

Полугруппы отображений, сохраняющих бинарное отношение

И. Б. КОЖУХОВ, В. А. ЯРОШЕВИЧ

Московский государственный институт
электронной техники
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

УДК 512.562

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, квазиупорядоченное множество, регулярная полугруппа, транзитивное замыкание, множество Айзенштат, полугруппа бинарных отношений.

Аннотация

Рассматриваются полугруппы частичных и полных преобразований множества X , сохраняющих бинарное отношение σ , заданное на X . Более подробно рассмотрен случай, когда σ — отношение порядка или квазипорядка. Приведены условия регулярности таких полугрупп. Вводятся два определения сохранения σ на полугруппе бинарных отношений. Доказывается, что подмножества $B(X)$, сохраняющие σ , в обоих случаях образуют полугруппы. Получено условие регулярности полугруппы $B_\sigma(X)$, в случае когда $\sigma(X)$ — квазипорядок.

Abstract

I. B. Kozhukhov, V. A. Yaroshevich, Transformation semigroups preserving a binary relation, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 129–135.

We investigate the semigroups of full and partial transformations of a set X which preserve a binary relation σ defined on X . We consider in detail the case where σ is an order or a quasi-order relation. There are conditions of regularity of such semigroups. We introduce two definitions of preservation of σ for the semigroup of binary relations. It is proved that subsets of $B(X)$ preserving σ are semigroups in each case. We give the condition of regularity of $B_\sigma(X)$ in the case where $\sigma(X)$ is a quasi-order.

Для произвольного множества X пусть $T(X)$ — полугруппа преобразований $\alpha: X \rightarrow X$ с умножением $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$. Далее, пусть $PT(X)$ — множество всех частичных отображений, т. е. отображений $\beta: X_1 \rightarrow X$, где $X_1 \subseteq X$. Множество X_1 называется областью определения отображения β и обозначается $\text{Dom } \beta$. Умножение в полугруппе $PT(X)$ осуществляется по правилу $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ при $x \in \text{Dom } \alpha \cap (\text{Dom } \beta)\alpha^{-1}$. Наконец, пусть $B(X)$ — полугруппа бинарных отношений на множестве X . Пусть $\sigma \in B(X)$. Для $x \in X$ положим $A_x = \{y \mid (x, y) \in \sigma\}$. Тогда σ можно рассматривать как многозначное отображение $x \mapsto A_x$. Очевидно, $T(X)$ и $PT(X)$ — подполугруппы полугруппы $B(X)$ и $T(X) \subseteq PT(X) \subseteq B(X)$. При $|X| > 1$ имеем $T(X) \subset PT(X) \subset B(X)$. В случае

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 7, с. 129–135.

© 2008 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

когда X — конечное множество, элементы этих полугрупп можно записывать как обычные подстановки. Например, если $X = \{1, 2, 3, 4\}$, то

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in T(X), \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & - & 2 & 3 \end{pmatrix} \in PT(X),$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ - & \{1, 3, 4\} & 2 & \{1, 2\} \end{pmatrix} \in B(X).$$

Известно и другое представление элементов полугруппы $B(X)$, а именно представление в виде матриц из 0 и 1 (булевых матриц). Элемент $\sigma \in B(X)$ в этом случае представляется в виде матрицы $\sigma = \|\sigma_{ij}\|_{i,j \in X}$, где

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \in \sigma, \\ 0, & \text{если } (i, j) \notin \sigma. \end{cases}$$

Например, приведённый выше элемент γ можно представить следующим образом:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть X — множество, на котором задано бинарное отношение σ , и $\alpha: X \rightarrow X$ — отображение. Будем говорить, что α *сохраняет* σ , если

$$\forall x, y \in X \quad (x, y) \in \sigma \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in \sigma. \quad (1)$$

Отметим, что задание на множестве X бинарного отношения σ равносильно заданию графа с множеством вершин X , а отображение $\alpha: X \rightarrow X$, сохраняющее отношение σ , — эндоморфизм этого графа. Понятие эндоморфизма графа допускает ряд модификаций, обобщающих определение (1) (см. [5, 6]). Обзор работ по полугруппам эндоморфизмов графов представлен в [8].

Необходимое и достаточное условие сохранения отношения σ даёт следующее предложение.

