны*:
1) *S совершенен слева*;
2) *S удовлетворяет условиям* (A) *и* (D);
3) *S удовлетворяет условиям* (A) *и* $(\mathrm{M_R})$;
4) $\mathcal{SF} = \mathcal{P}$.

Предложение 8.2. *Пусть S — совершенный слева моноид. Тогда*
1) *S — моноид с групповой границей*;
2) *если Sb (bS) — минимальный левый (правый) идеал моноида S, то bS (Sb) — минимальный правый (левый) идеал моноида S*;
3) *если $Sb_1 \subseteq Sb_0$ и $Sb_1 \cong Sb_0$, то $Sb_0 = Sb_1$*;

4) *любой минимальный левый (правый) идеал моноида S порождается идемпотентом.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть S — совершенный слева моноид. По теореме 8.1 S удовлетворяет условию $(\mathrm{M_R})$. Следовательно, для любого $a \in S$ существует $m \in \mathbb{N}$, при котором $a^m S = a^{m+1} S$. С другой стороны, рассмотрим убывающую цепь главных левых идеалов $Sa \supseteq Sa^2 \supseteq Sa^3 \supseteq \ldots$. Пусть Φ — неглавный ультрафильтр на $\mathbb{N}$ и $U = S^{\mathbb{N}}/\Phi$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\underline{u_n} = (1, 1, \ldots, a, a^2, a^3, \ldots),$$

где a встречается первый раз на n-м месте. Ясно, что $\underline{u_n} = a\underline{u_{n+1}}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $S\underline{u_1} \subseteq S\underline{u_2} \subseteq \ldots$. По теореме 8.1 U удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи циклических S-подполигонов, следовательно, $S\underline{u_h} = S\underline{u_{h+1}}$ для некоторого h. Тогда $s\underline{u_h} = \underline{u_{h+1}}$ для некоторого $s \in S$. Поскольку Φ — неглавный ультрафильтр, то для некоторого $i \geqslant h+1$ справедливо $sa^{i-h+1} = a^{i-h}$. Положив $k = i - h$, получаем, что $a^k \mathcal{L}\, a^{k+1}$. Возьмём n бóльшим, чем m и k. Тогда $a^n \mathcal{H}\, a^{n+1} \mathcal{H}\, a^{2n}$, и по теореме Грина [15] a^n лежит в подгруппе моноида S.

Докажем утверждение 2). Предположим, что Sb — минимальный левый идеал моноида S. Так как S удовлетворяет условию $(\mathrm{M_R})$, то можно выбрать $c \in S$ со свойством, что $cS \subseteq bS$ и cS минимален. Заметим, что $Scb = Sb$, следовательно, $cb \mathcal{L}\, b$. Тогда $cb \mathcal{L}^*\, b$. Пусть $d \in bS$. Из равенств $c^2S = cS = cdS$ получаем, что $cd = ccd'$ для некоторого $d' \in S$. Так как $d = bx$, $cd' = by$ для некоторых $x, y \in S$, то $cbx = cby$ и $d = bx = by = cd'$, т. е. $d \in cS$. Следовательно, $bS = cS$ минимален.

Для доказательства утверждения 3) предположим, что $Sb_1 \subseteq Sb_0$ и $Sb_1 \cong Sb_0$. Пусть $\phi\colon Sb_0 \to Sb_1$ — S-изоморфизм. Тогда $\phi(b_0) = sb_1$ для некоторого $s \in S$. Следовательно, $Sb_2 \subseteq Sb_1 \subseteq Sb_0$ и $b_2 = tb_0$ для некоторого $t \in S$. Поскольку ϕ — изоморфизм, то $tb_0 \mathcal{R}^*\, b_0$. Так как $\mathcal{R}^*$ — левая конгруэнция и S — моноид с групповой границей, то $b_0 \mathcal{R}^*\, t^n b_0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, такого что t^n лежит в подгруппе. Пусть s — элемент, обратный к t в этой подгруппе. Тогда $st^nt^n = t^n$, т. е.

$$b_0 = st^n b_0 = st^{n-1} tb_0 = st^{n-1} b_2,$$

откуда следует, что $Sb_2 = Sb_1 = Sb_0$, что и требовалось.

Докажем вторую часть пункта 2). Предположим, что $b \in S$ и bS — минимальный правый идеал. Пусть $Sc \subseteq Sb$. Из минимальности bS получаем, что $bc \mathcal{R}\, b$, и следовательно, $bc \mathcal{R}^*\, b$. По лемме 2.6 $Sbc \cong Sb$. Но $Sbc \subseteq Sc \subseteq Sb$. По 3) имеем $Sbc = Sc = Sb$, что и требовалось доказать.

Для доказательства утверждения 4) заметим, что если Sb — минимальный левый идеал, то $Sb = Sb^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку S — моноид с групповой границей, то $b^n \mathcal{H}\, e$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и некоторого $e \in E$. Следовательно, $Sb^n = Se$. Для правого главного идеала рассуждения двойственны. □

Из предложений 2.3 и 8.2 вытекает следствие 8.3.

Следствие 8.3. *Пусть S — совершенный слева моноид. Тогда S локален и $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.*

Перед тем как сформулировать основной результат раздела, докажем лемму, полученную четвёртым автором и имеющую полезное следствие. Напомним (см. раздел 2), что моноид S удовлетворяет условию конечности правых решений, если

$$\forall\, s \in S\ \exists\, n_s \in \mathbb{N}\ \forall\, t \in S\ |\{x \in S \mid sx = t\}| \leqslant n_s.$$

Лемма 8.4 [3]. *Пусть S — такой моноид, что каждая ультрастепень S как левого S-полигона является проективным левым S-полигоном. Тогда S удовлетворяет условию конечности правых решений.*

Доказательство. Предположим, что существует $t \in S$, для которого условие леммы *не* выполняется. Это означает, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такой элемент $a_n \in S$, что $|\{x \in S \mid tx = a_n\}| > n$. Пусть Φ — неглавный ультрафильтр на $\mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем такие $b_{n,1}, \ldots, b_{n,n} \in S$, что $tb_{n,i} = a_n$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Положим

$$\underline{c_n} = (1, \ldots, 1, b_{n,n}, b_{n+1,n}, b_{n+2,n}, \ldots),$$

где $b_{n,n}$ стоит на n-м месте. Ясно, что $\underline{c_i}/\Phi \neq \underline{c_j}/\Phi$ для любых $i \neq j$, но $t\underline{c_i}/\Phi = \underline{a}/\Phi$, где $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots)$. Поскольку S-полигон $U = S^{\mathbb{N}}/\Phi$ проективен и $\underline{a}/\Phi \in S\underline{c}/\Phi \cong Se$ для некоторого $e \in E$, то существует такой $d \in S$, что множество $A = \{x \in S \mid tx = d\}$ бесконечно.

Выберем кардинал $\alpha > |S|$. По утверждению 4.3 и теореме 4.4 существует такой ультрафильтр Θ на α, что $|A^\alpha/\Theta| = |A|^\alpha > |S|$. Пусть $V = S^\alpha/\Theta$ и $\underline{d} \in S^\alpha$ такой, что $\underline{d}(i) = d$ для всех $i \in \alpha$. Если $\underline{x} \in A^\alpha$, то ясно, что $t\underline{x}/\Theta = \underline{d}/\Theta$. По условию леммы V проективен, следовательно, $\underline{d}/\Theta \in S\underline{g}/\Theta \cong Sf$ для некоторого $f \in E$. Тогда существует такой элемент $u \in S$, что уравнение $tx = u$ имеет более $|S|$ решений в S, что невозможно. Таким образом, S удовлетворяет условию конечности правых решений. □

Следствие 8.5. *Пусть S — такой моноид, что каждая ультрастепень S как левого S-полигона является проективным левым S-полигоном. Тогда для каждого $s \in S$ существует такое $n_s \in \mathbb{N}$, что для любых $P \in \mathcal{P}$ и $t \in P$ выполнено $|\{x \in S \mid sx = t\}| \leqslant n_s$.*

Теперь мы приведём доказательство главного результата этого раздела, которое можно найти в работах первого и четвёртого авторов.

Теорема 8.6 [3, 6, 14]. *Для моноида S следующие условия эквивалентны*:

1) *каждое ультрапроизведение левых S-полигонов S проективно*;
2) *класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем и моноид S совершенен слева*;
3) *класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем.*

Доказательство. Если класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем и моноид S совершенен слева, то по теореме 8.1 класс $\mathcal{P} = \mathcal{SF}$ аксиоматизируем. Ясно, что если класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем, то по теореме 4.2 каждая ультрастепень S проективна.

Предположим, что каждое ультрапроизведение левых S-полигонов S проективно. По теореме 7.3 класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем. Дальнейшее доказательство теоремы разобьём на ряд лемм.

Лемма 8.7 [14]. *Пусть для моноида S каждое ультрапроизведение левых S-полигонов S проективно. Тогда S удовлетворяет условию* $(\mathrm{M_R})$.

Доказательство. Пусть $a_1S \supseteq b_2S \supseteq b_3S \supseteq \ldots$ — убывающая последовательность главных правых идеалов S, т. е. для $i \geqslant 1$ имеем $b_i = b_{i-1}a_i$ для некоторого $a_i \in S$. Полагаем $b_1 = a_1$. Тогда $b_2 = a_1a_2$, $b_3 = b_2a_3 = a_1a_2a_3, \ldots$.

Пусть Φ — неглавный ультрафильтр на $\mathbb{N}$ и $U = S^{\mathbb{N}}/\Phi$. По предположению S-полигон U проективен.

Определим элементы $\underline{u_i} \in S^{\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$, следующим образом:

$$\underline{u_i} = (1, 1, \ldots, 1, a_i, a_ia_{i+1}, a_ia_{i+1}a_{i+2}, \ldots),$$

где a_i стоит на i-м месте. Тогда для любых $i, j \in \mathbb{N}$, если $i < j$, то

$$\underline{u_i}/\Phi = a_ia_{i+1}\cdots a_{j-1}\underline{u_j}/\Phi.$$

Поскольку S-полигон U проективен, то по теореме 3.3 и следствию 3.4 имеем

$$S\underline{u_1}/\Phi \subseteq S\underline{u_2}/\Phi \subseteq \ldots \subseteq S\underline{c}/\Phi,$$

где $\underline{c}/\Phi$ e-сократим слева для некоторого $e \in E$. Пусть $\underline{c} = (c_1, c_2, \ldots)$ и $d_i \in S$ такой, что $\underline{u_i}/\Phi = d_i\underline{c}/\Phi$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Для каждого $i < j$ имеем

$$d_i\underline{c}/\Phi = a_i\cdots a_{j-1}d_j\underline{c}/\Phi,$$

и из e-сократимости слева элемента $\underline{c}/\Phi$ получаем, что

$$d_ie = a_i\cdots a_{j-1}d_je.$$

Выберем $i \in \mathbb{N}$ так, что $a_1\cdots a_i = d_1c_i$ и $ec_i = c_i$. Тогда для любого $j > i$

$$a_1\cdots a_iS = d_1ec_iS = a_1\cdots a_jd_{j+1}ec_iS \subseteq a_1\cdots a_jS \subseteq a_1\cdots a_iS,$$

откуда следует, что

$$b_iS = b_{i+1}S = \ldots,$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 8.8 [3]. *Пусть для моноида S каждое ультрапроизведение левых S-полигонов S проективно. Тогда S удовлетворяет условию* $(\mathrm{M^L})$.

