Об одном классе модулей над групповыми кольцами разрешимых групп с ограничениями на некоторые системы подгрупп

О. Ю. ДАШКОВА
Киевский национальный университет, Украина
e-mail: odashkova@yandex.ru

УДК 512.544

Ключевые слова: артинов модуль, разрешимая группа, дедекиндова область.

Аннотация

В работе изучается модуль A над групповым кольцом $\mathbf{D}G$ в случае, когда $\mathbf{D}$ — дедекиндова область, A не является артиновым $\mathbf{D}$-модулем, группа G разрешима, $C_A(G) = 1$ и система всех подгрупп $H \leqslant G$, для которых фактор-модули $A/C_A(H)$ не являются артиновыми $\mathbf{D}$-модулями, удовлетворяет условию максимальности для подгрупп. Описано строение группы G.

Abstract

O. Yu. Dashkova, On a class of modules over group rings of soluble groups with restrictions on some systems of subgroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 111—119.

The author studies a $\mathbf{D}G$-module A such that $\mathbf{D}$ is a Dedekind domain, $A/C_A(G)$ is not an Artinian $\mathbf{D}$-module, $C_A(G) = 1$, G is a soluble group, and the system of all subgroups $H \leqslant G$ for which the quotient modules $A/C_A(H)$ are not Artinian $\mathbf{D}$-modules satisfies the minimum condition. The structure of G is described.

Достаточно широким классом модулей над групповыми кольцами являются артиновы модули над групповыми кольцами. Напомним, что модуль называется артиновым, если частично упорядоченное множество всех подмодулей этого модуля удовлетворяет условию минимальности. Следует отметить, что ряд проблем алгебры требует исследования специфических артиновых модулей. В [2] изучались артиновы модули над групповыми кольцами с различными ограничениями на группы. Естественно возникает вопрос об исследовании модулей над групповыми кольцами, которые сами не являются артиновыми, но в некотором смысле близки к артиновым.

Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль, где G — группа, $\mathbf{D}$ — дедекиндова область. Если $H \leqslant G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$ называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A. Если A — такой $\mathbf{D}G$-модуль, что коцентрализатор группы G

в модуле A не является артиновым $\mathbf{D}$-модулем, обозначим через $L_{\mathrm{nad}}(G)$ систему всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются артиновыми $\mathbf{D}$-модулями. Введём на $L_{\mathrm{nad}}(G)$ упорядоченность относительно обычного включения подгрупп. Если $L_{\mathrm{nad}}(G)$ удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, коцентрализаторы которых в модуле A не являются артиновыми $\mathbf{D}$-модулями, или просто что группа G удовлетворяет условию $\mathrm{max}\text{-}\mathrm{nad}$.

В работе изучается такой $\mathbf{D}G$-модуль A, что $C_G(A) = 1$, A не является артиновым $\mathbf{D}$-модулем, группа G разрешима и удовлетворяет условию $\mathrm{max}\text{-}\mathrm{nad}$. Описано строение группы G. Как оказалось, строение G зависит от того, является конечной или бесконечной система порождающих группы G.

Далее всюду рассматривается такой $\mathbf{D}G$-модуль A, что $C_G(A) = 1$.

Лемма 1. *Пусть A — $\mathbf{D}$-модуль.*

1. *Если $K \leqslant H \leqslant G$ и коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым $\mathbf{D}$-модулем, то коцентрализатор подгруппы K в модуле A также является артиновым $\mathbf{D}$-модулем.*
2. *Если $U, V \leqslant G$ — такие подгруппы, что их коцентрализаторы в модуле A являются артиновыми $\mathbf{D}$-модулями, то коцентрализатор подгруппы $\langle U, V\rangle$ в модуле A является артиновым $\mathbf{D}$-модулем.*

Следствие 2. *Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль и группа G удовлетворяет условию* $\mathrm{max}\text{-}\mathrm{nad}$. *Тогда множество $AD(G)$ всех таких элементов $x \in G$, что коцентрализатор группы $\langle x\rangle$ в модуле A является артиновым $\mathbf{D}$-модулем, является нормальной подгруппой группы G.*

Доказательство. Из леммы 1 вытекает, что $AD(G)$ — подгруппа группы G. Так как $C_A(x^g) = C_A(x)g$ для всех $x, g \in G$, из этого следует, что $AD(G)$ нормальна в G. Следствие доказано. □

Лемма 3 [4]. *Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль, и пусть группа G удовлетворяет условию* $\mathrm{max}\text{-}\mathrm{nad}$.