Предложение 1 [3, предложение 1]. Отображение $\alpha \in T(X)$ сохраняет отношение σ в том и только том случае, если $\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma$ (в смысле произведения бинарных отношений).

Обозначим через $T_\sigma(X)$ множество всех $\alpha \in T(X)$, которые сохраняют σ . Ввиду предложения 1 имеем $T_\sigma(X) = \{\alpha \in T(X) \mid \sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma\}$. Нетрудно проверить, что $T_\sigma(X)$ — подполугруппа полугруппы $T(X)$, даже подмоноид. В случае когда σ — отношение порядка или квазипорядка на множестве X , полугруппу $T_\sigma(X)$ называют полугруппой изотонных преобразований. Эта полугруппа несёт информацию о строении квазиупорядоченного множества X . Л. М. Глуский доказал [2], что если для двух квазиупорядоченных множеств X и Y полугруппы $T_\sigma(X)$ и $T_\sigma(Y)$ изоморфны, то множества X и Y изоморфны или антиизоморфны.

Интересен вопрос о регулярности полугруппы $T_\sigma(X)$. Если σ — отношение порядка, то необходимые и достаточные условия регулярности полугруппы $T_\sigma(X)$ получены в [1], более прозрачные условия, в случае когда (X, σ) — цепь, — в [4].

Для элементов полугруппы $PT(X)$ «сохранение σ » можно понимать двояко.

Определение 1. Частичное отображение $\alpha \in PT(X)$ *допустимо* для σ , если

$$\forall x, y \in \text{Dom } \alpha \quad (x, y) \in \sigma \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in \sigma. \quad (2)$$

Определение 2. Частичное отображение $\alpha \in PT(X)$ *согласуется* с σ , если

$$\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma. \quad (3)$$

Пусть

$$PT_\sigma(X) = \{\alpha \in PT(X) \mid \alpha \text{ допустимо для } \sigma\},$$

$$\widetilde{PT}_\sigma(X) = \{\alpha \in PT(X) \mid \alpha \text{ согласуется с } \sigma\}.$$

Нетрудно проверить, что $PT_\sigma(X)$ и $\widetilde{PT}_\sigma(X)$ — моноиды, являющиеся подмоноидами моноида $PT(X)$. Следующее предложение показывает, что $\widetilde{PT}_\sigma(X) \subseteq PT_\sigma(X)$.

Предложение 2 [3, предложение 2]. Для любого $\alpha \in PT(X)$ справедлива импликация $(3) \Rightarrow (2)$, но существуют примеры, когда $(2) \not\Rightarrow (3)$.

Из условия (3) следует условие

$$\forall x, y \in X \quad ((x, y) \in \sigma \ \& \ y \in \text{Dom } \alpha \Rightarrow x \in \text{Dom } \alpha). \quad (4)$$

Предложение 3 [3, предложение 3]. Для любого $\alpha \in PT(X)$ справедлива импликация $(2) \ \& \ (4) \Rightarrow (3)$.

Рассмотрим теперь более подробно случай, когда σ — квазипорядок. Будем обозначать этот квазипорядок через $\leq$.

Теорема 1 [3, теорема 1]. Пусть $(X, \leq)$ — квазиупорядоченное множество. Полугруппа $PT_{\leq}(X)$ регулярна в том и только том случае, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) X — антицепь;
- 2) X — цепь;
- 3) $x \leq y$ при всех $x, y \in X$.

Обозначим через Δ отношение равенства на множестве X . Для $\sigma \subseteq X \times X$ транзитивное замыкание отношения σ будем обозначать через σ^t . Наконец, обозначим через ω какой-нибудь линейный порядок на множестве X . Для отношения σ , удовлетворяющего условиям $\Delta \subseteq \sigma \subseteq \omega$, $\sigma^t = \omega$, вопрос о регулярности полугруппы $PT_\sigma(X)$ решается следующим утверждением.

Предложение 4. Пусть σ — бинарное отношение на X , $\Delta \subseteq \sigma \subseteq \omega$, где ω — линейный порядок и $\sigma^t = \omega$. Если полугруппа $PT_\sigma(X)$ регулярна, то $\sigma = \omega$.