Доказательство. Рассмотрим возрастающую цепь $Sa_1 \subseteq Sa_2 \subseteq \ldots$ главных левых идеалов S. Пусть $u_2, u_3, \ldots \in S$ такие, что $a_i = u_{i+1}a_{i+1}$ для любого $i \geqslant 1$. Тогда для любых i, j, если $i < j$, то $a_i = u_{i+1}u_{i+2}\cdots u_ja_j$. Рассмотрим ультрастепень $U = S^{\mathbb{N}}/\Phi$, где Φ — неглавный ультрафильтр на $\mathbb{N}$. По предположению S-полигон U проективен. Для любого $i \geqslant 2$ определим

$$\underline{v_i}/\Phi = (1, 1, \ldots, 1, u_i, u_iu_{i+1}, u_iu_{i+1}u_{i+2}, \ldots)/\Phi,$$

где u_i стоит на i-м месте. Заметим, что $\underline{v_i}/\Phi = u_i\underline{v_{i+1}}/\Phi$ для любого i и, как и в лемме 8.7, проективность U влечёт существование $\underline{f}/\Phi = (f_1, f_2, \ldots)/\Phi$ и

$s_1, s_2, \ldots \in S$, таких что $\underline{v_k}/\Phi = s_k \underline{f}/\Phi$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого натурального k множество

$$E_k = \{j \in \mathbb{N} \mid j > k,\ u_k u_{k+1} \cdots u_j = s_k f_j\}$$

принадлежит Φ. Для произвольного i положим

$$\underline{g_i}/\Phi = f_i \underline{v_{i+1}}/\Phi = (f_i, \ldots, f_i, f_i u_{i+1}, f_i u_{i+1} u_{i+2}, \ldots)/\Phi.$$

Предположим, что

$$\big\{j \in \mathbb{N} \mid \underline{g_i}/\Phi = \underline{g_j}/\Phi\big\} \notin \Phi$$

для любого $i \in \mathbb{N}$. В этом случае для каждого $i \in \mathbb{N}$ полагаем

$$T_i = \big\{j \in \mathbb{N} \mid \underline{g_i}/\Phi \neq \underline{g_j}/\Phi\big\}.$$

По предположению T_i принадлежит Φ. Выберем $j_1, j_2, \ldots \in \mathbb{N}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &j_1 \in E_2, \\ &j_2 \in E_2 \cap T_{j_1}, && j_2 > j_1, \\ &j_3 \in E_2 \cap T_{j_1} \cap T_{j_2}, && j_3 > j_2 > j_1, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Для любого k

$$\underline{v_2}/\Phi = u_2 u_3 \cdots u_{j_k} \underline{v_{j_k+1}}/\Phi = s_2 f_{j_k} \underline{v_{j_k+1}}/\Phi = s_2 \underline{g_{j_k}}/\Phi.$$

По определению множеств T_i все элементы $\underline{g_{j_k}}/\Phi$ различны. Это противоречит следствию 8.5.

Таким образом, существует такое $i_0 \in \mathbb{N}$, что

$$D = \big\{j \in \mathbb{N} \mid \underline{g_j}/\Phi = \underline{g_{i_0}}/\Phi\big\}$$

принадлежит Φ. Для каждого $k \in D$, такого что $k > i_0$, выберем $j \in D \cap E_k$. Тогда

$$S_j = \big\{m \in \mathbb{N} \mid m > j,\ f_j u_{j+1} \cdots u_m = f_{i_0} u_{i_0+1} \cdots u_m\big\} \in \Phi.$$

Если $m \in S_j$, то

$$\begin{aligned} a_{k-1} = u_k \cdots u_j u_{j+1} \cdots u_m a_m = s_k f_j u_{j+1} \cdots u_m a_m = \\ = s_k f_{i_0} u_{i_0+1} \cdots u_m a_m = s_k f_{i_0} a_{i_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, показано, что в этом случае для любого $k \in D$ со свойством $k > i_0$ левые идеалы Sa_{k-1} и Sa_{i_0} совпадают. Если $l > i_0$ произвольное, то, взяв любое $k \in D$ со свойством $k > l$, получаем, что $Sa_{i_0} \subseteq Sa_l \subseteq Sa_{k-1} = Sa_{i_0}$, следовательно, цепь обрывается, что и требовалось доказать. □

Для завершения доказательства импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) теоремы 8.6 нам понадобится лемма, в доказательстве которой будет использована следующая характеризация условия (A).

Лемма 8.9 [16]. *Моноид S удовлетворяет условию* (A) *тогда и только тогда, когда для любых элементов $a_1, a_2, \ldots$ из S существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для каждого $i \in \mathbb{N}$, $i \geqslant n$, существует $j_i \in \mathbb{N}$, $j_i \geqslant i+1$, удовлетворяющее условию $Sa_i a_{i+1} \cdots a_{j_i} = Sa_{i+1} \cdots a_{j_i}$.*

Лемма 8.10 [14]. *Пусть для моноида S каждое ультрапроизведение левых S-полигонов S проективно. Тогда S удовлетворяет условию* (A).

Доказательство. Пусть $a_i \in S$, $i \in \mathbb{N}$. Определим Φ, U, $\underline{u_i}/\Phi$, d_i $(i \in \mathbb{N})$, $e \in E$ и $\underline{c}/\Phi$ как в доказательстве леммы 8.7. Для любого i имеем $d_i e = a_i d_{i+1} e$, следовательно, $Sd_1 e \subseteq Sd_2 e \subseteq \ldots$. По лемме 8.8 $Sd_n e = Sd_{n+1} e = \ldots$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $e\underline{c}/\Phi = \underline{c}/\Phi$, то $S\underline{u_n}/\Phi = S\underline{u_{n+1}}/\Phi = \ldots$. Пусть $i \geqslant n$. Тогда $\underline{u_{i+1}}/\Phi = s\underline{u_i}/\Phi$ для некоторого $s \in S$. Поскольку ультрафильтр Φ неглавный, то существует такое $j_i \geqslant i+1$, что $a_{i+1} \cdots a_{j_i} = s a_i a_{i+1} \cdots a_{j_i}$. Следовательно, $Sa_{i+1} \cdots a_{j_i} = Sa_i a_{i+1} \cdots a_{j_i}$. По лемме 8.9 S удовлетворяет условию (A). $\square$

Продолжим доказательство теоремы 8.6. Если любая ультрастепень S проективна, то по леммам 8.7 и 8.10 S удовлетворяет условиям ($\mathrm{M_R}$) и (A). По теореме 8.1 S совершенен слева. $\square$

9. Аксиоматизируемость класса $\mathcal{F}r$

Вопрос описания моноидов с аксиоматизируемым классом $\mathcal{F}r$ для некоторых частных случаев был решён в [3] и полностью недавно В. Гоулд.

Для удобства введём некоторую новую терминологию. Пусть $e \in E$ и $a \in S$. Будем говорить, что $a = xy$ является *e-хорошей факторизацией a по x*, если $y \neq wz$ для любых w, z, таких что $e = xw$ и $w \,\mathcal{L}\, e$.

Теорема 9.1. *Для моноида S следующие условия эквивалентны*:

1) *любая ультрастепень левого S-полигона S свободна*;
2) *класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем и S удовлетворяет условию*

   для любого $e \in E \setminus \{1\}$ существует конечное множество $f \subseteq S$, такое что любой элемент $a \in S$ имеет e-хорошую факторизацию по w для некоторого $w \in f$; (∗)

3) *класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем.*

Доказательство. Если класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем, то (1) выполняется. С другой стороны, если (1) выполняется, то по теореме 8.6 класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем и S совершенен слева. По следствию 8.3 S локален. Покажем выполнение (∗).

Пусть $e \in E$, $e \neq 1$. Для любого $a \in S$ имеет место равенство $a = a \cdot 1$. Если $e = av$ и $v \,\mathcal{L}\, e$, то из локальности S следует, что $1 \neq vc$ для любого c.

Предположим противное. Через J обозначим множество конечных подмножеств S. Предположим, что для любого $f \in J$ существует элемент $w_f \in S$, не имеющий e-хорошей факторизации по w ни для какого $w \in f$. Ясно, что S и J бесконечны.

Для каждого $w \in S$ положим

$$J_w = \{f \in J \mid w \in f\}.$$

Поскольку $\{w_1, \ldots, w_n\} \in J_{w_1} \cap \ldots \cap J_{w_n}$, то существует такой ультрафильтр Φ над J, что $J_w \in \Phi$ для всех $w \in S$.

Пусть $U = S^J/\Phi$. По предположению S-полигон U свободен. Пусть $\underline{x} \in S^J$ такой, что $\underline{x}(f) = w_f$. Поскольку U свободен, то по теореме 3.1 и следствию 3.2 $\underline{x}\,/\Phi = w\underline{d}\,/\Phi$ для некоторого w, где $\underline{d}\,/\Phi$ является 1-сократимым справа элементом. Предположим, что $\underline{d}(f) = d_f$ для любого $f \in J$.

Покажем, что

$$D = \{f \in J \mid wd_f \text{ является } e\text{-хорошей факторизацией по } w\} \in \Phi.$$

Предположим противное. Тогда

$$D' = \{f \in J \mid d_f = vz \text{ для некоторых } v,\ z, \text{ таких что } e = wv \text{ и } v \,\mathcal{L}\, e\} \in \Phi.$$

По лемме 8.4 существует конечное число элементов $v_1, \ldots, v_n$, таких что $e = wv_i$ и $v_i \,\mathcal{L}\, e$. Для $1 \leqslant i \leqslant n$ положим

$$D_i = \{f \in J \mid d_f = v_i z \text{ для некоторого } z\}.$$

Тогда $D' = D_1 \cup \ldots \cup D_n$. Следовательно, $D_i \in \Phi$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Мы знаем, что $v_i \,\mathcal{L}\, e$, следовательно, v_i является регулярным и $v_i \,\mathcal{R}\, g$ для некоторого $g \in S$. Так как S локален, то $g \neq 1$. Но $gv_i = v_i$, следовательно, $gd_f = d_f$ для любых $f \in D_i \in \Phi$. Тогда $g\underline{d}\,/\Phi = \underline{d}\,/\Phi$. Поскольку $\underline{d}\,/\Phi$ является 1-сократимым справа, то $g = 1$. Противоречие. Таким образом, $D \in \Phi$.

Пусть

$$T = \{f \in J \colon w_f = wd_f\}.$$

Тогда $T \in \Phi$. Выберем $f \in D \cap T \cap J_w$. Имеем $w \in f$. Так как $f \in T$, то $w_f = wd_f$. Более того, поскольку $f \in D$, то w_f является e-хорошей факторизацией по w. Это противоречит выбору w_f. Таким образом, $(*)$ выполняется.

Предположим, что класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем и S удовлетворяет $(*)$. Через $\Sigma_{\mathcal{P}} = \Sigma_{\mathcal{SF}}$ обозначим множество аксиом для $\mathcal{P}$. Пусть $e \in E$, $e \neq 1$. Выберем конечное множество $f = \{u_1, \ldots, u_n\}$, которое существует в силу $(*)$, такое что каждый $a \in S$ имеет e-хорошую факторизацию по u_i для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Поскольку класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем, то по лемме 8.4 для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует конечное число элементов $v_{i1}, \ldots, v_{im_i} \in L_e$, $m_i \geqslant 0$, таких что $e = u_i v_{ij}$, $1 \leqslant j \leqslant m_i$. Пусть

$$\varphi_{e,i} \leftrightharpoons (\exists\, b)\Bigg(a = u_i b \wedge \Bigg(\bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant m_i} b \neq v_{ij} a\Bigg)\Bigg).$$

Определим ϕ_e следующим образом:

$$(\forall\, a) \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi_{e,i}.$$

Положим

$$\Sigma_{\mathcal{F}r} = \Sigma_{\mathcal{P}} \cup \{\varphi_e \mid e \in E \setminus \{1\}\}.$$

Покажем, что $\Sigma_{\mathcal{F}r}$ является множеством аксиом для $\mathcal{F}r$.