1. *Если H — подгруппа группы G, то H удовлетворяет условию* $\mathrm{max}\text{-}\mathrm{nad}$.
2. *Если $H_1 < H_2 < \ldots < H_n < \ldots$ — бесконечный возрастающий ряд подгрупп, то коцентрализатор каждой подгруппы H_n в модуле A является артиновым $\mathbf{D}$-модулем.*
3. *Если коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является артиновым $\mathbf{D}$-модулем, то упорядоченное по включению множество $\mathbf{L}[H, G]$ всех подгрупп, включающих H, удовлетворяет условию максимальности.*

Следствие 4. *Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль, и пусть группа G удовлетворяет условию* $\mathrm{max}\text{-}\mathrm{nad}$. *Тогда либо коцентрализатор каждой конечно порождённой подгруппы группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{D}$-модулем, либо группа G конечно порождённая. В частности, если G бесконечно порождённая, то $G = AD(G)$.*

Доказательство. Предположим сначала, что группа G бесконечно порождённая. Пусть L — конечно порождённая подгруппа группы G. Тогда $G\setminus L \neq \varnothing$. Пусть $a_1 \in G \setminus L$, $L_1 = \langle L, a_1 \rangle$. Поскольку подгруппа L_1 конечно порождённая, то $G \setminus L_1 \neq \varnothing$. Используя подобные рассуждения, можно построить строго возрастающий ряд $L < L_1 < \ldots < L_n < \ldots$ конечно порождённых подгрупп. По лемме 3 коцентрализатор каждой подгруппы L_n в модуле A является артиновым $\mathbf{D}$-модулем. В частности, коцентрализатор подгруппы L в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. Следствие доказано. □

Следствие 5. *Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль, и пусть группа G удовлетворяет условию* $\mathrm{max\text{-}nad}$, *K и H — подгруппы группы G и K нормальна в H. Если фактор-группа H/K не удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, то коцентрализатор подгруппы K в модуле A является артиновым $\mathbf{D}$-модулем.*

Лемма 6. *Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль и группа G удовлетворяет условию* $\mathrm{max\text{-}nad}$, *и пусть H и Q — подгруппы группы G, удовлетворяющие следующим условиям*:

1) *Q — нормальная подгруппа H*;
2) *$H/Q = B/Q \times C/Q$.*

Если фактор-группы B/Q и C/Q не удовлетворяют условию максимальности для подгрупп, то коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым $\mathbf{D}$-модулем.

Доказательство. Поскольку $H/B \simeq C/Q$, то фактор-группа H/B не удовлетворяет условию максимальности для подгрупп. Согласно следствию 5 коцентрализатор подгруппы B в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. Аналогично устанавливаем, что коцентрализатор подгруппы C в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. Так как $H = BC$, то по лемме 1 коцентрализатор подгруппы H в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. Лемма доказана. □

Следствие 7. *Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль и группа G удовлетворяет условию* $\mathrm{max\text{-}nad}$, *и пусть H и Q — подгруппы группы G, удовлетворяющие следующим условиям*:

1) *Q — нормальная подгруппа H*;
2) *$H/Q = \mathrm{Dr}_{\lambda \in \Lambda}(L_\lambda/Q)$, где $L_\lambda \neq Q$ для каждого $\lambda \in \Lambda$.*

Если множество Λ бесконечно, то коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым $\mathbf{D}$-модулем.

Доказательство. Существуют два бесконечных подмножества Γ и Δ, такие что $\Gamma \cup \Delta = \Lambda$, $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$. Отсюда следует, что Γ обладает возрастающим рядом бесконечных подмножеств

$$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \ldots \subseteq \Gamma_n \subseteq \ldots$$

и Δ обладает возрастающим рядом бесконечных подмножеств

$$\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \ldots \subseteq \Delta_n \subseteq \ldots .$$

Положим $U/Q = \mathrm{Dr}_{\lambda \in \Gamma}(L_\lambda/Q)$, $V/Q = \mathrm{Dr}_{\lambda \in \Delta}(L_\lambda/Q)$. Получим два возрастающих ряда подгрупп

$$\langle L_\lambda \mid \lambda \in \Delta_1 \rangle < \langle L_\lambda \mid \lambda \in \Delta_2 \rangle < \ldots < \langle L_\lambda \mid \lambda \in \Delta_n \rangle < \ldots$$