Доказательство. Пусть $\sigma \neq \omega$. Возьмём пару $(a, b) \in \omega \setminus \sigma$. Так как $\sigma^t = \omega$, то $\sigma \neq \Delta$, поэтому существует пара $(c, d) \in \sigma \setminus \Delta$. Положим $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Очевидно, $\alpha \in \text{PT}_\sigma(X)$. Если $\beta \in \text{PT}_\sigma(X)$ — такой элемент, что $\alpha\beta\alpha = \alpha$, то $c, d \in \text{Dom } \beta$ и $c\beta = a$, $d\beta = b$, откуда видно, что β не сохраняет отношение σ . Это противоречит выбору β . Отсюда получаем, что α — нерегулярный элемент полугруппы $\text{PT}_\sigma(X)$. $\square$

Вопрос о том, при каких условиях на множество (X, σ) полугруппа $\widetilde{\text{PT}}_\sigma(X)$ является регулярной, является более сложным и до конца не решённым даже в случае, когда σ — отношение частичного порядка.

Назовём *множеством Айзенштат* одно из следующих частично упорядоченных множеств.

1. Для произвольного множества I пусть $L_I = \{a, c\} \cup \{b_i \mid i \in I\}$ с таким отношением порядка, что $a < b_i < c$ при всех $i \in I$ (рис. 1).

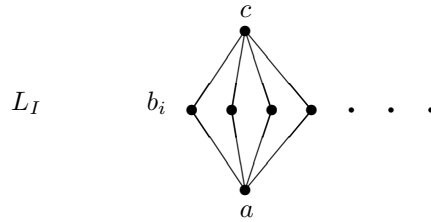


Рис. 1

2. Пусть Y, Z — произвольные непустые непересекающиеся множества. Положим $F_{Y,Z} = Y \cup Z$, отношение порядка на $F_{Y,Z}$ определим следующим образом: $y < z$ при $y \in Y, z \in Z$, остальные пары элементов несравнимы. Граф этого множества — полный двудольный граф (рис. 2).
3. Для произвольных непустых непересекающихся множеств Y, Z с выделенными в них элементами $y_0 \in Y, z_0 \in Z$ положим $G_{Y,Z} = Y \cup Z$ и

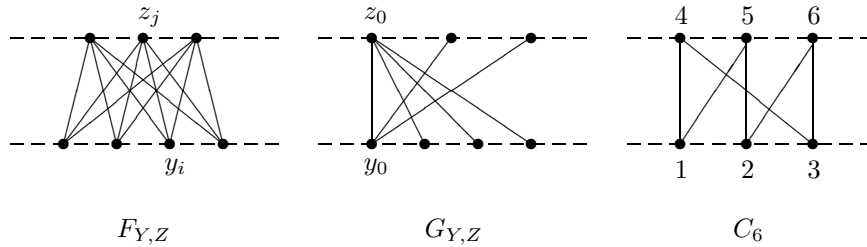


Рис. 2

определим порядок следующим образом: $y_0 < z$, $y < z_0$, $y \in Y$, $z \in Z$, остальные пары элементов несравнимы (см. рис. 2).

4. Наконец, пусть $C_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, где $1 < 4$, $1 < 5$, $2 < 5$, $2 < 6$, $3 < 6$, $3 < 4$ (см. рис. 2).

Предложение 5. Пусть X — частично упорядоченное отношением $\leq$ множество, не являющееся цепью или антицепью. Если полугруппа $\widetilde{PT}_{\leq}(X)$ регулярна, то X — множество Айзенштат.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [7], основывающемуся на серии из десяти лемм, поэтому здесь приводить его мы не будем. $\square$

Отметим, что если $(X, \leq)$ — цепь, то полугруппа $\widetilde{PT}_{\leq}(X)$ не обязательно является регулярной, как показывает следующий пример.

Пример 1. Пусть $X = \{-1, -2, -3, \dots\} \cup \{-1', -2', -3', \dots\}$, где порядок среди элементов $-n$ обычный, среди $-n'$ также обычный и, кроме того, $-m < -n'$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$. Обозначим через α частичное отображение с областью определения $\text{Dom } \alpha = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$, причём $(-n)\alpha = -n'$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что α — нерегулярный элемент полугруппы $\widetilde{PT}_{\leq}(X)$. Действительно, пусть $\alpha\beta\alpha = \alpha$ для некоторого $\beta \in \widetilde{PT}_{\leq}(X)$. Тогда $(-n)\alpha = (-n)\alpha\beta\alpha$, т. е. $-n' = (-n')\beta\alpha$. Отсюда получаем, что $(-n')\beta = -n$, поэтому $-n' \in \text{Dom } \beta$ при всех n . Из условия (4) получаем, что $-n \in \text{Dom } \beta$ при всех n . Так как $-n < -k'$ при всех n, k , то $(-n)\beta \leq (-k')\beta$. Имеем $(-n)\beta \leq -k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Но элемента x , удовлетворяющего неравенству $x \leq -k$ при всех k , не существует. Полученное противоречие показывает, что элемент β не существует, а значит, α нерегулярный.