Пусть F — свободный S-полигон. Тогда $F \vDash \Sigma_{\mathcal{P}}$. Предположим, что F свободен над X, $e \in E$, $e \neq 1$, и $a \in F$. Тогда $a = sx$ для некоторого $x \in X$. По выбору элементов $u_1, \ldots, u_n$ имеем, что $s = u_i t$ для некоторого $t \in S$, такого что $t \neq vw$ для любого $w \in S$ и $v \in L_e$ со свойством $e = u_i v$. Положим $b = tx$. Ясно, что $F \vDash \varphi_e$.

Обратно, пусть A — S-полигон и $A \models \Sigma_{\mathcal{F}r}$. Тогда A проективен. Следовательно, A — копроизведение связных компонент вида Sa, где a является e-сократимым справа для некоторого $e \in E$; кроме того, $ea = a$. Предположим, что $e \neq 1$. Поскольку $A \models \varphi_e$, то $a = u_i b$ для некоторого b, такого что $b \neq va$ для любого $v \in L_e$ со свойством $e = u_i v$. Так как $b = wa$ для некоторого $w \in S$, то $a = u_i wa$, следовательно, $e = u_i we$. Ясно, что $e \,\mathcal{L}\, we$ и $b = wa = wea$. Получили противоречие. Таким образом, $e = 1$ и S-полигон A свободен. Аксиоматизируемость класса $\mathcal{F}r$ доказана. □

Для некоторых моноидов можно упростить условия, сформулированные в теореме 9.1. Будем говорить, что группа H_1 обратимых элементов моноида S имеет *конечный правый индекс*, если существуют такие $u_1, \ldots, u_n \in S$, что $S = u_1 H_1 \cup \ldots \cup u_n H_1$. Заметим, что если S к тому же локален, то для любого $e \in E$, $e \neq 1$, каждый элемент $a \in S$ имеет e-хорошую факторизацию по u_i для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Предложение 9.2. *Пусть моноид S удовлетворяет условию*

$$S \setminus R_1 = s_1 S \cup \ldots \cup s_m S$$

для некоторых $s_1, \ldots, s_m \in S$. Тогда класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем в том и только том случае, когда класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем и H_1 имеет конечный правый индекс в S.

Доказательство. Предположим, что класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем и H_1 имеет конечный индекс в S. По теореме 8.6 и следствию 8.3 S локален. Тогда по замечанию перед предложением выполняется условие $(*)$ теоремы 9.1. Следовательно, класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем.

Обратно, если класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем, то по теореме 9.1 необходимо только показать, что H_1 имеет конечный индекс. Предположим противное, т. е. в S существуют такие $a_1, a_2, \ldots$, что $a_i H_1 \cap a_j H_1 = \varnothing$ для любых $i \neq j$. Пусть Φ — однородный ультрафильтр на $\mathbb{N}$, $U = S^{\mathbb{N}}/\Phi$ и элемент $\underline{a} \in S^{\mathbb{N}}$ такой, что $\underline{a}(i) = a_i$. Поскольку S-полигон U свободен, то $\underline{a}/\Phi = w\underline{d}/\Phi$ для некоторого 1-сократимого справа элемента $\underline{d}/\Phi$, порождающего связную компоненту, в которой лежит $\underline{a}/\Phi$. Пусть $\underline{d}(i) = d_i$.

По теореме 9.1 и следствию 8.3 моноид S локален, т. е. $R_1 = H_1$. Следовательно, $\mathbb{N} = T_1 \cup \ldots \cup T_m \cup T$, где $T_i = \{i \in \mathbb{N} \mid d_i \in s_i S\}$ и $T = \{i \in \mathbb{N} \mid d_i \in H_1\}$. Если $T_i \in \Phi$, то $\underline{d}/\Phi = s_i \underline{f}/\Phi$ для некоторого $\underline{f}/\Phi$. Но $\underline{f}/\Phi = v\underline{d}/\Phi$, поэтому, так как $\underline{d}/\Phi$ является 1-сократимым справа, получаем $1 = s_i v$, противоречие. Следовательно, $T \in \Phi$. Пусть $D = \{i \in \mathbb{N} \colon a_i = wd_i\}$. Выберем различные $i, j \in D \cap T$. Тогда $a_i = wd_i$, $a_j = wd_j$, и следовательно,

$$a_i H_1 = wd_i H_1 = wH_1 = wd_j H_1 = a_j H_1,$$

противоречие. Таким образом, H_1 имеет конечный индекс в S. □

Из последнего предложения непосредственно выводится следствие.

Следствие 9.3 [3]. *Пусть S — инверсный моноид. Тогда класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем в том и только том случае, когда класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем и H_1 имеет конечный правый индекс в S.*

Доказательство. Достаточность доказывается как в предложении 9.2.

Предположим, что класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем. Поскольку S удовлетворяет условию $(\mathrm{M_R})$, то мы можем выбрать минимальный главный правый идеал. Так как S регулярен, то он порождается идемпотентом $e \in E$. Для любого $f \in E$ имеем $eS = efS$, т. е. $e\,\mathcal{R}\,ef$. Но S инверсный, следовательно, E — полурешётка и каждый $\mathcal{R}$-класс содержит единственный идемпотент. Следовательно, $e = ef$ для всех $f \in E$. По лемме 8.4 множество E конечно. Поскольку каждый главный правый идеал порождается идемпотентом, S содержит только конечное число главных правых идеалов. Результат следует из предложения 9.2. □

10. Полнота, модельная полнота и категоричность

В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения из теории моделей. Напоминаем читателю, что всюду в данной работе L — язык первого порядка.

Элементарная теория, или просто *теория*, языка первого порядка L — это множество предложений T языка L, замкнутое относительно выводимости. Напоминаем (см. раздел 4), что L-структура $\mathbf{A}$, в которой все предложения теории T истинны, называется *моделью* теории T; используется обозначение $\mathbf{A} \models T$. Теория T называется *непротиворечивой*, если для любого предложения $\varphi \in L$ либо φ, либо $\neg\varphi$ не принадлежит T. Непротиворечивая теория T называется *полной*, если $\varphi \in T$ или $\neg\varphi \in T$ для любого предложения φ языка L. По *обобщённой теореме о полноте* (см. [8, теорема 1.3.21]) теория T непротиворечива тогда и только тогда, когда она имеет модель. Ясно, что для любой L-структуры $\mathbf{A}$ *теория* $\mathrm{Th}(\mathbf{A})$ *L-структуры* $\mathbf{A}$, определяемая как

$$\mathrm{Th}(\mathbf{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ — предложение, } \mathbf{A} \models \varphi\},$$

является полной непротиворечивой теорией и для класса L-структур $\mathcal{K}$ теория

$$\mathrm{Th}(\mathcal{K}) = \bigcap_{\mathbf{A} \in \mathcal{K}} \mathrm{Th}(\mathbf{A})$$

непротиворечива.

Структуры $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ языка L называются *элементарно эквивалентными* (обозначение $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$), если $\mathrm{Th}(\mathbf{A}) = \mathrm{Th}(\mathbf{B})$. Один из основных принципов теории моделей гласит, что если T — теория и φ — такое предложение, что $\varphi \notin T$, то теория $T \cup \{\neg\varphi\}$ непротиворечива и, следовательно, имеет модель. Таким образом, имеет место следующая лемма.

Лемма 10.1. *Непротиворечивая теория T полна тогда и только тогда, когда $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ для любых моделей $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ теории T.*

В предыдущих разделах мы рассматривали аксиоматизируемые классы S-полигонов. Заметим, что для аксиоматизируемого множеством предложений T класса $\mathcal{K}$ имеет место равенство $\mathrm{Th}(\mathcal{K}) = T$.

Для L-структуры $\mathbf{A}$ с универсумом A и подмножества B множества A мы часто будем рассматривать язык L_B (*обогащение* языка L), который получается из языка L добавлением множества констант $\{b' \mid b \in B\}$, где $b'_1 \neq b'_2$ для различных b_1 и b_2 из B. Обозначим через $\mathbf{A}_B$ соответствующее обогащение L-структуры $\mathbf{A}$ до L_B-структуры, получаемое из $\mathbf{A}$ интерпретацией константы b', где $b \in B$, элементом b. Через $\mathrm{Th}(\mathbf{A}, b)_{b\in B}$ обозначим множество предложений языка L_B, истинных в $\mathbf{A}_B$.

Ещё одним полезным для нас инструментом будет понятие *диаграммы* L-структуры $\mathbf{A}$ (обозначение $\mathrm{Diag}\,\mathbf{A}$). $\mathrm{Diag}\,\mathbf{A}$ — это множество атомарных формул и отрицаний атомарных формул языка L_A, истинных в $\mathbf{A}_A$. По [8, предложение 2.1.8] L-структура $\mathbf{A}$ вкладывается в L-структуру $\mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{B}$ имеет обогащение до языка L_A, причём $\mathbf{B}_A$ является моделью $\mathrm{Diag}\,\mathbf{A}$.

Мы будем использовать стандартное сокращение $\bar{x} \in X$ вместо $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, где $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$. Подструктура $\mathbf{A}$ L-структуры $\mathbf{B}$ называется *элементарной* (обозначение $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$), если для любой формулы $\varphi(\bar{x})$ языка L и любого кортежа $\bar{a} \in A$

$$\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a}) \Longleftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi(\bar{a}).$$

Заметим, что в этом определении условие «$\Longleftrightarrow$» может быть заменено на условие «$\Longleftarrow$» или «$\Longrightarrow$» (достаточно перейти к отрицаниям формул, имея в виду при этом, что для любой L-структуры $\mathbf{C}$ теория $\mathrm{Th}(\mathbf{C}, c)_{c\in C}$ полна). Легко убедиться, что для подструктуры $\mathbf{A}$ L-структуры $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B} \Longleftrightarrow \mathbf{B}_A \models \mathrm{Th}(A, a)_{a\in A}.$$

Теперь мы можем сформулировать важный результат, известный как теорема Лёвенгейма—Сколема—Тарского «вверх» и «вниз».

Теорема 10.2 [8, следствие 2.1.6, теорема 3.1.6]. *Пусть T — теория языка L, имеющая бесконечную модель. Тогда для любого кардинала $\varkappa \geqslant |L|$ теория T имеет модель $\mathbf{A}$, такую что $|A| = \varkappa$.*

Если $\mathbf{B}$ — такая модель теории T, что $|B| = \varkappa \geqslant \alpha \geqslant |L|$ и $X \subseteq B$, $|X| \leqslant \alpha$, то существует элементарная подструктура $\mathbf{C}$ структуры $\mathbf{B}$ (очевидно, $\mathbf{C} \models T$), такая что $X \subseteq C$ и $|C| = \alpha$.

Непротиворечивая теория T языка L называется *модельно полной*, если

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Longrightarrow A \preccurlyeq \mathbf{B}$$

для любых моделей $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ теории T.