и

$$\langle L_\lambda \mid \lambda \in \Gamma_1 \rangle < \langle L_\lambda \mid \lambda \in \Gamma_2 \rangle < \ldots < \langle L_\lambda \mid \lambda \in \Gamma_n \rangle < \ldots .$$

Отсюда следует, что фактор-группы U/Q и V/Q не удовлетворяют условию максимальности для подгрупп. По построению $H/Q = U/Q \times V/Q$. Согласно лемме 6 коцентрализатор подгруппы H в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. Следствие доказано. □

Лемма 8. *Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль, группа G разрешима и удовлетворяет условию* $\mathrm{max\text{-}nad}$. *Тогда фактор-группа $G/AD(G)$ полициклическая.*

Доказательство. Пусть

$$\langle 1 \rangle = D_0 \leqslant D_1 \leqslant \ldots \leqslant D_n = G —$$

производный ряд группы G. Пусть группа G бесконечно порождённая. Согласно следствию 4 $G = AD(G)$. Предположим теперь, что G конечно порождённая. Тогда фактор-группа G/D_{n-1} конечно порождённая. Если фактор-группы D_{j+1}/D_j конечно порождённые для каждого j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, то группа G полициклическая. Поэтому можно считать, что существует такой номер $m \in \mathbb{N}$, что фактор-группа D_m/D_{m-1} не является конечно порождённой. В частности, подгруппа D_m не является конечно порождённой. Согласно следствию 4 $D_m \leqslant AD(G)$. Лемма доказана. □

Лемма 9. *Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль, группа G удовлетворяет условию* $\mathrm{max\text{-}nad}$. *Если A не является артиновым $\mathbf{D}$-модулем и $G \neq [G, G] = D$, то либо фактор-группа $G_{\mathrm{ab}} = G/D$ конечно порождённая, либо G_{ab} содержит такую конечно порождённую подгруппу S/D, что G/S — прюферова p-группа для некоторого простого числа p.*

Доказательство. Предположим сначала, что фактор-группа G/D не является конечно порождённой. Пусть T/D — периодическая часть G/D. Выберем в $Q = G/T$ максимальное $\mathbb{Z}$-независимое множество элементов $\{u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Тогда подгруппа $U = \{u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ свободная абелева, $U = \mathrm{Dr}_{\lambda \in \Lambda}\langle u_\lambda \rangle$ и фактор-группа Q/U периодическая. Предположим, что множество Λ бесконечно. Поскольку свободная абелева группа проективна [1, теорема 14.6], U содержит такую подгруппу Y, что U/Y — прямое произведение счётного множества копий прюферовых p-групп. Тогда $Q/Y = U/Y \times W/Y$ для некоторой подгруппы W [1, теорема 21.2]. Таким образом, фактор-группа Q/W — прямое произведение счётного множества копий прюферовых p-групп. Согласно следствию 7 коцентрализатор группы G в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. Полученное противоречие показывает, что множество Λ конечно. Отсюда вытекает конечность ранга $\mathrm{r}_0(Q)$. Пусть V/D — прообраз подгруппы U в G/D. Из выбора подгруппы U следует, что фактор-группа $(G/D)/(V/D) \simeq G/V$ периодическая. Если множество $\pi(G/V)$ бесконечно, то по следствию 7 коцентрализатор подгруппы G в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. Следовательно, множество $\pi(G/V)$ конечно. Пусть S_p/V — силовская p-подгруппа фактор-группы G/V для каждого простого числа p, и пусть

$$\Psi = \{p \mid p \in \pi(G/V),\ |S_p/V| = \infty\}.$$

Из леммы 6 вытекает, что $\Psi = \{p\}$. Пусть $P/V = \mathrm{Dr}_{q \neq p} S_p/V$. Тогда фактор-группа $G/P \simeq S_p/V$ бесконечна, а фактор-группа P/V конечна. Предположим сначала, что фактор-группа $(G/P)/(G/P)^p$ бесконечна. Согласно следствию 7 коцентрализатор группы G в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. Противоречие. Следовательно, фактор-группа $(G/P)/(G/P)^p$ конечна. Отсюда следует, что $S_p/V = C_p/V \times K_p/V$, где K_p/V — конечная фактор-группа, а C_p/V — делимая p-группа. Из леммы 6 вытекает, что C_p/V — прюферова p-группа. Следовательно, фактор-группа $S/V = P/V \times K_p/V$ конечна, и поэтому S/V конечно порождённая. Отсюда следует, что G/S — прюферова p-группа. Лемма доказана. □

