Допустимые колчаны

В. Н. ЖУРАВЛЁВ
Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко, Украина
e-mail: vshur@univ.kiev.ua

УДК 512.552

Ключевые слова: матрица показателей, черепичный порядок, допустимый колчан.

Аннотация

Охарактеризованы допустимые колчаны в классе взвешенных колчанов.

Abstract

V. N. Zhuravlev, Admissible quivers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 121—128.

We describe admissible quivers in the class of weighted quivers.

1. Введение

Матрицы показателей появились в теории черепичных порядков над дискретно нормированным кольцом. Многие свойства таких порядков и их колчанов полностью определены их матрицами показателей.

В [1, гл. 3] показано, что между стрелками колчана конечномерной базисной алгебры и образующими модуля $V = R/R^2$, где R — радикал Джекобсона алгебры, существует биективное соответствие, которое переносится на образующие радикала. Это позволяет рассматривать каждую расщепимую приведённую алгебру с колчаном S как фактор-алгебру алгебры путей $K(S)$ по некоторому идеалу.

Отметим, что в определении колчана $Q(\mathcal{E})$ приведённой матрицы показателей $\mathcal{E}$ матрица $\mathcal{E}$ соответствует приведённому черепичному порядку Λ, матрица $\mathcal{E}^{(1)}$ соответствует радикалу Джекобсона R порядка Λ, матрица $\mathcal{E}^{(2)}$ соответствует R^2. Тогда матрица смежности $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ определяет структуру Λ-бимодуля $V = R/R^2$.

Мы устанавливаем соответствие между черепичным порядком Λ и взвешенным колчаном $Q(\Lambda)$.

Аналогичные понятия рассматривались в [10].

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 7, с. 121—128.

2. Черепичные порядки над дискретно нормированными кольцами и матрицы показателей

Напомним [2], что *полумаксимальное кольцо* — это полусовершенное полупервичное нётерово справа кольцо A, такое что для каждого примитивного идемпотента $e \in A$ кольцо eAe является дискретно нормированным (не обязательно коммутативным).

Обозначим через $\mathrm{M}_n(B)$ кольцо всех $(n \times n)$-матриц над кольцом B.

Теорема 2.1 (см. [2]). *Каждое полумаксимальное кольцо изоморфно конечному прямому произведению первичных колец вида*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \ldots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \ldots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \ldots & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $n \geqslant 1$, $\mathcal{O}$ — дискретно нормированное кольцо с простым элементом π и α_{ij} — такие целые числа, что

$$\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}, \quad \alpha_{ii} = 0$$

для всех i, j, k.

Кольцо $\mathcal{O}$ вкладывается в классическое тело частных $\mathcal{D}$, и (1) является множеством всех матриц $(a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathcal{D})$, таких что

$$a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O} = e_{ii}\Lambda e_{jj},$$

где $e_{11}, \ldots, e_{nn}$ — матричные единицы $\mathrm{M}_n(\mathcal{D})$.

Ясно, что $Q = \mathrm{M}_n(\mathcal{D})$ — классическое кольцо частных кольца Λ. Очевидно, кольцо Λ является нётеровым справа и слева.

Определение 2.2. Модуль M называется *дистрибутивным*, если его решётка подмодулей является дистрибутивной, т. е.

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$$

для всех подмодулей K, L, N.

Понятно, что любой подмодуль и любой фактор-модуль дистрибутивного модуля являются дистрибутивными модулями.

Прямая сумма дистрибутивных модулей называется *полудистрибутивным модулем*. Кольцо A называется *полудистрибутивным справа* (*слева*), если оно полудистрибутивно как правый (левый) модуль над собой. Кольцо A называется *полудистрибутивным*, если оно полудистрибутивно слева и справа (см. [9]).

Теорема 2.3 (см. [3]). *Следующие условия для полусовершенного полупервичного нётерова справа кольца A эквивалентны*:

1) *кольцо A является полудистрибутивным*;

2) *кольцо A является прямым произведением полупростого артинова кольца и полумаксимального кольца.*

Под черепичным порядком над дискретно нормированным кольцом мы понимаем нётерово первичное полусовершенное полудистрибутивное кольцо Λ с ненулевым радикалом Джекобсона. В этом случае $\mathcal{O} = e\Lambda e$ является дискретно нормированным кольцом для примитивного идемпотента $e \in \Lambda$.