Лемма 10.3 [8, предложение 3.1.9]. *Пусть теория T модельно полна и любые две модели T изоморфно вкладываются в некоторую третью модель этой теории. Тогда теория T полна.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — модели теории T. По предположению существует модель $\mathbf{C}$ теории T, такая что $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в неё изоморфно вкладываются. Поскольку теория T модельно полна, то $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{C}$ и $\mathbf{B} \preccurlyeq \mathbf{C}$, т. е. $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, и из леммы 10.1 следует полнота T. $\square$

Для формулы φ языка L запись $\varphi(\bar{x})$ означает, что все свободные переменные формулы φ содержатся в $\bar{x}$. Будем также писать $\varphi(\bar{x};\bar{y})$, если все свободные переменные формулы φ содержатся в объединении различных кортежей $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Формула вида $(\exists\,\bar{x})\psi(\bar{x};\bar{y})$, где $\psi(\bar{x};\bar{y})$ — бескванторная формула, называется *экзистенциальной*. Структура $\mathbf{A}$ класса $\mathcal{K}$ L-структур называется *экзистенциально замкнутой в* $\mathcal{K}$, если для любого расширения $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ структуры $\mathbf{A}$ и любой экзистенциальной формулы $(\exists\,\bar{x})\varphi(\bar{x};\bar{a})$, где $\bar{a} \in A$, справедливо, что если $\mathbf{B} \models (\exists\,\bar{x})\varphi(\bar{x};\bar{a})$, то $\mathbf{A} \models (\exists\,\bar{x})\varphi(\bar{x};\bar{a})$.

Теорема 10.4 [8, утверждение 3.1.7]. *Теория T модельно полна тогда и только тогда, когда для любых моделей $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ теории T, если $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, то для любой экзистенциальной формулы $(\exists\,\bar{y})\psi(\bar{y})$ языка L_A*

$$\mathbf{B}_A \models (\exists\,\bar{y})\psi(\bar{y}) \Longrightarrow \mathbf{A}_A \models (\exists\,\bar{y})\psi(\bar{y}).$$

Пусть $\varkappa$ — кардинал. Напомним, что теория T языка L называется *категоричной в мощности $\varkappa$* или *$\varkappa$-категоричной*, если существует модель теории T мощности $\varkappa$ и любые две модели этой теории мощности $\varkappa$ изоморфны. Следующий результат известен как *тест Лося—Вота*; его доказательство сразу же следует из теоремы Лёвенгейма—Сколема—Тарского.

Предложение 10.5 [8, предложение 3.1.10]. *Предположим, что теория T непротиворечива, имеет лишь бесконечные модели и $\varkappa$-категорична для некоторой мощности $\varkappa \geqslant |L|$. Тогда T полна.*

Определение категоричности, полноты и модельной полноты для класса L-структур необходимо давать достаточно аккуратно, различая теорию класса структур и теорию класса бесконечных структур. Класс $\mathcal{K}$ L-структур называется *категоричным в мощности $\varkappa$* или *$\varkappa$-категоричным*, если все структуры класса $\mathcal{K}$ мощности $\varkappa$ изоморфны. Класс $\mathcal{K}$ называется *категоричным*, если $\mathcal{K}$ категоричен в некоторой мощности $\varkappa \geqslant |L|$.

Пусть $\mathcal{K}$ — класс L-структур. Через $\mathcal{K}_\infty$ обозначим класс бесконечных структур класса $\mathcal{K}$. Класс $\mathcal{K}$ называется *полным* (*модельно полным*), если теория $\mathrm{Th}(\mathcal{K}_\infty)$ бесконечных структур этого класса полна (модельно полна).

Лемма 10.6. *Пусть $\mathcal{K}$ — аксиоматизируемый класс L-структур языка L, T — теория этого класса. Для $n \in \mathbb{N}$ через φ_n обозначим предложение*

$$\varphi_n \leftrightharpoons (\exists\, x_1, \ldots, x_n) \bigwedge_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} (x_i \neq x_j),$$

и пусть T_∞ — замыкание относительно выводимости множества $T \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тогда T_∞ является системой аксиом для $\mathcal{K}_\infty$, т. е. $\mathrm{Th}(\mathcal{K}_\infty) = T_\infty$.

Лемма 10.7. *Пусть $\mathcal{K}$ — аксиоматизируемый класс L-структур языка L, $\varkappa$ — бесконечный кардинал, $\varkappa \geqslant |L|$.*

1. *Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно объединения возрастающих цепей, то существует такая экзистенциально замкнутая структура $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, что $|\mathbf{A}| = \varkappa$.*
2. *Если существует бесконечная структура класса $\mathcal{K}$, не являющаяся экзистенциально замкнутой, то существует такая структура $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, что $|\mathbf{A}| = \varkappa$ и $\mathbf{A}$ не экзистенциально замкнута.*

Доказательство. 1. Заметим, что для любой L-структуры $\mathbf{A}$ и экзистенциальной формулы с параметрами из $\mathbf{A}$, истинной в $\mathbf{A}$, эта формула истинна в любой L-структуре $\mathbf{B}$, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. По теореме 10.2 существует L-структура $\mathbf{A}_0 \in \mathcal{K}$, для которой $|\mathbf{A}_0| = \varkappa$.

Пусть $\{(\exists\,\bar{x})\varphi_i(\bar{x}; \bar{a}) \mid i < \varkappa\}$ — все экзистенциальные формулы языка L_{A_0}. Определим L-структуры $\mathbf{B}_i \in \mathcal{K}$, $0 \leqslant i < \varkappa$, индуктивно. Положим $\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0$. Если $\mathbf{B}_i \models (\exists\,\bar{x})\varphi_i(\bar{x}; \bar{a})$, то положим $\mathbf{B}_{i+1} = \mathbf{B}_i$. Если $\mathbf{B}_i \models \neg(\exists\,\bar{x})\varphi_i(\bar{x}; \bar{a})$ и не существует такой структуры $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, что $\mathbf{B} \supset \mathbf{B}_i$ и $\mathbf{B} \models (\exists\,\bar{x})\varphi_i(\bar{x}; \bar{a})$, то также положим $\mathbf{B}_{i+1} = \mathbf{B}_i$. С другой стороны, если найдётся такая структура $\mathbf{B} \supset \mathbf{B}_i$, что $\mathbf{B} \models (\exists\,\bar{x})\varphi_i(\bar{x}; \bar{a})$, положим $\mathbf{B}'_{i+1} = \mathbf{B}$. По теореме 10.2 существует элементарная подструктура $\mathbf{B}_{i+1}$ L-структуры $\mathbf{B}'_{i+1}$, такая что $B_i \subseteq B_{i+1}$ и $|B_{i+1}| = \varkappa$. Очевидно, $\mathbf{B}_{i+1} \models (\exists\,\bar{x})\varphi_i(\bar{x}; \bar{a})$. Для предельного ординала α пусть $\mathbf{B}_\alpha = \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathbf{B}_i$. Поскольку класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно объединения возрастающих цепей, то $\mathbf{B}_\varkappa$ принадлежит $\mathcal{K}$, $|B_\varkappa| = \varkappa$ и $\mathbf{B}_\varkappa$ удовлетворяет условию

> для любой экзистенциальной формулы φ с параметрами из структуры $\mathbf{A}_0$, если φ истинна в некоторой структуре $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{B}_\varkappa$, то φ истинна в $\mathbf{B}_\varkappa$. $(*)$

Пусть $\mathbf{A_1} = \mathbf{B}_\varkappa$. Продолжая эту процедуру, мы получим возрастающую цепь L-структур класса $\mathcal{K}$ мощности $\varkappa$

$$\mathbf{A}_0 \subseteq \mathbf{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{A}_n \subseteq \ldots,$$

где каждая пара структур $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{A}_{n+1}$, $n \in \omega$, удовлетворяет условию $(*)$ с заменой $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_1$ на $\mathbf{A}_n$ и $\mathbf{A}_{n+1}$ соответственно. Ясно, что структура $\mathbf{A} = \bigcup\{\mathbf{A}_n \mid n \in \omega\} \in \mathcal{K}$ экзистенциально замкнута и $|\mathbf{A}| = \varkappa$.

2. Пусть $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{B}_0$ — бесконечные структуры класса $\mathcal{K}$, такие что $\mathbf{A}_0 \subseteq \mathbf{B}_0$ и для них существует экзистенциональная формула $(\exists\,\bar{x})\varphi(\bar{x}; \bar{a})$, где $\bar{a} \subseteq A$ такой, что $\mathbf{A}_0 \models \neg(\exists\,x)\bar{\varphi}(\bar{x}; \bar{a})$ и $\mathbf{B}_0 \models (\exists\,x)\bar{\varphi}(\bar{x}; \bar{a})$. Формулу $(\exists\,\bar{x})\varphi(\bar{x}; \bar{a})$ можно

рассматривать как предложение языка $L_{\bar{a}}$. Заметим, что $\varkappa \geqslant |L_{\bar{a}}|$. По предложению 4.3 и теореме 4.4 существует ультрафильтр D над $\varkappa$, такой что $|\mathbf{A}| \geqslant \varkappa$, где $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0^{\varkappa}/D$. Тогда $\mathbf{A} \models \neg(\exists\, x)\bar{\varphi}(\bar{x};\bar{a})$ и $\mathbf{B} \models (\exists\, x)\bar{\varphi}(\bar{x};\bar{a})$, где $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0^{\varkappa}/D$; кроме того $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$.

По [8, теорема 3.1.6] существует элементарная подструктура $\mathbf{E} \preccurlyeq \mathbf{A}$ мощности $\varkappa$. Ясно, что $\mathbf{E} \models \neg(\exists\, \bar{x})\varphi(\bar{x};\bar{a})$, $\mathbf{E} \in \mathcal{K}$ и $\mathbf{E}$ не является экзистенциально замкнутой. $\square$

Следующий результат известен как теорема Линдстрёма.

Теорема 10.8 [8, теорема 3.1.12]. *Пусть класс $\mathcal{K}$ бесконечных L-структур аксиоматизируем, категоричен в некоторой бесконечной мощности $\varkappa \geqslant |L|$ и замкнут относительно объединения возрастающих цепей. Тогда класс $\mathcal{K}$ является модельно полным.*

Доказательство. Ясно, что свойство экзистенциальной замкнутости сохраняется при изоморфизме. Так как в мощности $\varkappa$ все структуры класса $\mathcal{K}$ изоморфны, то по лемме 10.7 все бесконечные структуры класса $\mathcal{K}$ являются экзистенциально замкнутыми. По теореме 10.4 класс $\mathcal{K}$ модельно полон. $\square$

11. Полнота $\mathcal{SF}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}r$

В этом разделе мы изучаем моноиды с аксиоматизируемыми полными и модельно полными классами сильно плоских, проективных и свободных S-полигонов. Результаты этого раздела полностью содержатся в [3].

Теорема 11.1. *Пусть S — коммутативный моноид и класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *класс $\mathcal{SF}$ полон*;
2) *класс $\mathcal{SF}$ модельно полон*;
3) *класс $\mathcal{SF}$ категоричен*;
4) $\mathcal{SF} = \mathcal{F}r$;
5) *S — абелева группа.*

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) следует из леммы 10.3 и замкнутости класса $\mathcal{SF}$ относительно операции копроизведения. Импликация 4) $\Longrightarrow$ 2) следует из теоремы 10.8, 3) $\Longrightarrow$ 1) есть следствие утверждения 10.5. Ясно, что любые два свободных S-полигона мощности $\alpha > |L|$ изоморфны, отсюда получаем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 3). Эквивалентность 4) $\Longleftrightarrow$ 5) является непосредственным следствием [17, теорема 2.6].