Перейдём теперь к полугруппе бинарных отношений. Как было сказано выше, элементы полугруппы $B(X)$ можно представить в виде булевых матриц. Умножению бинарных отношений соответствует умножение булевых матриц, осуществляемое по правилу $(\sigma\tau)_{ij} = \bigvee_k \sigma_{ik}\tau_{kj}$, где $\bigvee$ — дизъюнкция. При этом матрицы необязательно конечные, их произведение существует всегда, так как $\{0, 1\}$ — полная решётка. Если $x \in X$ и $\rho \in B(X)$, полагаем $x\rho = \{y \mid (x, y) \in \rho\}$.

Пусть σ — бинарное отношение на множестве X .

Определение 3. Элемент $\alpha \in B(X)$ сохраняет σ в узком смысле, если

$$\forall x, y \in X \forall u, v \in X (u \in x\alpha \ \& \ v \in y\alpha \ \& \ (x, y) \in \sigma \Rightarrow (u, v) \in \sigma).$$

Определение 4. Элемент $\alpha \in B(X)$ сохраняет σ в широком смысле, если

$$\forall x, y \in X (x, y) \in \sigma \Rightarrow (\exists u \in x\alpha \ \exists v \in y\alpha : (u, v) \in \sigma).$$

Положим

$$\begin{aligned} B_{\sigma}(X) &= \{\alpha \in B(X) \mid \alpha \text{ сохраняет } \sigma \text{ в узком смысле}\}, \\ B'_{\sigma}(X) &= \{\alpha \in B(X) \mid \alpha \text{ сохраняет } \sigma \text{ в широком смысле}\}. \end{aligned}$$

Лемма 1. $\alpha \in B_\sigma(X)$, если и только если $\alpha^{-1}\sigma\alpha \subseteq \sigma$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in B_\sigma(X)$ и $(u, v) \in \alpha^{-1}\sigma\alpha$. Тогда $(u, x) \in \alpha^{-1}$, $(x, y) \in \sigma$, $(y, v) \in \alpha$ при некоторых $x, y \in X$. Имеем: $u \in x\alpha$, $v \in y\alpha$, $(x, y) \in \sigma$. Так как $\alpha \in B_\sigma(X)$, то $(u, v) \in \sigma$. Таким образом, $\alpha^{-1}\sigma\alpha \subseteq \sigma$.

Наоборот, пусть $\alpha^{-1}\sigma\alpha \subseteq \sigma$ и $u \in x\alpha$, $v \in y\alpha$, $(x, y) \in \sigma$. Тогда $(u, v) \in \alpha^{-1}\sigma\alpha \subseteq \sigma$. Получаем, что $(u, v) \in \sigma$. Следовательно, $\alpha \in B_\sigma(X)$. $\square$

Предложение 6. $B_\sigma(X)$ — полугруппа.

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in B_\sigma(X)$. Тогда

$$(\alpha\beta)^{-1}\sigma(\alpha\beta) = \beta^{-1}\alpha^{-1}\sigma\alpha\beta \subseteq \beta^{-1}\sigma\beta \subseteq \sigma,$$

поэтому по лемме 1 $\alpha\beta \in B_\sigma(X)$. $\square$

Из предложения 6 непосредственно следует, что $T_\sigma(X)$ и $PT_\sigma(X)$ — подполугруппы полугруппы $B_\sigma(X)$.

Лемма 2. $\alpha \in B'_\sigma(X)$, если и только если $\alpha\sigma\alpha^{-1} \supseteq \sigma$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in B'_\sigma(X)$ и $(i, j) \in \sigma$. Тогда найдутся такие k и l , что $(i, k) \in \alpha$, $(j, l) \in \alpha$ и $(k, l) \in \sigma$. Отсюда получаем, что $(i, j) \in \alpha\sigma\alpha^{-1}$.

