Первичные и полупервичные решёточно упорядоченные алгебры Ли

Ю. В. КОЧЕТОВА
Московский педагогический государственный университет

УДК 512.554.3

Ключевые слова: решёточно упорядоченная алгебра Ли, первичный идеал, l-первичная алгебра Ли, первичный радикал, l-полупервичная алгебра Ли.

Аннотация

В теории алгебр Ли изучаются первичные и полупервичные алгебры Ли. В работе рассматривается возможность обобщения этих понятий на класс l-алгебр Ли над частично упорядоченным полем. В статье введены понятия l-первичной алгебры Ли и l-полупервичной алгебры Ли, получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы l-алгебра Ли являлась l-полупервичной алгеброй Ли. Также описаны свойства l-первичных алгебр Ли.

Abstract

J. V. Kochetova, Prime and semiprime lattice ordered Lie algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 137—143.

The concepts of prime Lie algebras and semiprime Lie algebras are important in the study of Lie algebras. The purpose of this paper is to investigate generalizations of these concepts to lattice ordered Lie algebras over partially ordered fields. Some results concerning the properties of l-prime and l-semiprime lattice ordered Lie algebras are obtained. A necessary and sufficient condition for a lattice ordered Lie algebra to be an l-prime Lie l-algebra is presented.

1. Введение

Вопрос об изучении l-первичных и l-полупервичных алгебр Ли возник у автора в связи с исследованием в работе [5] l-первичного радикала l-алгебр Ли над частично упорядоченным полем.

Поскольку понятие первичного радикала алгебры Ли тесно связано с понятием первичной алгебры Ли (см., например, [8]), то при изучении l-первичного радикала l-алгебр Ли автором было введено понятие l-первичной решёточно упорядоченной алгебры Ли как аналог понятия первичной алгебры Ли.

Важное место в изучении первичного радикала алгебр Ли также занимают полупервичные алгебры Ли, так как первичный радикал алгебры Ли равен нулю тогда и только тогда, когда алгебра Ли является полупервичной (см. [8, теорема

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 7, с. 137—143.

2.3.2]). Поэтому возникает естественный вопрос о введении понятия l-полупервичной алгебры Ли над частично упорядоченным полем, а также о возможности распространения результатов, касающихся полупервичных алгебр Ли, на l-полупервичные решёточно упорядоченные алгебры Ли.

В данной статье введено понятие l-полупервичной решёточно упорядоченной алгебры Ли, изучены свойства l-полупервичных и l-первичных l-алгебр Ли над частично упорядоченным полем, а также проведено исследование l-первичного радикала l-полупервичных алгебр Ли.

Понятие частично упорядоченной алгебры Ли над частично упорядоченным полем было введено В. М. Копытовым [1].

Определение 1. Решёточно упорядоченной алгеброй Ли L над частично упорядоченным полем K называется алгебра Ли над полем K, на которой задано отношение порядка $\leqslant$, такое что

1) $\langle L; +; 0; -; \leqslant\rangle$ — решёточно упорядоченная группа [2];
2) для любых элементов $x, y \in L$, $\lambda \in K$ из неравенств $x \leqslant y$, $\lambda \geqslant 0$ следует неравенство $\lambda x \leqslant \lambda y$;
3) для любых элементов $x, y, z \in L$ из неравенства $x \leqslant y$ следует неравенство $x + [x, z] \leqslant y + [y, z]$.

Напомним, что *идеалом* в алгебре Ли L называется такое подпространство I в L, что из $x \in L$, $y \in I$ следует, что $[x, y] \in I$. Идеал I частично упорядоченной алгебры Ли L над частично упорядоченным полем K называется *выпуклым*, если I является выпуклым подмножеством в L. Выпуклый идеал l-алгебры Ли, являющийся подрешёткой этой алгебры, называется *l-идеалом* [2, 3].

Как отмечалось выше, при изучении l-первичного радикала l-алгебр Ли автором было сформулировано определение l-первичной l-алгебры Ли.

Определение 2. *l-первичной* решёточно упорядоченной алгеброй Ли L над частично упорядоченным полем будем называть такую l-алгебру Ли, в которой произведение

$$[I, J] = \left\{ z \in L \mid z = \sum_{i=1}^{n=n(z)} [x_i, y_i],\ x_i \in I,\ y_i \in J \right\}$$

любых двух её ненулевых l-идеалов I и J отлично от нуля.