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 5). Зафиксируем $a \in A$. Достаточно доказать, что $Sa = S$. Пусть Φ — однородный ультрафильтр на ω. Для $k \in \mathbb{Z}$ определим $f_k \in S^\omega$ следующим образом:

$$f_k(i) = \begin{cases} a^{k+i}, & \text{если } k+i > 0, \\ 1, & \text{если } k+i \leqslant 0. \end{cases}$$

Покажем, что левый S-полигон $U = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} Sf_k/\Phi$, являющийся подполигоном левого S-полигона S^ω/Φ, сильно плоский. Так как $f_k/\Phi = af_{k-1}/\Phi$, то $Sf_k/\Phi \subseteq Sf_{k-1}/\Phi$. Предположим, что $r\,g_1/\Phi = s\,g_2/\Phi$, где $r, s \in S$, $g_1/\Phi, g_2/\Phi \in U$. Существует такое $k \in \mathbb{Z}$, что $g_1/\Phi, g_2/\Phi \in S\,f_k/\Phi$, т. е. $g_1/\Phi = t_1\,f_k/\Phi$, $g_2/\Phi = t_2\,f_k/\Phi$ для некоторых $t_1, t_2 \in S$. Следовательно, существует $i \in \omega$, такое что $i + k > 0$, $r\,g_1(i) = s\,g_2(i)$, $g_1(i) = t_1 f_k(i) = t_1 a^{k+i}$, $g_2(i) = t_2 f_k(i) = t_2 a^{k+i}$. Таким образом, $rt_1a^{k+i} = st_2a^{k+i}$, $g_1/\Phi = t_1\,a^{k+i}f_{-i}/\Phi$, $g_2/\Phi = t_2a^{k+i}\,f_{-i}/\Phi$. Это означает, что U удовлетворяет условию (P). Аналогично доказывается, что U удовлетворяет условию (E). По теореме 3.5 отсюда следует, что U сильно плоский.

Так как S — коммутативный моноид, то

$$\coprod_{i\in\omega} U_i \models (\forall\, x)(\exists\, y)(x = ay),$$

где U_i — копии левого S-полигона U, $i \in \omega$. Поскольку класс $\mathcal{SF}$ полон и $S \in \mathcal{SF}$, то

$$\coprod_{i\in\omega} S_i \models (\forall\, x)(\exists\, y)(x = ay),$$

где S_i — копии левого S-полигона S, $i \in \omega$. Следовательно, $aS = S$. □

Теорема 11.2. *Пусть S — моноид, для которого класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *класс $\mathcal{P}$ полон*;
2) *класс $\mathcal{P}$ модельно полон*;
3) *класс $\mathcal{P}$ категоричен*;
4) $\mathcal{P} = \mathcal{F}r$;
5) *S — группа.*

Доказательство. Заметим, что если S — группа, то опять же из [17] следует, что $\mathcal{SF} = \mathcal{P} = \mathcal{F}r$. Так же, как и в доказательстве теоремы 11.1, достаточно доказать импликацию 1) $\Longrightarrow$ 5). Из аксиоматизируемости класса $\mathcal{P}$ и теоремы 8.1 следует, что S — совершенный слева моноид и S удовлетворяет условию $(\mathrm{M_R})$. Следовательно, в S существует минимальный правый идеал, который по пункту 4) утверждения 8.2 имеет вид eS для некоторого $e \in E$. По пункту 2) утверждения 8.2 левый идеал Se минимален. Ясно, что $Se \in \mathcal{P}$.

Поскольку S локален, то 1 является *единственным* идемпотентом в $\mathcal{R}$-классе и в $\mathcal{L}$-классе с представителем 1. Предположим, что $e \neq 1$, т. е. $Se \subset S$ и $eS \subset S$.

Для любого $a \in S$ полагаем

$$X_a = \{x \in S \mid ex = a\}.$$

По лемме 8.4 каждое множество X_a является конечным подмножеством L_e. Пусть $X_e \cap Se = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Возьмём произвольное $t \in Se$.

Покажем, что $|X_{et} \cap Se| = n$. Ясно, что $a_i t \in X_{et} \cap Se$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Так как $Se = Sa_i$ — минимальный левый идеал, то по утверждению 8.2 правый идеал $a_i S$ минимален для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Предположим, что $a_i t = a_j t$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Поскольку правые идеалы $a_i S$ и $a_j S$ минимальны, то $a_i S = a_j S$. Следовательно, $a_j = a_i k$ для некоторого $k \in S$. Так как $ea_i = ea_j = e$, то $ek = ea_i k = ea_j = e$, т. е. $ek = e$. Так как $Se = Sa_i$, то $a_i = se$, следовательно, $a_j = a_i k = a_i ek = a_i e = a_i$. Тогда $|\{a_1 t, \ldots, a_n t\}| = n$.

Предположим, что существует $c \in X_{et} \cap Se$, такой что $c \neq a_i t$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Поскольку $c = ce$ и левый идеал Se минимален, то $Se = Sce = Sc$, т. е. левый идеал Sc также является минимальным. Следовательно, $Sc = Sec$ и $c = lec$ для некоторого $l \in S$. В силу минимальности eS выполняется равенство $eS = ecS$. Следовательно, существует $d \in cS$, такой что $ed = e$ и $d = cr$, где $r \in S$. Предположим, что $d \in Se$. Тогда $d = a_i$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Из равенств $ecrt = edt = ea_i t = et = ec$ следует, что $ecrt = ec$. Умножим это равенство на l слева. Тогда $crt = c$, т. е. $c = a_i t$. Это противоречит выбору c. Таким образом, $d \in (X_e \cup cS) \setminus Se$. Так как $d = cr$, то $ecr = ed = e = ecre$. Умножим это равенство на l слева. Тогда $cr = cre$, т. е. $d \in Se$, что не так.

Таким образом, $X_{et} \cap Se = \{a_1 t, \cdots, a_n t\}$ и $a_i t \neq a_j t$ при $i \neq j$ для любого $t \in Se$. Следовательно, $Se \models \psi$, где

$$\psi \risingdotseq (\forall x)\biggl(ex = x \to \biggl(\exists (y_1, \ldots, y_n)\biggl(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} (ey_i = x) \wedge \biggl(ey = x \to \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant n} y = y_i\biggr)\biggr)\biggr)\biggr).$$

Поскольку класс $\mathcal{P}$ полон, то

$$A = \coprod_{i \in \omega} Se_i \equiv B = \coprod_{i \in \omega} S_i,$$

где S_i, Se_i, $i \in \omega$, — копии левых S-полигонов S и Se соответственно. Поскольку $A \models \psi$, то $B \models \psi$. В частности, существует ровно n решений уравнения $ey = e$; но $|X_e \cap Se| = n$ и $1 \in X_e \setminus Se$, противоречие. Следовательно, $e = 1$. Так как каждый главный правый идеал содержит минимальный правый идеал, то $aS = S$ для любого $a \in S$. Поскольку S — минимальный правый идеал, то по утверждению 8.2 S является также минимальным левым идеалом, следовательно, $Sa = S$ для любого $a \in S$. Таким образом, S — группа. □

Последний результат этого раздела следует непосредственно из определения свободного левого S-полигона.

Предложение 11.3. *Пусть S — моноид, для которого класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем. Тогда $\mathcal{F}r$ является категоричным, полным и модельно полным.*

12. Стабильность

Пусть T — непротиворечивая теория языка L, $\{x_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ — фиксированное множество переменных, $L_n = L_{\{x_1, \ldots, x_n\}}$. Непротиворечивое множество предложений p языка L_n называется *n-типом языка L*. Если теория $p \cup T$ непротиворечива, т. е. имеет модель, то p называется *полным n-типом*, если к тому же $T \subseteq p$, то говорим, что p является *полным n-типом над T*. Множество всех полных n-типов над T обозначается $S_n(T)$.

Пусть $\mathbf{A}$ — L-структура, $X \subseteq A$, $a \in A$. Множество

$$\mathrm{tp}(a, X) = \{\varphi(x) \in L_X \mid \mathbf{A} \models \varphi(a)\}$$

называется *типом элемента a над X*. Нетрудно понять, что $\mathrm{tp}(a, X)$ — полный 1-тип над $\mathrm{Th}(\mathbf{A}, x)_{x \in X}$; будем говорить, что он *реализуется* элементом a. Через $S_n(X)$ обозначим $S_n(\mathrm{Th}(\mathbf{A}, x)_{x \in X})$. Часто вместо $S_1(X)$ мы будем писать $S(X)$.

Полная теория T, не содержащая конечных моделей, называется *стабильной в мощности $\varkappa$* или *$\varkappa$-стабильной*, если $|S(X)| \leqslant \varkappa$ для любой модели $\mathbf{A}$ теории T и любого множества $X \subseteq A$ мощности $\varkappa$. Если теория T $\varkappa$-стабильна для некоторого бесконечного $\varkappa$, то T называется *стабильной*. Если теория T $\varkappa$-стабильна для всех $\varkappa \geqslant 2^{|T|}$, то T называется *суперстабильной*. Если теория T не является стабильной, то T называется *нестабильной*.

Морли в [20] доказал, что счётная ω-стабильная теория T стабильна во всех бесконечных мощностях. Если произвольная теория T языка L является ω-стабильной, то $|S_n(T)| \leqslant \omega$ для всех $n \in \omega$. Это означает, что теория T существенно счётна в следующем смысле. Существует такой язык $L' \subseteq L$, что $|L'| = \omega$ и для любой формулы φ языка L существует формула φ' языка L', такая что $\mathbf{A} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{A} \models \varphi'$ для любой L-структуры $\mathbf{A}$ языка L, $\mathbf{A} \models T$. Тогда из результата Морли следует, что ω-стабильная теория T стабильна во всех бесконечных мощностях.

Для наших исследований будет полезным понятие монстр-модели. Для определения этой модели нам понадобятся понятия насыщенности и однородности: L-структура $\mathbf{A}$ называется *$\varkappa$-однородной*, где $\varkappa$ — кардинал, если для любого $X \subseteq A$, $|X| < \varkappa$, любое отображение $f\colon X \to A$, такое что

$$\mathrm{tp}(\mathbf{A}, x)_{x \in X} = \mathrm{tp}\big(\mathbf{A}, f(x)\big)_{x \in X},$$

можно продолжить до автоморфизма $\mathbf{A}$; L-структура $\mathbf{A}$ называется *$\varkappa$-насыщенной*, где $\varkappa$ — кардинал, если для любого $X \subseteq A$, $|X| < \varkappa$, любой тип $p \in S(\mathrm{Th}(\mathbf{A}, x)_{x \in X})$ реализуется в $\mathbf{A}$.

Предположим, что T — полная теория языка L. Пусть кардинал $\bar{\varkappa}$ больше всех рассматриваемых кардиналов и $\mathbf{M}$ — $\bar{\varkappa}$-насыщенная и $\bar{\varkappa}$-однородная модель теории T. Удобно считать, что все рассматриваемые модели теории T имеют мощность строго меньше, чем $\bar{\varkappa}$, и являются элементарными подструктурами структуры $\mathbf{M}$ и все рассматриваемые множества параметров имеют мощность строго меньше, чем $\bar{\varkappa}$, и являются подмножествами множества M. Таким образом, если $\mathbf{A}$ — модель теории T, $X \subseteq A$ и $a \in A$, то

$$\mathrm{tp}(a, X) = \{\varphi(x) \in L_X \mid \mathbf{M} \models \varphi(a)\}.$$

Модель $\mathbf{M}$ называется *монстр-моделью* теории T. Следующий результат можно найти в монографиях, содержащих стандартные сведения по теории стабильности, например в [21].