Лемма 10. *Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль, и пусть $G = AD(G)$. Если A не является артиновым $\mathbf{D}$-модулем, то коцентрализатор никакой подгруппы конечного индекса группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{D}$-модулем.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть H — такая подгруппа конечного индекса группы G, что её коцентрализатор в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. Пусть $K = \mathrm{Core}_G(H)$. Тогда коцентрализатор подгруппы K в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. Существует такая конечно порождённая подгруппа L, что $G = LK$. Поскольку $G = AD(G)$, коцентрализатор подгруппы L в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. По лемме 1 коцентрализатор группы G в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. Противоречие. Лемма доказана. □

Лемма 11. *Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль, группа G разрешима и удовлетворяет условию* $\mathrm{max\text{-}nad}$. *Если фактор-группа $G/[G,G]$ бесконечно порождённая, то группа G содержит такую нормальную нильпотентную подгруппу H, что её коцентрализатор в модуле A является артиновым $\mathbf{D}$-модулем и G/H является расширением нильпотентной группы при помощи почти абелевой.*

Доказательство. Согласно лемме 9 группа G содержит такую нормальную подгруппу M, что фактор-группа G/M — прюферова q-группа для некоторого простого числа q. Согласно следствию 4 $G = AD(G)$. По лемме 3 коцентрализатор подгруппы M в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. Пусть $C = C_A(M)$. Тогда $M \leqslant C_G(C)$. В частности, фактор-группа $G/C_G(M)$ — прюферова q-группа. Поскольку M нормальна в G, M — $\mathbf{D}G$-подмодуль модуля A. Из выбора C вытекает, что A/C — артинов $\mathbf{D}$-модуль. По [5, теорема 7.13] A имеет конечный ряд $\mathbf{D}G$-подмодулей

$$\langle 0 \rangle = C_0 \leqslant C_1 = C \leqslant C_2 \leqslant C_3 = A,$$

такой что C_2/C_1 — делимый $\mathbf{D}$-модуль, представимый в виде прямой суммы конечного числа прюферовых $\mathbf{D}$-модулей, C_3/C_2 — конечно порождённый $\mathbf{D}$-модуль. Согласно [3, лемма 6.2] существует ряд

$$C_2 \leqslant L_1 \leqslant L_2 \leqslant \ldots \leqslant L_k \leqslant C_3,$$

такой что факторы L_1/C_2, L_i/L_{i-1}, $i = 2, \ldots, k$, C_3/L_k — простые $\mathbf{D}G$-модули. Тогда A обладает конечным рядом $\mathbf{D}G$-подмодулей

$$\langle 0 \rangle = S_0 \leqslant S_1 = C_1 \leqslant S_2 = C_2 \leqslant S_3 \leqslant \ldots \leqslant S_m = A,$$

в котором каждый фактор S_{i+1}/S_i, $i = 2, \ldots, m-1$, является простым $\mathbf{D}G$-модулем. Из [2, предложение 16.16] вытекает, что фактор-группа $G/C_G(S_2/S_1)$ изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathrm{GL}\big(r, \mathbf{D}(P^\infty)\big)$. Поскольку $\mathbf{D}(P^\infty)$ — целостное кольцо, то $\mathbf{D}(P^\infty)$ может быть вложено в поле F. Тогда фактор-группа $G/C_G(S_2/S_1)$ изоморфна некоторой подгруппе $\mathrm{GL}(r, F)$. По [6, теорема 3.6] фактор-группа $G/C_G(S_2/S_1)$ является расширением нильпотентной группы при помощи почти абелевой. Согласно теореме А. И. Мальцева (см. [6, лемма 3.5]) фактор-группа $G/C_G(S_{i+1}/S_i)$, $i = 2, \ldots, m-1$, почти абелева.