В разделе 2 доказаны свойства l-первичных l-алгебр Ли, являющиеся необходимыми и достаточными условиями l-первичности l-алгебры Ли над частично упорядоченным полем, и на основании этого сформулировано иное определение l-первичной алгебры Ли, эквивалентное приведённому выше определению 2.

Напомним, что алгебра Ли называется *полупервичной*, если она не содержит ненулевых абелевых идеалов (см., например, [8, с. 40]). По аналогии с данным определением сформулируем определение l-полупервичной l-алгебры Ли.

Определение 3. l-алгебра Ли L над частично упорядоченным полем K называется *l-полупервичной*, если она не содержит ненулевых абелевых l-идеалов, т. е. для любого l-идеала $I \neq \{0\}$ в L верно соотношение $[I, I] \neq \{0\}$.

В разделе 3 доказаны некоторые свойства l-полупервичных алгебр Ли. В частности, приводится необходимое и достаточное условие того, что решёточно упорядоченная алгебра Ли является l-полупервичной.

Теорема 1. *l-алгебра Ли L над частично упорядоченным полем K является l-полупервичной тогда и только тогда, когда её l-первичный радикал $l\text{-}\mathrm{rad}(L)$ равен $\{0\}$.*

В статье используется общепринятая для частично упорядоченных алгебраических систем терминология (см. [2, 9]).

2. l-первичные l-алгебры Ли

Для доказательства свойств l-первичных l-алгебр Ли нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 1 [6, теорема 12]. *Если L — l-алгебра Ли над частично упорядоченным полем K, а I — l-идеал l-алгебры Ли L, то канонический гомоморфизм $\varepsilon\colon L \to L/I$ является l-гомоморфизмом l-алгебр Ли L и L/I.*

Также напомним, что l-идеал P решёточно упорядоченной алгебры Ли L над частично упорядоченным полем K называется *l-первичным идеалом*, если L/P является l-первичной l-алгеброй Ли над частично упорядоченным полем K (см. [4]). l-первичным радикалом $l\text{-}\mathrm{rad}(L)$ l-алгебры Ли L над частично упорядоченным полем называется пересечение всех l-первичных l-идеалов из L (см. [5]).

Рассмотрим необходимые и достаточные условия l-первичности произвольной l-алгебры Ли над частично упорядоченным полем.

Предложение 2. *Пусть L — l-алгебра Ли над частично упорядоченным полем K. Алгебра Ли L является l-первичной тогда и только тогда, когда нулевой l-идеал является l-первичным в L.*

Доказательство. Заметим, что по предложению 1 и определению изоморфизма алгебр Ли l-алгебры Ли L и $L/\{0\}$ являются l-изоморфными. Поэтому можно считать, что $L = L/\{0\}$.

Пусть l-алгебра Ли L является l-первичной. По доказанному выше это влечёт l-первичность l-алгебры Ли $L/\{0\}$. Отсюда по определению l-первичного идеала заключаем, что нулевой l-идеал $\{0\}$ является l-первичным в L.

Обратно, если нулевой l-идеал является l-первичным в L, то по определению l-первичного идеала l-алгебра Ли $L/\{0\}$ является l-первичной. Значит, по доказанному выше L также l-первична. □

Предложение 3. *Пусть L — l-алгебра Ли над частично упорядоченным полем K. Алгебра Ли L является l-первичной тогда и только тогда, когда для любых l-идеалов U и V в L из $I_{[U,V]} = \{0\}$ следует, что $U = \{0\}$ или $V = \{0\}$.*

Доказательство. Если l-алгебра Ли L l-первична, то по предложению 2 нулевой l-идеал является в L l-первичным. По [4, теорема 1] отсюда получаем, что для любых l-идеалов U и V в L из $I_{[U,V]} \subseteq \{0\}$ следует, что $U \subseteq \{0\}$ или $V \subseteq \{0\}$. Так как нулевой l-идеал содержится в любом другом l-идеале l-алгебры Ли L, то из выписанного условия выводим, что для всех l-идеалов U и V в L из равенства $I_{[U,V]} = \{0\}$ следует, что $U = \{0\}$ или $V = \{0\}$.