Определение 2.4. Целочисленная матрица $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ называется *матрицей показателей*, если $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$ и $\alpha_{ii} = 0$ для всех i, j, k. Целочисленная матрица $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ называется *приведённой матрицей показателей*, если $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для всех i, j, $i \neq j$.

Мы будем использовать обозначение

$$\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\},$$

где $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ — матрица показателей кольца Λ, т. е.

$$\Lambda = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O},$$

где e_{ij} — матричные единицы. Если черепичный порядок является приведённым, т. е. $\Lambda/R(\Lambda)$ — прямое произведение тел, то $\alpha_{ij}+\alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, и матрица $\mathcal{E}(\Lambda)$ является приведённой.

Обозначим через $\mathcal{M}(\Lambda)$ частично упорядоченное множество (упорядоченное по включению) всех проективных правых Λ-модулей, которые содержатся в фиксированном простом Q-модуле W. Все простые Q-модули изоморфны, поэтому мы можем взять один из них. Заметим, что частично упорядоченные множества $\mathcal{M}_{\mathrm{l}}(\Lambda)$ и $\mathcal{M}_{\mathrm{r}}(\Lambda)$, соответствующие левым и правым модулям, являются антиизоморфными.

Множество $\mathcal{M}(\Lambda)$ полностью определено матрицей показателей $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$. А именно, если Λ является приведённым, то

$$\mathcal{M}(\Lambda) = \{P_i^z \mid i = 1, \ldots, n,\ z \in \mathbb{Z}\},$$

где

$$P_i^z \leqslant P_j^{z'} \iff \begin{cases} z - z' \geqslant \alpha_{ij}, & \text{если}\ \ \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}_l(\Lambda), \\ z - z' \geqslant \alpha_{ji}, & \text{если}\ \ \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}_r(\Lambda). \end{cases}$$

Очевидно, $\mathcal{M}(\Lambda)$ — бесконечное периодическое множество.

Пусть Λ и Γ — черепичные порядки над дискретно нормированными кольцами $\mathcal{O}$ и Δ.

Определение 2.5. Изоморфизм $\varphi\colon \mathcal{M}(\Lambda) \simeq \mathcal{M}(\Gamma)$ называется *согласованным*, если

$$B \simeq C \iff \varphi(B) \simeq \varphi(C)$$

для всех $B, C \in \mathcal{M}(\Lambda)$.

Предложение 2.6 (см. [2, предложение 2.9]). *Черепичные порядки Λ и Γ Морита-эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия*:

1) *дискретно нормированные кольца $\mathcal{O}$ и Δ изоморфны*;
2) *частично упорядоченные множества $\mathcal{M}(\Lambda)$ и $\mathcal{M}(\Gamma)$ согласованно изоморфны.*

Пусть I — двусторонний идеал черепичного порядка Λ. Очевидно,

$$I = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\beta_{ij}}\mathcal{O},$$

где e_{ij} — матричные единицы. Обозначим через $\mathcal{E}(I) = (\beta_{ij})$ матрицу показателей идеала I.

Для двусторонних идеалов I и J кольца Λ с матрицами показателей $\mathcal{E}(I) = (\beta_{ij})$ и $\mathcal{E}(J) = (\gamma_{ij})$ имеем $\mathcal{E}(IJ) = (\delta_{ij})$, где $\delta_{ij} = \min\limits_{k}(\beta_{ik} + \gamma_{kj})$.

Если R — радикал Джекобсона приведённого черепичного порядка Λ, то $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$, где $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ и $\beta_{ij} = 1$ для $i = 1, \ldots, n$.

Пусть $Q(\Lambda)$ — колчан приведённого черепичного порядка Λ [6] и $[Q(\Lambda)]$ — матрица смежности колчана $Q(\Lambda)$. По [6, теорема 14.6.2] $Q(\Lambda)$ — $(0,1)$-матрица, точнее, $[Q(\Lambda)] = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R)$.

Пусть $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — приведённая $(n \times n)$-матрица показателей. Определим $(n \times n)$-матрицы

$$\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}), \quad \beta_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

и

$$\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij}), \quad \gamma_{ij} = \min_{1 \leqslant k \leqslant n}(\beta_{ik} + \beta_{kj}).$$

Очевидно, $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ — $(0,1)$-матрица. По [4, теорема 4.1.1, следствие 5.3] имеем следующее утверждение.