Пусть

$$H = C_G(S_1) \cap C_G(S_2/S_1) \cap C_G(S_3/S_2) \cap \ldots \cap C_G(S_m/S_{m-1}).$$

Каждый элемент подгруппы H действует тривиально в каждом факторе S_{j+1}/S_j, $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Следовательно, подгруппа H нильпотентна. По теореме Ремака

$$G/H \leqslant G/C_G(S_1) \times G/C_G(S_2/S_1) \times \ldots \times G/C_G(S_m/S_{m-1}).$$

Следовательно, фактор-группа G/H является расширением нильпотентной группы при помощи почти абелевой.

По построению $H \leqslant C_G(C_1)$. Поскольку фактор-группа $G/C_G(C_1)$ — прюферова q-группа, то по лемме 3 коцентрализатор подгруппы $C_G(C_1)$ в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. С учётом леммы 1 получаем, что коцентрализатор подгруппы H в модуле A также является артиновым $\mathbf{D}$-модулем. Лемма доказана. □

Лемма 12. *Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль, группа G разрешима и удовлетворяет условию* max-nad. *Если A не является артиновым $\mathbf{D}$-модулем и фактор-группа $G/[G, G]$ бесконечно порождённая, то группа G имеет ряд нормальных подгрупп*

$$H \leqslant L \leqslant N \leqslant M \leqslant G,$$

такой что фактор-группа G/M конечна, фактор-группа M/N — прюферова q-группа для некоторого простого числа q, N/L конечно порождённая, а фактор-группа L/H и подгруппа H нильпотентны.

Доказательство. Согласно лемме 11 группа G содержит такую нормальную нильпотентную подгруппу H, что фактор-группа G/H является расширением нильпотентной группы при помощи почти абелевой. Отсюда следует, что группа G обладает рядом нормальных подгрупп

$$H \leqslant L \leqslant N \leqslant M \leqslant G,$$

таким что фактор-группа G/M конечна, M/H абелева, а фактор-группа L/H и подгруппа H нильпотентны. По леммам 1 и 10 коцентрализатор подгруппы M в модуле A не является артиновым $\mathbf{D}$-модулем. По лемме 9 M/H содержит конечно порождённую подгруппу W/H, такую что M/W — прюферова q-группа для некоторого простого числа q. Положим $N/H = (W/H)^{G/H}$. Поскольку G/M конечная, N/H также конечно порождённая. По леммам 1 и 3 коцентрализатор подгруппы N в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. Лемма доказана. □

Следующий результат достаточно просто получается с учётом лемм 11 и 12.

Теорема 1. *Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль, группа G разрешима и удовлетворяет условию* max-nad. *Если A не является артиновым $\mathbf{D}$-модулем и фактор-группа $G/[G,G]$ бесконечно порождённая, то справедливы следующие утверждения*:

1) *A обладает конечным рядом $\mathbf{D}G$-подмодулей*

$$\langle 0\rangle = S_0 \leqslant S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant \ldots \leqslant S_m = A,$$

в котором S_2/S_1 — делимый $\mathbf{D}$-модуль, представимый в виде прямой суммы конечного числа прюферовых $\mathbf{D}$-модулей, каждый фактор S_{i+1}/S_i, $i = 2, \ldots, m-1$, — простой $\mathbf{D}G$-модуль, а фактор-группа $Q = G/C_G(C_1)$ — прюферова q-группа для некоторого простого числа q;

2) *$H = C_G(S_1) \cap C_G(S_2/S_1) \cap \ldots \cap C_G(S_m/S_{m-1})$ — нильпотентная нормальная подгруппа, коцентрализатор которой в модуле A является артиновым $\mathbf{D}$-модулем*;

3) *группа G имеет ряд нормальных подгрупп*

$$H \leqslant L \leqslant N \leqslant M \leqslant G,$$

такой что фактор-группа G/M конечна, фактор-группа M/N — прюферова q-группа для некоторого простого числа q, N/L конечно порождённая, а фактор-группа L/H и подгруппа H нильпотентны.

Следующим естественным шагом является рассмотрение случая, когда группа G конечно порождённая.

Теорема 2. *Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль, G — конечно порождённая разрешимая группа, удовлетворяющая условию* max-nad. *Если A не является артиновым $\mathbf{D}$-модулем, а коцентрализатор $AD(G)$ в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль, то G обладает рядом нормальных подгрупп*

$$H \leqslant L \leqslant G,$$

таким что фактор-группа G/L полициклическая, а фактор-группа L/H и подгруппа H нильпотентны.