Пусть для любых l-идеалов U и V в L равенство $I_{[U,V]} = \{0\}$ влечёт хотя бы одно из равенств $U = \{0\}$ и $V = \{0\}$. По [4, теорема 1] отсюда следует l-первичность нулевого l-идеала из L. Применяя предложение 2, получаем, что l-алгебра Ли L l-первична. □

Для l-идеалов U и V l-алгебры Ли L будем называть l-идеал $I_{[U,V]}$ их *l-произведением*. Тогда, учитывая предложение 3, можно сформулировать следующее определение l-первичной l-алгебры Ли, эквивалентное определению 2.

Определение 4. l-алгебра Ли L над частично упорядоченным полем K называется l-первичной l-алгеброй Ли, если l-произведение любых двух её ненулевых l-идеалов отлично от нуля или, иначе говоря, из равенства $I_{[U,V]} = \{0\}$ следует, что $U = \{0\}$ или $V = \{0\}$ для любых l-идеалов U и V l-алгебры Ли L.

3. l-полупервичные l-алгебры Ли

В данном разделе рассматриваются свойства l-полупервичных l-алгебр Ли над частично упорядоченным полем, в частности, доказывается утверждение, аналогичное следующей теореме.

Теорема 2 [8, теорема 2.3.2]. *Алгебра Ли L над полем является полупервичной тогда и только тогда, когда её первичный радикал равен нулю.*

Для элемента $a \in L$ будем обозначать I_a и называть *главным l-идеалом* l-алгебры Ли L, порождённым элементом a, l-идеал l-алгебры Ли L над частично упорядоченным полем, являющийся пересечением всех l-идеалов в L, содержащих элемент a (см. [5]).

Для доказательства свойств l-полупервичных алгебр Ли нам понадобятся следующие два утверждения, доказанные в [6].

Предложение 4 [6, теорема 13]. *Пусть L — l-алгебра Ли над частично упорядоченным полем K, I и A — l-идеалы l-алгебры Ли L. Тогда множество*

$$\bar{A} = \{T \in L/I \mid T \cap A \neq \varnothing\}$$

является l-идеалом фактор-алгебры L/I.

Предложение 5 [6, теорема 25; 7, теорема 3]. *Пусть I — l-идеал l-алгебры Ли L над частично упорядоченным полем K. Полный прообраз любого l-идеала $\bar{J}$ фактор-алгебры L/I при каноническом гомоморфизме $\varepsilon\colon L \to L/I$ является l-идеалом l-алгебры Ли L.*

Прежде чем сформулировать необходимое и достаточное условие того, что решёточно упорядоченная алгебра Ли является l-полупервичной, докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Решёточно упорядоченная алгебра Ли L над частично упорядоченным полем K является l-полупервичной тогда и только тогда, когда для всех $a \in L$ из равенства $(I_a)^2 = 0$ следует, что $a = 0$.*

Доказательство. Пусть l-алгебра Ли L является l-полупервичной. Предположим, что для некоторого $a \in L$ справедливо равенство $(I_a)^2 = 0$. Так как $(I_a)^2 = [I_a, I_a] = 0$, то l-идеал I_a является абелевым, что по определению l-полупервичной l-алгебры Ли влечёт равенство $I_a = 0$. Следовательно, $a = 0$, так как в противном случае $I_a \neq 0$.

Пусть теперь для всех $a \in L$ из равенства $(I_a)^2 = 0$ следует, что $a = 0$. Рассмотрим произвольный l-идеал I, удовлетворяющий условию $I^2 = 0$, и произвольный элемент $b \in I$. Тогда $I_b \subseteq I$, поэтому $(I_b)^2 \subseteq I^2 = 0$, следовательно, $(I_b)^2 = 0$. Отсюда по условию леммы получаем, что $b = 0$. Так как элемент b l-идеала I был произвольным, то $I = 0$. Таким образом, L не содержит ненулевых абелевых l-идеалов, поэтому является l-полупервичной. □