Теорема 2.7. *Матрица $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ является матрицей смежности сильно связного простого колчана $Q = Q(\mathcal{E})$.*

Определение 2.8. Колчан $Q(\mathcal{E})$ называется *колчаном приведённой матрицы показателей $\mathcal{E}$*. Сильно связный простой колчан называется *допустимым*, если он является колчаном приведённой матрицы показателей.

Замечание 2.9. Согласно [4, теорема 4.1.1] колчан $Q(A)$ приведённого черепичного порядка A совпадает с $Q\big(\mathcal{E}(A)\big)$.

Теорема 2.10. *Любой простой сильно связный колчан с петлёй в каждой вершине является допустимым.*

Замечание 2.11. Легко убедиться, что колчан Q с матрицей смежности

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не является допустимым.

3. Допустимые колчаны

Определение 3.1. Колчан $Q = (VQ, AQ)$ называется *взвешенным*, если определена функция $w\colon AQ \to \mathbb{R}$. Функция w называется весовой, а её значение на стрелке называется весом стрелки. Сумма весов всех стрелок пути называется весом пути.

Теорема 3.2. *Сильно связный колчан $Q = (VQ, AQ)$ является допустимым тогда и только тогда, когда существует весовая функция $w\colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, удовлетворяющая следующим условиям*:

1) *вес стрелки из точки i в точку j меньше веса пути из точки i в точку j длины $l \geqslant 2$;*
2) *вес петли в точке i меньше веса любого цикла, проходящего через точку i, длины $l \geqslant 2$;*
3) *вес любого цикла всегда больше или равен* 1;
4) *вес любой петли равен* 1;
5) *через каждую точку без петли проходит цикл длины $l \geqslant 2$, вес которого равен* 1.

Доказательство. Пусть сильно связный колчан $Q = (VQ, AQ)$ является допустимым. Тогда существует такой приведённый черепичный порядок Λ, что $Q(\Lambda) = Q$.

Каждой стрелке σ_{ij} колчана Q, которая ведёт из точки i в точку j, соответствует образующий радикала Джекобсона R черепичного порядка Λ с матрицей показателей $\mathcal{E}(\Lambda) = \mathcal{E}$. Пусть $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$. Образующий радикала, соответствующий стрелке σ_{ij}, имеет вид $\pi^{\beta_{ij}} a_{ij} e_{ij}$, где $a_{ij} \in \mathcal{O}$. Совокупность всех элементов $\left\{\pi^{\beta_{ij}} a_{ij} e_{ij}\right\}$ (по всем стрелкам колчана Q) — это минимальная система образующих радикала R. Любой элемент $r \in R_{ij} = e_{ii} R e_{jj}$ представляется в виде

$$r = \sum \left(\pi^{\beta_{ii_1}} a_{ii_1} e_{ii_1}\right)\left(\pi^{\beta_{i_1 i_2}} a_{i_1 i_2} e_{i_1 i_2}\right) \cdots \left(\pi^{\beta_{i_k j}} a_{i_k j} e_{i_k j}\right),$$

где сумма берётся по всем путям $\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2} \ldots \sigma_{i_k j}$ из точки i в точку j. Поэтому

$$r = \sum \pi^{\beta_{ii_1} + \beta_{i_1 i_2} + \ldots + \beta_{i_k j}} a_{ij} e_{ij},$$

где $a_{ij} \in \mathcal{O}$. Отсюда получаем, что $\beta_{ij} = \min(\beta_{ii_1} + \beta_{i_1 i_2} + \ldots + \beta_{i_k j})$ (здесь минимум берётся по всем путям $\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2} \ldots \sigma_{i_k j}$ из точки i в точку j).

Так как $\beta_{ij}=\alpha_{ij}$ при $i\neq j$, $\beta_{ii}=1$, то имеем равенства

$$\alpha_{ij}=\min(\alpha_{ii_1}+\alpha_{i_1i_2}+\ldots+\alpha_{i_kj}) \quad \text{при} \quad i\neq j,$$
$$1=\min(\alpha_{ii_1}+\alpha_{i_1i_2}+\ldots+\alpha_{i_ki}).$$

Определим весовую функцию $w\colon AQ\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ по правилу $w(\sigma_{ij})=\beta_{ij}$, т. е.

$$w(\sigma_{ij})=\begin{cases}\alpha_{ij}, & \text{если } i\neq j,\\ 1, & \text{если } i=j.\end{cases}$$

Покажем, что определённая таким образом весовая функция w удовлетворяет условиям 1)—5) теоремы.