Лемма 12.1. *Пусть T — полная теория языка L с монстр-моделью $\mathbf{M}$, и пусть X — подмножество M. Предположим также, что $\bar{a}, \bar{a}' \subseteq M$. Тогда $\mathrm{tp}(\bar{a}, X) = \mathrm{tp}(\bar{a}', X)$ в том и только том случае, если существует автоморфизм $\mathbf{M}$, действующий тождественно на X и отображающий $\bar{a}$ в $\bar{a}'$.*

Пусть S — моноид и $\mathcal{K}$ — класс левых S-полигонов. Тогда S называется *$\mathcal{K}$-стабилизатором* (*$\mathcal{K}$-суперстабилизатором*, *$\mathcal{K}$-ω-стабилизатором*), если теория $\mathrm{Th}(A)$ стабильна (суперстабильна, ω-стабильна) для любого бесконечного левого S-полигона $A \in \mathcal{K}$. Если $\mathcal{K}$ — класс всех левых S-полигонов, то $\mathcal{K}$-стабилизатор ($\mathcal{K}$-суперстабилизатор, $\mathcal{K}$-ω-стабилизатор) называется стабилизатором (суперстабилизатором, ω-стабилизатором).

13. Суперстабильность $\mathcal{SF}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}r$

Мы начинаем рассматривать вопросы стабильности для S-полигонов. Результаты, представленные в этом разделе, можно найти в [4].

Лемма 13.1. *Пусть моноид S удовлетворяет условию конечности правых решений. Тогда для любых $A \in \mathcal{SF}$, $a \in A$, $s \in S$*

$$|\{x \in A \mid sx = a\}| \leqslant n_s.$$

Доказательство. Предположим, что существуют такие $A \in \mathcal{SF}$, $s \in S$ и $a_0, \ldots, a_{n_s} \in A$, что $sa_i = sa_j$, $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$. Индукцией по $n \leqslant n_s$ покажем, что существуют такие $b \in A$, $r_0, \ldots, r_n \in S$, что $a_i = r_i b$, $sr_i = sr_j$ для любых $i, j \in \{0, \ldots, n\}$. Пусть $n = 1$. Поскольку $A \in \mathcal{SF}$, то существуют такие $r'_0, r'_1 \in S$ и $b' \in A$, что $sr'_0 = sr'_1$, $a_0 = r'_0 b'$ и $a_1 = r'_1 b'$. Предположим, что существуют такие $r''_0, \ldots, r''_{n-1} \in S$ и $b'' \in A$, что $sr''_i = sr''_j$ и $a_i = r''_i b''$ для любых $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Так как $A \in \mathcal{SF}$, то существуют такие $r, r_n \in S$ и $b \in A$, что $sr''_0 r = sr_n$, $b'' = rb$ и $a_n = r_n b$. Положим $r_i = r''_i r$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Тогда $a_i = r''_i b'' = r''_i rb = r_i b$, $sr_i = sr''_i r = sr''_j r = sr_j$ для любых $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Таким образом, существуют такие $r_0, \ldots, r_{n_s} \in S$, что $r_i \neq r_j$ $(i \neq j)$ и $sr_i = sr_j$ для любых $i, j \in \{0, \ldots, n_s\}$. Но S удовлетворяет условию конечности правых решений, противоречие. $\square$

Лемма 13.2. *Пусть моноид S удовлетворяет условию конечности правых решений, $B \in \mathcal{SF}$, $B \preccurlyeq C$. Тогда $\bigcup\limits_{c \in C \setminus B} Sc \cap B = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим, что условия леммы выполняются и $b \in \bigcup\limits_{c \in C \setminus B} Sc \cap B$. Тогда существуют такие $c_1 \in C \setminus B$ и $s \in S$, что $b = sc_1$. Формулу

$$(\exists\, x_1, \ldots, x_k)\Big(\bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant k} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant k} y = sx_i\Big)$$

обозначим через $\varphi_k(y)$.

Ясно, что $C \models \varphi_1(b)$. Индукцией по k покажем, что $C \models \varphi_k(b)$ для любого $k \geqslant 1$. Пусть $k \geqslant 1$ и $C \models \varphi_k(b)$, т. е. $b = sc_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, где $c_1, \ldots, c_k$ — различные элементы C. Поскольку B — элементарная подструктура C, то $B \models \varphi_k(b)$, т. е. $b = sb_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, где $b_1, \ldots, b_k$ — различные элементы B. Поскольку $sc_1 = b$ и $c_1 \notin B$, то $C \models \varphi_{k+1}(b)$. Таким образом, $C \models \varphi_k(b)$ для любых $k \geqslant 1$. Так как B — элементарная подструктура C, то $B \models \varphi_k(b)$ для любых $k \geqslant 1$. Это противоречит лемме 13.1. □

Лемма 13.3. *Пусть моноид S удовлетворяет условию конечности правых решений, $B \in \mathcal{SF}$, $B \preccurlyeq M$, где M — монстр-модель теории $\mathrm{Th}(B)$, и $c_1, c_2 \in M \setminus B$. Тогда $\mathrm{tp}(c_1, B) = \mathrm{tp}(c_2, B)$ в том и только том случае, если $\mathrm{tp}(c_1, \varnothing) = \mathrm{tp}(c_2, \varnothing)$. Более того, для любого подмножества $B' \subseteq B$ $\mathrm{tp}(c_1, B') = \mathrm{tp}(c_2, B')$ в том и только том случае, если $\mathrm{tp}(c_1, \varnothing) = \mathrm{tp}(c_2, \varnothing)$.*

Доказательство. Предположим, что условия леммы выполнены. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности предположим, что $\mathrm{tp}(c_1, \varnothing) = \mathrm{tp}(c_2, \varnothing)$. По лемме 12.1 существует такой автоморфизм $\phi\colon M \to M$, что $\phi(c_1) = c_2$. По лемме 13.2 M — дизъюнктное объединение B, C_1, C_2 и D, где C_i — связная компонента, содержащая c_i ($i \in \{1, 2\}$), $D = M \setminus (B \cup C_1 \cup C_2)$.

Поскольку S-морфизмы сохраняют отношение $\sim$, отображение $\phi\colon C_1 \to C_2$ является S-изоморфизмом. Если $C_1 = C_2$, то определим $\psi\colon C \to C$ следующим образом:
$$\psi|_{C_1} = \phi|_{C_1}, \quad \psi|_{B \cup D} = I_{B \cup D}.$$
Если $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, то определим ψ следующим образом:
$$\psi|_{C_1} = \phi|_{C_1}, \quad \psi|_{C_2} = \phi^{-1}|_{C_2}, \quad \psi|_{B \cup D} = I_{B \cup D}.$$
Ясно, что в обоих случаях ψ является S-автоморфизмом левого S-полигона M. Так как $\psi(c_1) = c_2$ и $\psi|_B = I_B$, то $\mathrm{tp}(c_1, B) = \mathrm{tp}(c_2, B)$. □

Теорема 13.4. *Пусть моноид S удовлетворяет условию конечности правых решений и класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем. Тогда S является $\mathcal{SF}$-суперстабилизатором.*

Доказательство. Пусть моноид S удовлетворяет условию конечности правых решений, $T = \mathrm{Th}(A)$ — полная теория некоторого бесконечного сильно плоского левого S-полигона A, M — монстр-модель теории T и $B \subseteq M$, причём $|B| = \varkappa \geqslant 2^{|T|}$. По теореме 10.2 существует левый S-полигон $B' \preccurlyeq M$, такой что $B \subseteq B'$ и $|B'| = \varkappa$. Поскольку класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем, то M и B' сильно плоские. По лемме 13.3
$$|\{\mathrm{tp}(x, B) \mid x \in M \setminus B'\}| = |\{\mathrm{tp}(x, \varnothing) \mid x \in M \setminus B'\}| \leqslant 2^{|T|} \leqslant \varkappa.$$
Более того, $|\{\mathrm{tp}(x, B) \mid x \in B'\}| = \varkappa$. Таким образом, $|S(B)| \leqslant \varkappa$, и теория T суперстабильна. □

Следствие 13.5. *Если S — такой моноид с левым сокращением, что класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем, то S — $\mathcal{SF}$-суперстабилизатор.*

Доказательство. Пусть S — моноид с левым сокращением, $s \in S$. Поскольку элемент s 1-сократим слева, то $|\{x \in S \mid sx = t\}| = 1$ для любого $t \in S$. Следовательно, моноид S удовлетворяет условию конечности правых решений, и по теореме 13.4 S — $\mathcal{SF}$-суперстабилизатор. $\square$

В качестве примера моноида S, удовлетворяющего условиям следствия 13.5, можно рассмотреть свободный моноид X^* с множеством свободных порождающих X, который, очевидно, является моноидом с левым сокращением. Поскольку X^* также является моноидом с правым сокращением, то $r(s,t) = \varnothing$, если $s \neq t$, и $r(s,t) = X^*$, если $s = t$. Заметим, что $r(s,t) = X^*$ — главный идеал. Если $s = tw$ или $t = sw$ для некоторого $w \in X^*$, то $R(s,t) = (1,w)X^*$, в противном случае $R(s,t) = \varnothing$.

Лемма 13.6. *Пусть моноид S удовлетворяет условию* (A) *и класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем. Тогда S удовлетворяет условию конечности правых решений.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть найдётся такой $s_1 \in S$, что для любого $i \in \omega$ существует $b_i \in S$, удовлетворяющий условию

$$T_i = |\{x \in S \mid s_1 x = b_i\}| \geqslant i.$$

Пусть $x_{i,1}, \ldots, x_{i,i}$ — множество различных элементов из T_i, D — однородный ультрафильтр на ω, $S_0 = S^\omega / D$, $\bar{a} \in S_0$, $\bar{a} = a/D$, $a(i) = b_i$ для любого $i \in \omega$. Для $i \in \omega$ определим $x_i \in S^\omega$ следующим образом:

$$x_i(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j < i, \\ x_{j,i}, & \text{если } j \geqslant i, \end{cases}$$

и положим $\bar{x}_i = x_i / D$. Ясно, что элементы $\bar{x}_i$ различны, и следовательно, $|\{x \in S_0 \mid s_1 x = \bar{a}\}| \geqslant \omega$. В силу аксиоматизируемости класса $\mathcal{SF}$ имеем $S_0 \in \mathcal{SF}$. Выберем кардинал $\alpha > |S|$. По утверждению 4.3 и теореме 4.4 существует такой ультрафильтр Φ над α, что $|\{x \in S_0 \mid s_1 x = \bar{a}\}^\alpha / \Phi| > |S|$. Через S_1 обозначим S_0^α / Φ. Из аксиоматизируемости $\mathcal{SF}$ следует, что S_1 сильно плоский. Пусть $a_0 = a'/\Phi$, где $a'(\beta) = \bar{a}$ для любого $\beta < \alpha$, и $A_1 = \{x \in S_1 \mid s_1 x = a_0\}$, т. е. $|A_1| > |S|$. Так как $|Sa_0| \leqslant |S|$, то существует такой элемент $a_1 \in A_1$, что $Sa_0 \subset Sa_1$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что для $0 < i < k$ построены такие множества $A_i \subseteq S_1$ и элементы $a_i \in A_i$ и $s_i \in S$, что $Sa_{i-1} \subset Sa_i$, $A_i = \{x \in S_1 \mid s_i x = a_{i-1}\}$ и $|A_i| > |S|$. Построим такие $A_k \subseteq S_1$, $a_k \in A_k$, $s_k \in S$, что $A_k \subseteq \{x \in S_1 \mid s_k x = a_{k-1}\}$, $Sa_{k-1} \subset Sa_k$, $|A_k| > |S|$. По теореме 7.3

$$R(s_{k-1}, s_{k-1}) = \{(x,y) \in S^2 \mid s_{k-1} x = s_{k-1} y\} = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant m} (u_i, v_i) S$$

для некоторых $m \in \omega$, $u_i, v_i \in S$ $(0 \leqslant i \leqslant m)$. Ясно, что $s_{k-1} a_{k-1} = s_{k-1} b$ для всех $b \in A_{k-1}$. Следовательно, существует i, $0 \leqslant i \leqslant m$, такой что $|\{x \in S_1 \mid u_i x = a_{k-1},\ v_i x \in A_{k-1}\}| > |S|$. Положим $s_k = u_i$, $A_k = \{x \in S_1 \mid s_k x = a_{k-1}\}$. Так как $|A_k| > |S|$ и $|Sa_{k-1}| \leqslant |S|$, то существует такой элемент $a_k \in A_k$, что $Sa_{k-1} \subset Sa_k$. Таким образом, построена возрастающая цепь циклических S-подполигонов Sa_i $(i \in \omega)$ левого S-полигона S_1, что противоречит предположению о выполнении условия (A). $\square$

Из леммы 13.6 и теоремы 13.4 получаем следствие.