Лемма 2. *Пусть I — такой l-идеал l-алгебры Ли L над частично упорядоченным полем K, что фактор-алгебра L/I l-полупервична. Тогда для каждого элемента $b \notin I$ существует такой l-первичный идеал P, что $P \supseteq I$ и $b \notin P$.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $b_0 = b$. Допустим, что $(I_{b_0})^2 \subseteq I$. По предложению 4 найдётся l-идеал $\bar{I}_{b_0}$ в L/I, соответствующий l-идеалу I_{b_0}, при этом

$$[\bar{I}_{b_0}, \bar{I}_{b_0}] = \left\{ t = \sum_{i=1}^{n(t)} [x_j + I, y_j + I] \mid x_j, y_j \in I_{b_0} \right\}.$$

Так как для любых элементов $x, y \in I_{b_0}$ выполнено равенство

$$[x + I, y + I] = [x, y] + [x, I] + [I, y] + [I, I]$$

и $[x, I]$, $[I, y]$, $[I, I] \subseteq I$ и $[x, y] \subseteq (I_{b_0})^2 \subseteq I$, то $(\bar{I}_{b_0})^2 \subseteq I$. Таким образом, l-идеал $\bar{I}_{b_0}$ является абелевым l-идеалом в L/I. В силу l-полупервичности фактор-алгебры L/I имеем $\bar{I}_{b_0} = I$. Следовательно, $I_{b_0} = I$, и поэтому $b_0 \in I$, что противоречит условию $b \notin I$. Значит, $(I_{b_0})^2 \nsubseteq I$.

Пусть $b_1 \in (I_{b_0})^2 \setminus I$. Так как $b_1 \notin I$, то, рассуждая как выше, получаем, что $(I_{b_1})^2 \nsubseteq I$. Выберем элемент $b_2 \in (I_{b_1})^2 \setminus I$ и повторим рассуждения. Построим последовательность $\{b_i \in L \mid i \in \mathbb{N}\}$, начинающуюся с элемента $b_0 = b$, ни один элемент $b_i \in (I_{b_{i+1}})^2$ которой не принадлежит l-идеалу I, т. е. $b_i \notin I$.

Рассмотрим максимальный l-идеал P, такой что $P \supseteq I$ и P не содержит ни одного элемента построенной последовательности. Он существует согласно лемме Цорна. Покажем, что l-идеал P является l-первичным. Для этого нужно доказать, что фактор-алгебра L/P l-первична, поэтому рассмотрим такие l-идеалы $\bar{U}$, $\bar{V}$ в L/P, что $\bar{U} \neq P$, $\bar{V} \neq P$. Им по предложению 5 соответствуют

l-идеалы U, V в L. Если $U = \{a \in L \mid a + P \in \bar{U}\} \subseteq P$, то $\bar{U} \subseteq P$, что противоречит выбору l-идеала $\bar{U} \neq P$. Таким образом, $U \not\subseteq P$ и аналогично $V \not\subseteq P$. Следовательно, $U + P \supset P$ и $V + P \supset P$. Отсюда в силу максимальности l-идеала P относительно свойства $P \cap \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \varnothing$ следует, что существуют такие элементы b_k и b_t рассматриваемой последовательности, что $b_k \in U + P$ и $b_t \in V + P$. Пусть для определённости $k \leqslant t$. Так как $b_k \in U + P$, то

$$b_{k+1} \in (I_{b_k})^2 \subseteq [U + P, U + P] \subseteq U + P,$$

поэтому $b_{k+1} \in U + P$. Аналогично получаем, что $b_t \in U + P$. Следовательно,

$$b_{t+1} \in (I_{b_t})^2 \subseteq [U + P, V + P] \subseteq [U, V] + P.$$

Так как $b_{t+1} \notin P$, то $[U, V] \not\subseteq P$. Применяя далее предложение 4, получаем, что $[\bar{U}, \bar{V}] \not\subseteq P$. По определению 2 L/P является l-первичной l-алгеброй Ли, что влечёт l-первичность l-идеала P. □

Также нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 6 [5]. *Если L — l-алгебра Ли над частично упорядоченным полем K, $l\text{-rad}(L)$ — её l-первичный радикал и $a \in L$, то $a \in l\text{-rad}(L)$ тогда и только тогда, когда в любой последовательности $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$ вида $a_0 = |a|$, $a_{i+1} \in [I_{a_i}, I_{a_i}]$ начиная с некоторого места все элементы равны нулю.*

Необходимое и достаточное условие l-полупервичности решёточно упорядоченной алгебры Ли сформулировано в теореме 1.