Допустим, что вес стрелки σ_{ij} больше или равен весу некоторого пути $P(i,j)=\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1i_2}\ldots\sigma_{i_kj}$ из точки i в точку j длины $l\geqslant 2$:

$$\alpha_{ij}\geqslant\alpha_{ii_1}+\alpha_{i_1i_2}+\ldots+\alpha_{i_kj}.$$

Тогда образующий элемент $\pi^{\beta_{ij}}a_{ij}e_{ij}$ линейно выражается через другие образующие элементы

$$\pi^{\beta_{ii_1}}a_{ii_1}e_{ii_1},\ \pi^{\beta_{i_1i_2}}a_{i_1i_2}e_{i_1i_2},\ldots,\ \pi^{\beta_{i_kj}}a_{i_kj}e_{i_kj}.$$

Это противоречит тому, что $\left\{\pi^{\beta_{ij}}a_{ij}e_{ij}\right\}$ — минимальная система образующих радикала Джекобсона R. Следовательно, условия 1) и 2) выполняются.

Порядок Λ приведённый, поэтому $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}\geqslant 1$ при $j\neq i$. Отсюда для любого цикла $\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1i_2}\ldots\sigma_{i_ki}$, учитывая, что $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}\geqslant\alpha_{ik}$ для всех i, j, k, имеем

$$\alpha_{ii_1}+\alpha_{i_1i_2}+\ldots+\alpha_{i_ki}\geqslant\alpha_{ii_k}+\alpha_{i_ki}\geqslant 1.$$

Следовательно, условие 3) выполняется.

Поскольку для петли выполнено $w(\sigma_{ii})=\beta_{ii}=1$, то условие 4) также выполняются.

Элементы матрицы смежности $[Q]=(q_{ij})$ колчана черепичного порядка Λ вычисляются по формулам

$$q_{ij}=\min_k(\beta_{ik}+\beta_{kj}-\beta_{ij}),\quad q_{ii}=\min_k(\beta_{ik}+\beta_{ki}-1).$$

Если вершина i не имеет петли, то $q_{ii}=0$ и существует такое $k\neq i$, что $\beta_{ik}+\beta_{ki}=1$. Отсюда следует, что $\beta_{ik}=0$, $\beta_{ki}=1$ или $\beta_{ik}=1$, $\beta_{ki}=0$.

Если $\beta_{ik}=0$, $\beta_{ki}=1$, то существует путь из точки i в точку k веса 0 и существует путь из точки k в точку i веса 1. Поэтому существует цикл, который проходит через точки i и k веса 1. Аналогично, если $\beta_{ik}=1$ и $\beta_{ki}=0$, то также существует такой цикл. Следовательно, условие 5) выполняется.

Наоборот, пусть Q — сильно связный колчан с весовой функцией $w\colon AQ\to\mathbb{N}\cup\{0\}$, которая удовлетворяет условиям 1)—5). Покажем, что этот колчан является допустимым, т. е. существует приведённая матрица показателей $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})$, такая что $Q(\mathcal{E})=Q$.

Положим $\alpha_{ii}=0$ для всех i и при $i\neq j$ $\alpha_{ij}=\min\limits_{P(i,j)}w\big(P(i,j)\big)$ (минимум берётся по всем путям $P(i,j)$ из точки i в точку j).

Колчан Q сильно связен, поэтому для любого $k \neq i, j$ существует путь $P(i,k)$ из точки i в точку k и существует путь $P(k,j)$ из точки k в точку j. В частности, если $P(i,k)$ — путь из точки i в точку k минимального веса, $P(k,j)$ — путь из точки k в точку j минимального веса, то $w\big(P(i,k)\big) = \alpha_{ik}$, $w\big(P(k,j)\big) = \alpha_{kj}$. Поэтому существует путь из точки i в точку j веса $\alpha_{ik} + \alpha_{kj}$. Для пути $P(i,j)$ минимального веса получаем $w\big(P(i,j)\big) = \alpha_{ij}$ и $\alpha_{ij} \leqslant \alpha_{ik} + \alpha_{kj}$.

Если $k = i$ или $k = j$, то это неравенство является очевидным.

Если допустить, что $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$ для некоторых i, j, $i \neq j$, то по определению α_{ij} существуют пути $P(i,j)$ и $P(j,i)$ нулевого веса. Объединение этих путей является циклом нулевого веса, что противоречит условию 3). Следовательно, $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для всех i, j, $i \neq j$.