Предположим, что $\alpha\sigma\alpha^{-1} \supseteq \sigma$. Пусть $(i, j) \in \sigma$. Тогда $(i, j) \in \alpha\sigma\alpha^{-1}$. Следовательно, существуют такие p и q , что $(i, p) \in \alpha$, $(p, q) \in \sigma$ и $(q, j) \in \alpha^{-1}$. Ясно, что $(j, q) \in \alpha$. Следовательно, существуют такие p и q , что $p \in i\alpha$, $q \in j\alpha$ и $(p, q) \in \sigma$. Значит, $\alpha \in B'(X)$. $\square$

Предложение 7. $B'_\sigma(X)$ — полугруппа.

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in B'_\sigma(X)$. Тогда

$$(\alpha\beta)\sigma(\alpha\beta)^{-1} = \alpha\beta\sigma\beta^{-1}\alpha^{-1} \supseteq \alpha\sigma\alpha^{-1} \supseteq \sigma,$$

поэтому по лемме 2 $\alpha\beta \in B'_\sigma(X)$. $\square$

Ни одна из полугрупп $B_\sigma(X)$ и $B'_\sigma(X)$ в общем случае не содержит другую. Приведём соответствующие примеры.

Пример 2. Пусть $(x, y) \in \sigma$. Положим

$$\alpha = \begin{pmatrix} x & y \\ - & y \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\alpha \in B_\sigma(X)$ и $\alpha \notin B'_\sigma(X)$.

Пример 3. Пусть $(x, y) \in \sigma$, $(x, y') \notin \sigma$. Положим

$$\beta = \begin{pmatrix} x & y & y' \\ x & \{y, y'\} & y' \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\beta \in B'_\sigma(X)$ и $\beta \notin B_\sigma(X)$.

Рассмотрим теперь случай, когда отношение σ является рефлексивным и антисимметричным.

Предложение 8. Если σ — рефлексивное антисимметричное отношение на множестве X , то $B_\sigma(X) \subseteq PT(X)$, а значит, $B_\sigma(X) = PT_\sigma(X)$.

Доказательство. Пусть σ рефлексивно и антисимметрично. Для доказательства леммы достаточно показать, что $|x\alpha| = 1$ при $\alpha \in B_\sigma(X)$, $x \in \text{Dom } \alpha$. Предположим, что $|x\alpha| \geq 2$, и пусть $y_1 \neq y_2$ — такие элементы из X , что $(x, y_1), (x, y_2) \in \alpha$. Так как σ рефлексивно, то $(x, x) \in \sigma$. Так как $\alpha \in B_\sigma(X)$ и $y_1, y_2 \in x\alpha$, то $(y_1, y_2) \in \sigma$ и $(y_2, y_1) \in \sigma$. Но это противоречит антисимметричности отношения σ . $\square$

Из предложения 8 и теоремы 1 непосредственно следует следующее утверждение.

Предложение 9. Если $(X, \leq)$ — частично упорядоченное множество, то полугруппа $B_\sigma(X)$ регулярна в том и только том случае, когда X — цепь или антицепь.

Литература

- [1] Айзенштат А. Я. Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств // Учёные записки Ленинградского гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена. — 1968. — Т. 387. — С. 3—11.
- [2] Глускин Л. М. Полугруппы изотонных преобразований // Успехи мат. наук. — 1961. — Т. 16, № 5. — С. 157—162.
- [3] Ярошевич В. А. Полугруппы частичных изотонных преобразований квазиупорядоченных множеств // Сиб. мат. журн. — В печати.
- [4] Adams M. E., Gould M. Posets whose monoids of order-preserving maps are regular // Order. — 1989. — Vol. 6, No. 2. — P. 195—201.
- [5] Bötcher M., Knauer U. Endomorphism spectra of graphs // Discrete Math. — 1992. — Vol. 109. — P. 45—57.
- [6] Bötcher M., Knauer U. Postscript: “Endomorphism spectra of graphs” // Discrete Math. — 2003. — Vol. 270. — P. 329—331.
- [7] Kim V. I., Kozhukhov I. B. Weakly regular semigroups of isotone transformations // Filomat. — В печати.
- [8] Molchanov V. A. Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. — 1983. — Vol. 27. — P. 155—199.