Доказательство теоремы 1. Пусть $l\text{-rad}(L) = \{0\}$ и $a \in L$, $a \neq 0$ — произвольный элемент l-алгебры Ли L. Так как $a \neq 0$, то $a \notin l\text{-rad}(L)$, и по предложению 6 существует последовательность $\{a_i \in L \mid i \in \mathbb{N}\}$, в которой $a_0 = a$ и $a_{i+1} \in [I_{a_i}, I_{a_i}]$, при этом $a_i \neq 0$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

Так как $a_1 \in (I_a)^2$ и $a_1 \neq 0$, то $(I_a)^2 \neq 0$. Следовательно, для любого $a \in L$, $a \neq 0$, выполнено соотношение $(I_a)^2 \neq 0$. По лемме 1 l-алгебра Ли L l-полупервична.

Обратно, пусть L — l-полупервичная l-алгебра Ли. Рассмотрим нулевой l-идеал $\{0\}$ в L. Учитывая l-изоморфизм между l-алгебрами Ли L и $L/\{0\}$, существование которого следует из предложения 1, а также l-полупервичность l-алгебры Ли L, получаем, что $L/\{0\}$ является l-полупервичной l-алгеброй Ли.

Возьмём произвольный элемент $b \in L$, $b \neq 0$. По лемме 2 для l-полупервичной алгебры Ли $L/\{0\}$ и элемента $b \neq 0$ найдётся такой l-первичный l-идеал P, что $b \notin P$. Отсюда по определению l-первичного радикала заключаем, что $b \notin l\text{-rad}(L)$. Так как никакой ненулевой элемент l-алгебры Ли L не содержится в $l\text{-rad}(L)$, то $l\text{-rad}(L) = \{0\}$. □

Теорема 3. *Пусть L — l-алгебра Ли над частично упорядоченным полем. Если первичный радикал алгебры Ли L равен нулю, то равен нулю и её l-первичный радикал.*

Доказательство. Если первичный радикал алгебры Ли L равен нулю, то по теореме 2 L является полупервичной алгеброй Ли. Полупервичная l-алгебра

Ли L является l-полупервичной, так как если в L нет ненулевых абелевых идеалов, то в L нет и ненулевых абелевых l-идеалов. По теореме 1 l-алгебра Ли L имеет нулевой l-первичный радикал. $\square$

Таким образом, для полупервичной алгебры Ли L выполнено равенство $\mathrm{rad}(L) = l\text{-}\mathrm{rad}(L) = \{0\}$, поэтому справедлива эквивалентность: $a \in l\text{-}\mathrm{rad}(L)$ тогда и только тогда, когда $|a| \in \mathrm{rad}(L)$.

Литература

[1] Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 295—325.

[2] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[3] Кочетова Ю. В. О некоторых свойствах идеалов решёточно упорядоченных алгебр Ли // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная сер. Математика. — 2007. — № 7 (57). — С. 73—83.

[4] Кочетова Ю. В. Первичные идеалы решёточно упорядоченных алгебр Ли // Междунар. алгебраическая конф., посвящ. 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. — М., 2008. — С. 140—141.

[5] Кочетова Ю. В. Первичный радикал решёточно упорядоченных алгебр Ли // Успехи мат. наук. — 2008. — Т. 63, № 5. — С. 191—192.

[6] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах частично упорядоченных алгебр Ли // Избранные вопросы алгебры: Сб. статей, посвящённый памяти Н. Я. Медведева. — Барнаул: Изд-во Алтайского ун-та, 2007. — С. 131—142.

[7] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О естественном гомоморфизме решёточно упорядоченных алгебр Ли // Междунар. конф. по алгебре и теории чисел, посвящённая 80-летию В. Е. Воскресенского. Тезисы докладов. — Самара: Универс групп, 2007. — С. 29—30.

[8] Пихтильков С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли. — Тула: Изд-во Тульского гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

[9] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.