Таким образом, $\mathcal{E}$ — приведённая матрица показателей.

Покажем теперь, что колчан этой матрицы показателей совпадает с колчаном Q.

Пусть $[Q(\mathcal{E})] = (\bar{q}_{ij})$, $[Q] = (q_{ij})$.

Напомним, что

$$\bar{q}_{ij} = \min\Big(1, \min_{k \neq i,j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})\Big)$$

при $i \neq j$ и

$$\bar{q}_{ii} = \min\Big(1, \min_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\Big).$$

Если $\bar{q}_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то существует такое $k \neq i, j$, что $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$. Это значит, что существует путь $P(i,j)$ из точки i в точку j минимального веса, проходящий через точку k, причём путь $P(i,j)$ является объединением путей $P(i,k)$ и $P(k,j)$, которые тоже являются путями из i в k и из k в j минимального веса. Тогда в колчане Q нет стрелки из точки i в точку j, ибо в противном случае вес стрелки был бы равен весу пути $P(i,j)$ длины $l \geqslant 2$, что противоречит условию 1). Следовательно, $q_{ij} = 0$.

Если $\bar{q}_{ii} = 0$, то существует такое $k \neq i$, что $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 1$. Это значит, что существуют такие пути $P(i,k)$ и $P(k,i)$, что $w\big(P(i,k)\big) + w\big(P(k,i)\big) = 1$. Объединение этих путей является циклом веса 1. Точка i в колчане Q не имеет петли, ибо по условию 4) вес петли равен 1 и мы получаем противоречие с условием 2): вес петли равен весу цикла. Следовательно, $q_{ii} = 0$.

Пусть $\bar{q}_{ij} = 1$, $i \neq j$. Тогда $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij}$ для всех $k \neq i, j$. Это значит по определению α_{ij}, что не существует вершины k, $k \neq i, j$, такой что путь минимального веса из точки i в точку j проходит через точку k. Поэтому путь минимального веса из точки i в точку j имеет длину, меньшую 2. Такой путь является стрелкой, и $q_{ij} = 1$.

Пусть $\bar{q}_{ii} = 1$. Тогда $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > 1$ для всех $k \neq i$. Это значит, что любой цикл длины $l \geqslant 2$, проходящий через точку i, имеет вес, больший 1. Если предположить, что колчан Q не имеет петли в точке i, то по условию 5) должен существовать цикл, который проходит через точку i и имеет вес 1. Получили противоречие. Поэтому $q_{ii} = 1$. Таким образом, $Q(\mathcal{E}) = Q$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 3.3. Согласно условиям 4) и 5) теоремы либо через каждую точку допустимого колчана проходит цикл веса 1, либо точка имеет петлю.

Литература

[1] Дрозд Ю. А., Кириченко В. В. Конечномерные алгебры. — Киев: Вища школа, 1980.

[2] Завадский А. Г., Кириченко В. В. Модули без кручения над первичными кольцами // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1976. — Т. 57. — С. 100—116.

[3] Кириченко В. В., Хибина М. А. Полусовершенные полудистрибутивные кольца // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. — Киев: Ин-т математики, 1993. — С. 457—480.

[4] Chernousova Zh. T., Dokuchaev M. A., Khibina M. A., Kirichenko V. V., Miroshnichenko S. G., Zhuravlev V. N. Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets. I // Algebra Discrete Math. — 2002. — Vol. 1. — P. 32—63.

[5] Chernousova Zh. T., Dokuchaev M. A., Khibina M. A., Kirichenko V. V., Miroshnichenko S. G., Zhuravlev V. N. Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets. II // Algebra Discrete Math. — 2003. — Vol. 2. — P. 47—86.

[6] Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V. Algebras, Rings and Modules. Vol. 1. — Dordrecht: Kluwer, 2004. — (Math. Appl.; Vol. 575).

[7] Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V. Algebras, Rings and Modules. Vol. 2. — Dordrecht: Springer, 2007. — (Math. Appl.; Vol. 586).

[8] Kirichenko V. V., Zelensky A. V., Zhuravlev V. N. Exponent matrices and tiled orders over discrete valuation rings // Algebra Comput. — 2005. — Vol. 15, no. 5-6. — P. 997—1012.

[9] Tuganbaev A. A. Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht: Kluwer, 1998.

[10] Wiedemann A., Roggenkamp K. W. Path order of global dimension two // J. Algebra. — 1983. — Vol. 80. — P. 113—133.