Следствие 13.7. *Если для моноида S класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем и моноид S удовлетворяет условию* (A), *то S является $\mathcal{SF}$-суперстабилизатором.*

Следствие 13.8. *Если для моноида S класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем, то S является $\mathcal{P}$-суперстабилизатором.*

Доказательство. Пусть класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем. По теореме 8.6 класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем и S — совершенный слева моноид, т. е. по теореме 8.1 моноид S удовлетворяет условию (A) и $\mathcal{SF} = \mathcal{P}$. Тогда по следствию 13.7 моноид S является $\mathcal{P}$-суперстабилизатор. $\square$

Следствие 13.9. *Если для моноида S класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем, то моноид S является $\mathcal{F}r$-суперстабилизатором.*

Доказательство. Пусть класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем. По теореме 9.1 класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем. По следствию 13.8 моноид S — $\mathcal{P}$-суперстабилизатор. Следовательно, S является $\mathcal{F}r$-суперстабилизатором. $\square$

14. ω-стабильность $\mathcal{SF}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}r$

Результаты этого раздела можно найти в [4].

Лемма 14.1. *Если θ — левая конгруэнция моноида S, то $1/\theta$ — подмоноид моноида S.*

Доказательство. Если $u, v \in 1/\theta$, то $1\theta u$. Поскольку θ — левая конгруэнция, то $vu \, \theta \, v\, 1 = v \, \theta \, 1$. $\square$

Лемма 14.2. *Пусть θ_1, θ_2 — плоские левые конгруэнции моноида S. Тогда $\theta_1 = \theta_2$ в том и только том случае, когда $1/\theta_1 = 1/\theta_2$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Пусть $1/\theta_1 = 1/\theta_2$ и $u, v \in S$. Если $u \, \theta_1 \, v$, то по теореме 3.4 $s \, \theta_1 \, 1$ и $us = vs$ для некоторого $s \in S$. Следовательно, $s \, \theta_2 \, 1$, и опять по теореме 3.4 $u \, \theta_2 \, v$. $\square$

Лемма 14.3. *Пусть S — такой моноид, что класс левых S-полигонов, удовлетворяющих условию* (E), *аксиоматизируем. Пусть M — левый S-полигон, удовлетворяющий условию* (E), *и Sa — компонента связности M. Тогда отношение $\theta_a = \{(s,t) \in S^2 \mid sa = ta\}$ является плоской левой конгруэнцией моноида S и отображение $\phi\colon Sa \to S/\theta_a$, такое что $\phi(sa) = s/\theta_a$ $(s \in S)$, является изоморфизмом левых S-полигонов.*

Доказательство. Очевидно, что отношение θ_a является левой конгруэнцией моноида S. Покажем, что θ_a — плоская левая конгруэнция моноида S. Пусть

$s\,\theta_a\,t$, т. е. $sa = ta$. Из утверждения 7.1 получаем, что $r(s,t) \neq \varnothing$, и следующее предложение истинно в M:

$$(\forall\, x)\Bigl(sx = tx \to (\exists\, y) \bigvee_{0 \leqslant i \leqslant k} x = u_i y\Bigr),$$

где $\{u_0, \ldots, u_k\}$ — множество порождающих правого идеала $r(s,t)$. Тогда $a = u_i b$ для некоторых i, $0 \leqslant i \leqslant k$, и $b \in M$. Так как Sa — компонента связности левого S-полигона M, то $Sa = Sb$, т. е. $b = ka$ для некоторого $k \in S$. Следовательно, $a = u_i ka$, т. е. $1\ \theta_a\ u_i k$. Кроме того, поскольку $su_i = tu_i$, то $s(u_i k) = t(u_i k)$. По следствию 3.6 θ_a — плоская левая конгруэнция моноида S. Отображение $\phi\colon Sa \to S/\theta_a$, такое что $\phi(sa) = s/\theta_a$, является, очевидно, изоморфизмом левых S-полигонов. □

Лемма 14.4. *Если для моноида S класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем и моноид S удовлетворяет условию* (A), *то любой левый S-полигон $M \in \mathcal{SF}$ является копроизведением циклических левых S-полигонов.*

Доказательство. Пусть класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем и моноид S удовлетворяет условию (A). Предположим, что $M \in \mathcal{SF}$ и $M = \coprod_{i \in I} M_i$, где M_i — компонента связности M $(i \in I)$. Ясно, что $M_i \in \mathcal{SF}$ $(i \in I)$. Предположим, что M_i не является циклическим левым S-полигоном для некоторого $i \in I$. Тогда для любого $a \in M_i$ найдётся такой $b \in M_i$, что $Sa \subset Sa \cup Sb$. Легко убедиться, что для элементов u, v компоненты связности сильно плоского левого S-полигона существует такой элемент w, что $Su \cup Sv \subseteq Sw$. Поскольку $M_i \in \mathcal{SF}$, то существует такой $c \in M_i$, что $Sa \cup Sb \subseteq Sc$, т. е. $Sa \subset Sc$. Таким образом, существуют элементы $a_j \in M_i$ $(j \in \omega)$, такие что $Sa_j \subset Sa_{j+1}$, что противоречит тому, что S удовлетворяет условию (A). □

Для подмножества X моноида S полагаем $\rho_X = \rho(X \times X)$, т. е. ρ_X — левая конгруэнция S, порождённая множеством $X \times X$.

Лемма 14.5. *Пусть T — подмоноид моноида S. Моноид T является классом конгруэнции ρ_T тогда и только тогда, когда T — унитарный справа подмоноид.*

Доказательство. Предположим, что T — класс конгруэнции ρ_T и $st \in T$, где $s \in S$, $t \in T$. Поскольку $t\ \rho_T\ 1$, то $st\ \rho_T\ s$ и $s \in T$. Следовательно, T — унитарный справа подмоноид.

Обратно, пусть моноид T является унитарным справа подмоноидом S и $x\ \rho_T\ y$, где $x \in T$. Покажем, что $y \in T$. По утверждению 2.7 $x = y$ (т. е. $y \in T$) или существуют $n \in \omega$, $t_0, \ldots, t_{2n+1} \in T$, $s_0, \ldots, s_n \in S$, такие что

$$x = s_0 t_0,\ s_0 t_1 = s_1 t_2, \ldots,\ s_i t_{2i+1} = s_{i+1} t_{2i+2}, \ldots,\ s_n t_{2n+1} = y \qquad (5)$$

для любого i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Индукцией по i покажем, что $s_i \in T$. Заметим, что из $s_0 t_0, t_0 \in T$ следует, что $s_0 \in T$, так как T унитарен справа. Для $i > 0$, если $s_{i-1} \in T$, то из равенства $s_{i-1} t_{2(i-1)} = s_i t_{2i-1}$ следует $s_i t_{2i-1} \in T$. Так как моноид T является унитарным справа подмоноидом S, то $s_i \in T$. Следовательно, $s_n \in T$. Таким образом, $y = s_n t_{2n+1} \in T$. □

Лемма 14.6. *Пусть T — унитарный справа подмоноид S. Моноид T является стягиваемым справа тогда и только тогда, когда левая конгруэнция ρ_T является сильно плоской.*

Доказательство. Пусть T — унитарный справа подмоноид S. Предположим, что T — стягиваемый справа моноид и $x \; \rho_T \; y$, где $x, y \in S$. Если $x = y$, то $x\,1 = y\,1$. С другой стороны, существуют $n \in \omega$, $t_0, \ldots, t_{2n} \in T$, $s_0, \ldots, s_n \in S$, для которых выполняется (5). Из леммы 2.4 следует существование такого $r \in T$, что $t_i r = t_j r$, $0 \leqslant i, j \leqslant 2n+1$. Следовательно,

$$xr = s_0 t_0 r = s_0 t_1 r = s_1 t_2 r = \ldots = s_n t_{2n+1} r = yr$$

и $r \; \rho_T \; 1$. По следствию 3.6 ρ_T — сильно плоская левая конгруэнция.

Обратно, предположим, что ρ_T — сильно плоская левая конгруэнция, $x, y \in T$. Тогда $x \; \rho_T \; y$, и по следствию 3.6 и лемме 14.5 существует такой элемент $z \in T$, что $xz = yz$. Следовательно, T стягиваем справа. □

Через CU^S обозначим множество всех стягиваемых справа и унитарных справа подмоноидов моноида S.

Теорема 14.7. *Пусть S — такой моноид, что $|S| \leqslant \omega$. Предположим, что класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем и S удовлетворяет условию* (A). *Моноид S является $\mathcal{SF}$-ω-стабилизатором тогда и только тогда, когда $|\mathrm{CU}^S| \leqslant \omega$.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Предположим, что S является $\mathcal{SF}$-ω-стабилизатором. Через C обозначим множество сильно плоских левых конгруэнций моноида S. Заметим, что $C \neq \varnothing$, так как отношение равенства ι принадлежит C. Положим

$$A = \coprod \{S/\rho \mid \rho \in C\}, \quad B = \coprod_{i \in \omega} A_i,$$

где A_i — дизъюнктные копии левого S-полигона A и $1_i/\rho \in A_i$ — копии $1/\rho \in A$ ($i \in \omega$). Ясно, что A и B лежат в $\mathcal{SF}$. Пусть $T = \mathrm{Th}(B)$.

По предположению теория T ω-стабильна и $|S(\varnothing)| \leqslant \omega$. Пусть $U \in \mathrm{CU}^S$. Тогда по лемме 14.6 ρ_U — сильно плоская левая конгруэнция моноида S, т. е. $S/\rho_U \in \mathcal{SF}$ и по лемме 14.5 $U = 1/\rho_U$.

Построим отображение $\alpha\colon \mathrm{CU}^S \to S(\varnothing)$ по следующему правилу: $\alpha(U) = \mathrm{tp}(1_0/\rho_U, \varnothing)$. Покажем инъективность отображения α. Пусть $U, V \in \mathrm{CU}^S$, $U \neq V$. Без ограничения общности можно предполагать, что $t \in U \setminus V$. Тогда $t \cdot 1_0/\rho_U = 1_0/\rho_U$ и $t \cdot 1_0/\rho_V \neq 1_0/\rho_V$. Следовательно, $tx = x$ лежит в $\mathrm{tp}(1_0/\rho_U, \varnothing)$, но не в $\mathrm{tp}(1_0/\rho_V, \varnothing)$. Тогда α — инъективное отображение и $|\mathrm{CU}^S| \leqslant \omega$.

Обратно, предположим, что $|\mathrm{CU}^S| \leqslant \omega$. Пусть $s, t \in S$. Для $d \in D \in \mathcal{SF}$, где Sd — компонента связности, через θ_d обозначим отношение $\{(s,t) \in S^2 \mid sd = td\}$. Ясно, что θ_d является левой конгруэнцией на S. Из аксиоматизируемости $\mathcal{SF}$

по теореме 7.3 следует, что множество $r(s,t)$ пусто или конечно порождено как правый идеал S. По лемме 14.3 отношение θ_d является сильно плоской левой конгруэнцией моноида S.