Доказательство. Пусть $C = C_A\big(AD(G)\big)$. Поскольку коцентрализатор $AD(G)$ в модуле A является артиновым $\mathbf{D}$-модулем, то A обладает рядом $\mathbf{D}G$-подмодулей

$$\langle 0\rangle = S_0 \leqslant S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant \ldots \leqslant S_m = A,$$

в котором S_2/S_1 — делимый $\mathbf{D}$-модуль, представимый в виде прямой суммы конечного числа прюферовых $\mathbf{D}G$-модулей, каждый фактор S_{i+1}/S_i, $i = 2, \ldots, m-1$, — простой $\mathbf{D}G$-модуль. По [6, теорема 3.6] фактор-группа $G/C_G(S_2/S_1)$ является расширением нильпотентной группы при помощи почти абелевой. Поскольку группа G конечно порождённая, фактор-группа $G/C_G(S_2/S_1)$ является расширением нильпотентной группы при помощи полициклической. В случае простого $\mathbf{D}G$-модуля S_{i+1}/S_i, $i = 2, \ldots, m-1$, фактор-группа $G/C_G(S_{i+1}/S_i)$ почти абелева по теореме А. И. Мальцева (см. [6, лемма 3.5]). Отсюда ввиду конечной порождённости группы G вытекает, что фактор-группы $G/C_G(S_{i+1}/S_i)$, $i = 2, \ldots, m-1$, полициклические.

Пусть

$$H = C_G(S_1) \cap C_G(S_2/S_1) \cap \ldots \cap C_G(S_m/S_{m-1}).$$

Каждый элемент подгруппы H действует тождественно в каждом факторе S_{j+1}/S_j, $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Следовательно, подгруппа H нильпотентна.

Поскольку $AD(G) \leqslant C_G(C_1)$, то по лемме 8 фактор-группа $G/C_G(C_1)$ полициклическая. Отсюда следует, что группа G обладает рядом нормальных подгрупп

$$H \leqslant L \leqslant G,$$

таким что фактор-группа G/L полициклическая, а фактор-группа L/H и подгруппа H нильпотентны. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть A — $\mathbf{D}G$-модуль, G — конечно порождённая разрешимая группа, удовлетворяющая условию* max-nad. *Если A не является артиновым $\mathbf{D}$-модулем и коцентрализатор $AD(G)$ в модуле A также не является артиновым $\mathbf{D}$-модулем, то G содержит нормальную подгруппу L, удовлетворяющую следующим условиям*:

1) *фактор-группа G/L полициклическая*;
2) *$L \leqslant AD(G)$, коцентрализатор подгруппы L в модуле A не является артиновым $\mathbf{D}$-модулем*;
3) *фактор-группа $L/[L, L]$ бесконечно порождённая.*

Доказательство. Пусть

$$\langle 1 \rangle = D_0 \leqslant D_1 \leqslant \ldots \leqslant D_n = G —$$

производный ряд группы G. Если группа G полициклическая, то подгруппа $AD(G)$ также полициклическая. По лемме 1 коцентрализатор подгруппы $AD(G)$ в модуле A является артиновым $\mathbf{D}$-модулем. Противоречие. Следовательно, существует такой номер $m \in \mathbb{N}$, что фактор-группа G/D_m полициклическая, а фактор-группа D_m/D_{m-1} не является конечно порождённой. Положим $L = D_m$. Согласно следствию 4 $L \leqslant AD(G)$. Предположим, что коцентрализатор подгруппы L в модуле A — артинов $\mathbf{D}$-модуль. Тогда ввиду конечной порождённости фактор-группы $AD(G)/L$ по лемме 1 коцентрализатор $AD(G)$ в модуле A также является артиновым $\mathbf{D}$-модулем. Теорема доказана. □

В работе использованы методы доказательства из [4].

Литература

[1] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[2] Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya. Artinian Modules over Group Rings. — Berlin: Birkhäuser, 2007.

[3] Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya. Modules over Dedekind Domains. — Los Angeles: National University, 1996.

[4] Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya. Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension // Publ. Mat. — 2006. — Vol. 50. — P. 103—131.

[5] Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya., Semko N. N. Insight into Modules over Dedekind Domains. — Kiev: National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Mathematics, 2008.

[6] Wehrfritz B. A. F. Infinite Linear Groups. — Berlin: Springer, 1973. — (Ergebnisse Math. ihrer Grenzgebiete).