Пусть $F \in \mathcal{SF}$, $|F| \geqslant \omega$ и $T = \mathrm{Th}(F)$. Мы должны доказать ω-стабильность теории T. Пусть M — монстр-модель теории T. Так как класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем, то M — сильно плоский левый S-полигон. Предположим, что $A \subseteq M$, $|A| \leqslant \omega$. По теореме 10.2 существует такая модель B теории T, что $A \subseteq B$ и $|B| = \omega$. Так как M — монстр-модель, то $B \preccurlyeq M$.

Пусть $c_1, c_2 \in M$. По лемме 14.4 M является копроизведением циклических левых S-полигонов. Следовательно, существуют $d_1, d' \in M$, такие что $c_1 \in Sd_1$, $c_2 \in Sd'$ и Sd_1, Sd' — компоненты связности M. Ясно, что либо $Sd_1 = Sd'$, либо $Sd_1 \cap Sd' = \varnothing$. Покажем, что для $c_1, c_2 \in C \setminus B$ равенство $\mathrm{tp}(c_1, A) = \mathrm{tp}(c_2, A)$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\text{найдутся такие } d_2 \in M,\ t \in S, \text{ что } Sd_2 = Sd',\ 1/\theta_{d_1} = 1/\theta_{d_2},\ c_1 = td_1,\ c_2 = td_2. \quad (6)$$

Пусть $\mathrm{tp}(c_1, A) = \mathrm{tp}(c_2, A)$. Тогда существует такой S-автоморфизм $\phi\colon C \to C$, что $\phi(c_1) = c_2$ и $\phi|_A = I_A$. Полагая $d_2 = \phi(d_1)$, получаем, что Sd_2 — компонента связности, содержащая c_2, т. е. $Sd_2 = Sd'$. Тогда $c_1 = td_1$ для некоторого $t \in S$, т. е. $c_2 = td_2$. Кроме того, для любых $u, v \in S$ $ud_1 = vd_1$, если и только если $ud_2 = vd_2$, т. е. $\theta_{d_1} = \theta_{d_2}$. Следовательно, (6) доказано.

Пусть выполняется (6). По лемме 14.1 $1/\theta_{d_1}$, $1/\theta_{d_2}$ — подмоноиды моноида S. Поскольку θ_{d_1}, θ_{d_2} — сильно плоские левые конгруэнции и $1/\theta_{d_1} = 1/\theta_{d_2}$, то по лемме 14.2 $\theta_{d_1} = \theta_{d_2}$. Следовательно, $S/\theta_{d_1} = S/\theta_{d_2}$. Из леммы 14.3 следует, что существует такой изоморфизм $\phi\colon Sd_1 \to Sd_2$ левых S-полигонов, что $\phi(d_1) = d_2$. Так как $c_1 = td_1$, то $\phi(c_1) = c_2$. По лемме 13.6 моноид S удовлетворяет условию конечности правых решений. По лемме 13.2 $Sd_i \cap B = \varnothing$ для $i \in \{1, 2\}$. Построим автоморфизм $\psi\colon M \to M$ следующим образом: $\psi|_{Sd_1} = \phi|_{Sd_1}$, $\psi|_{Sd_2} = \phi^{-1}|_{Sd_2}$ (кроме случая $Sd_1 = Sd_2$) и $\psi|_{M \setminus (Sd_1 \cup Sd_2)} = I$. Поскольку в обоих случаях $\psi(c_1) = c_2$ и $\psi|_A = I_A$, то $\mathrm{tp}(c_1, A) = \mathrm{tp}(c_2, A)$.

Таким образом, тип любого элемента $m \in M \setminus B$ над A определяется некоторым элементом из S и некоторой плоской конгруэнцией θ_d, где Sd — компонента связности и $m \in Sd$.

Если Sm — компонента связности M, то, как замечено выше, θ_m — сильно плоская левая конгруэнция S. Пусть $U = 1/\theta_m$. Мы знаем, что U — подмоноид S. Если $t, st \in U$, то $tm = m = stm$, т. е. $sm = m$ и $m \in U$. Следовательно, подмоноид U унитарен справа. С другой стороны, если $p, q \in U$, то $pm = m = qm$. Так как S-полигон M сильно плоский, то $pr = qr$ для некоторого $r \in S$ и $m = rk$ для некоторого $k \in Sm$. Поскольку Sm является компонентой связности, то $k = r'm$ для некоторого $r' \in S$. Тогда $prr' = qrr'$ и $m = rr'm$, т. е. $rr' \in U$, и U стягиваем справа. Следовательно, $U \in \mathrm{CU}^S$. Из леммы 14.2 получаем, что

$$|\{\theta_c \mid Sc \text{ — компонента связности } M\}| \leqslant |\mathrm{CU}^S| \leqslant \omega.$$

Поскольку

$$|\{\mathrm{tp}(b, A) \mid b \in B\}| \leqslant |B| = \omega,$$

то $|S(A)| \leqslant \omega$, что и требовалось. $\square$

Из теоремы 7.3 и теоремы 14.7 получаем следствие.

Следствие 14.8. *Если S — конечный моноид, то S — $\mathcal{SF}$-ω-стабилизатор.*

Следствие 14.9. *Если S — счётная группа, то S — $\mathcal{SF}$-ω-стабилизатор.*

Доказательство. Пусть S — счётная группа. Как замечено в [14], классы $\mathcal{SF}$ и $\mathcal{P}$ аксиоматизируемы и S совершенен слева и удовлетворяет условию (A). Пусть U — стягиваемый справа подмоноид S. Тогда для любых $u, v \in U$ существует такой элемент $r \in S$, что $ur = vr$. Следовательно, $U = \{1\}$ и $|\mathrm{CU}^S| = 1$. По теореме 14.7 моноид S является $\mathcal{SF}$-ω-стабилизатором. $\square$

Следствие 14.10. *Если $|S| \leqslant \omega$ и класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем, то S — $\mathcal{P}$-ω-стабилизатор.*

Доказательство. Пусть $|S| \leqslant \omega$ и класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем. По теореме 8.6 класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем и моноид S является совершенным слева. Следовательно, по теореме 8.1 $\mathcal{SF} = P$ и моноид S удовлетворяет условию (A). Построим отображение ϕ множества CU^S в множество E идемпотентов S.

Предположим, что $U \in \mathrm{CU}^S$. Тогда по лемме 14.5 $U = 1/\rho_U$ и по лемме 14.6 ρ_U — сильно плоская левая конгруэнция. Согласно равенству $\mathcal{SF} = \mathcal{P}$ существуют идемпотент $e \in S$ и S-изоморфизм $\alpha\colon S/\rho_U \to Se$. Положим $a = 1/\rho_U$, т. е. $S/\rho_U = Sa$ и $u\ \rho_U\ v$ тогда и только тогда, когда $ua = va$. Имеем $\alpha(a) = se$ и $\alpha(ta) = e$ для некоторых $s, t \in S$. Легко убедиться, что $e = tse$, $eta = ta$ и $seta = a = sta$. Следовательно, $setset = seet = set$, т. е. $g = set$ — идемпотент S и $ga = a$. Более того, для любых $u, v \in S$ имеем

$$\begin{aligned} u\ \rho_U\ v \Longleftrightarrow{} & ua = va \Longrightarrow \\ \Longrightarrow{} & use = vse \Longrightarrow \\ \Longrightarrow{} & ug = vg \Longrightarrow \\ \Longrightarrow{} & useta = uga = vga = vseta \Longrightarrow \\ \Longrightarrow{} & ua = va. \end{aligned}$$

Определим $\phi\colon \mathrm{CU}^S \to E$ равенством $\phi(U) = g$. Если $\phi(U) = \phi(V)$, то $\rho_U = \rho_V$, т. е. $U = 1/\rho_U = 1/\rho_V = V$. Таким образом, ϕ — инъекция и $|\mathrm{CU}^S| \leqslant |E| \leqslant |S| \leqslant \omega$. $\square$

Следствие 14.11. *Если $|S| \leqslant \omega$ и класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем, то S — $\mathcal{F}r$-ω-стабилизатор.*

Доказательство. Если класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем, то по теореме 9.1 класс $\mathcal{P}$ также аксиоматизируем. По следствию 14.10 S — $\mathcal{P}$-ω-стабилизатор, в частности $\mathcal{F}r$-ω-стабилизатор. $\square$

Литература

[1] Михалёв А. В., Овчинникова Е. В., Палютин Е. А., Степанова А. А. Теоретико-модельные свойства регулярных полигонов // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 4. — С. 107—157.

[2] Мустафин Т. Г. О стабильностной теории полигонов // Теория моделей и её применение. — Новосибирск: Наука, 1988. — (Тр. АН СССР. Сиб. отд-е. Ин-т математики; Т. 8). — С. 92—108.

[3] Степанова А. А. Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов S-полигонов // Алгебра и логика. — 1991. — Т. 30. — С. 583—594.

[4] Степанова А. А. Моноиды со стабильными плоскими полигонами // Вестн. Новосибирск. гос. ун-та. Сер. Математика, информатика, механика. — 2002. — Т. 2, № 2. — С. 64—77.

[5] Bulman-Fleming S. Pullback-flat acts are strongly flat // Can. Math. Bull. — 1991. — Vol. 34. — P. 456—461.

[6] Bulman-Fleming S., Gould V. Axiomatisability of weakly flat, flat and projective acts // Commun. Algebra. — 2002. — Vol. 30. — P. 5575—5593.

[7] Bulman-Fleming S., Normak P. Monoids over which all flat cyclic right acts are strongly flat // Semigroup Forum. — 1995. — Vol. 50. — P. 233—241.

[8] Chang C. C., Keisler H. J. Model Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1973.

[9] Dorofeeva M. P. Hereditary and semi-hereditary monoids // Semigroup Forum. — 1972. — Vol. 4. — P. 301—311.

[10] Eklof P., Sabbagh G. Definability problems for modules and rings // J. Symbolic Logic. — 1971. — Vol. 36. — P. 623—649.

[11] Fountain J. B. Perfect semigroups // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1976. — Vol. 20. — P. 87—93.

[12] Fountain J. B. Abundant semigroups // Proc. London Math. Soc. — 1982. — Vol. 44. — P. 103—129.

[13] Fountain J. B., Gould V. Stability of S-sets: Preprint. — 2001.

[14] Gould V. Axiomatisability problems for S-systems // J. London Math. Soc. — 1987. — Vol. 35. — P. 193—201.

[15] Howie J. M. Fundamentals of Semigroup Theory. — Oxford: Clarendon Press, 1995.

[16] Isbell J. R. Perfect monoids // Semigroup Forum. — 1971. — Vol. 2. — P. 95—118.

[17] Kilp M., Knauer U. Characterisation of monoids by torsion-free, flat, projective and free acts // Arch. Math. — 1981. — Vol. 36. — P. 189—294.

[18] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. — Berlin: Walter de Gruyter, 2000.

[19] Knauer U. Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids // Semigroup Forum. — 1972. — Vol. 3. — P. 359-370.

[20] Morley M. D. Categoricity in power // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — Vol. 114. — P. 514—539.

[21] Pillay A. An Introduction to Stability Theory. — Oxford: Clarendon Press, 1983. — (Oxford Logic Guides; Vol. 8).

[22] Prest M. The Model Theory of Modules. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 130).

[23] Stenström B. Flatness and localization over monoids // Math. Nachr. — 1971. — Vol. 48. — P. 315—334.