Градуированные алгебры Ли с нулевой компонентой, содержащейся в сумме коммутирующих алгебр*

М. И. КУЗНЕЦОВ
Нижегородский университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: kuznets-1349@yandex.ru

УДК 512.554.31

Ключевые слова: алгебры Ли характеристики два, градуированные алгебры Ли, продолжения Картана.

Аннотация

Для любой характеристики основного поля, которое предполагается алгебраически замкнутым, получено описание транзитивных неприводимых 1-градуированных алгебр Ли с нулевой компонентой, содержащейся в сумме коммутирующих неабелевых алгебр Ли.

Abstract

M. I. Kuznetsov, Graded Lie algebras with null component contained in a sum of commuting algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 145—150.

For any characteristic of a ground field, which is supposed to be algebraically closed, the description of transitive irreducible 1-graded Lie algebras with the null component contained in a sum of commuting nonabelian Lie algebras is obtained.

Введение

Всюду в дальнейшем основное поле F предполагается алгебраически замкнутым характеристики $p \geqslant 0$. Напомним, что алгебра Шевалле над F получается из решётки Шевалле комплексной простой конечномерной алгебры Ли расширением скаляров. Под классической редуктивной алгеброй Ли над F понимается сумма коммутирующих подалгебр, изоморфных алгебрам Шевалле, и центра.

В связи с проблемой классификации простых алгебр Ли характеристики 2 представляет интерес исследование «модельных» классов алгебр Ли, близким к простым алгебрам, к которым можно отнести транзитивные неприводимые 1-градуированные алгебры Ли $L = \bigoplus\limits_{i=-1}^{r} L_i$ с классической редуктивной компонентой L_0. Классификация таких алгебр, полученная А. И. Кострикиным и

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00580-а).

В. В. Остриком [1] для $p > 2$, опирается на теорему работы [2], в которой описаны 1-градуированные алгебры Ли с компонентой L_0, равной сумме коммутирующих идеалов. Эта теорема позволяет непосредственно перейти к случаю, когда классическая редуктивная компонента L_0 состоит только из одного слагаемого, являющегося алгеброй Шевалле, и, возможно, одномерного центра. Теорема из работы [2] доказана в предположении, что $p \geqslant 0$, $p \neq 2$. Здесь приводится доказательство, справедливое для любого p, включая $p = 2$. В отличие от [2], где рассматриваются весовые пространства некоторой большей алгебры Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{i \geqslant -1} \mathfrak{g}_i$ относительно подалгебры Картана в $\mathfrak{g}_0$, здесь рассматриваются весовые пространства относительно алгебраического тора T, действующего автоморфизмами алгебры $\mathfrak{g}$. Как следствие, веса становятся целочисленными, что позволяет устранить эффект «слипания» весов в случае, когда $p = 2$. В целом результат для $p = 2$ оказался таким же, как в [2], кроме одного случая. В статье доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $L = \bigoplus\limits_{i=-1}^{r} L_i$ *— транзитивная неприводимая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики* $p \geqslant 0$. *Если* $L_0 \subseteq \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \subseteq \mathfrak{gl}(L_{-1})$, *где* $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ *— коммутирующие неабелевы подалгебры в* $\mathfrak{gl}(L_{-1})$, *то для некоторого* $s > 2$ $\bar{A}_s \subseteq L \subseteq \operatorname{Der}(\bar{A}_s)$, *где* $\bar{A}_s$ *— фактор-алгебра алгебры Шевалле типа* A_s *по центру с градуировкой типа* $\Big(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1}, 1, \underbrace{0,\dots,0}_{m-1}\Big)$; $r = 1$, *кроме случая, когда* $p = 2$, $s = 3$. *Если* $p = 2$, $s = 3$, *то* $r \leqslant 2$, $\dim L_2 \leqslant 1$. *Градуированная алгебра Ли* L *изоморфна одной из следующих алгебр Ли*: $\mathfrak{sl}(m+n)$, *если* $m+n \not\equiv 0\ (p)$; $\mathfrak{psl}(m+n)$ *или* $\mathfrak{pgl}(m+n)$, *если* $m+n \equiv 0\ (p)$; $\mathfrak{psl}(4) + \langle d_{\alpha+2\delta+\beta}\rangle$, $p = 2$, *или* $\mathfrak{pgl}(4) + \langle d_{\alpha+2\delta+\beta}\rangle$, $p = 2$. *Здесь* $d_{\alpha+2\delta+\beta}$ *— дифференцирование алгебры Ли* $\mathfrak{psl}(4)$ *при* $p = 2$ *с градуировкой типа* $(0,1,0)$, *такое что в базисе Шевалле* $d_{\alpha+2\delta+\beta}(x_\gamma) = x_{\psi(\gamma)}$, $\psi(\gamma) = \gamma + (\alpha + 2\delta + \beta)$, *если* $\psi(\gamma)$ *— корень, действие* $d_{\alpha+2\delta+\beta}$ *на другие элементы базиса равно* 0, $\{\alpha, \delta, \beta\}$ *— простые корни,* $\deg x_\alpha = \deg x_\beta = 0$, $\deg x_\delta = 1$.

В доказательстве используются некоторые утверждения из [2], доказательство которых не зависит от характеристики основного поля. Непосредственное вычисление продолжений Картана пары (L_{-1}, L_0), не использующее весов, для $L_0 = \mathfrak{gl}(2) + \mathfrak{gl}(2)$, $L_{-1} = V \otimes V$, где V — стандартный двумерный $\mathfrak{gl}(2)$-модуль, при $p = 2$ выполнил С. В. Политов.

1. Продолжения Картана

Напомним, что градуированная алгебра Ли $L = \bigoplus\limits_{i \geqslant -1} L_i$ называется *транзитивной*, если равенство $[x, L_{-1}] = 0$, $x \in L_i$, $i \geqslant 0$, возможно, только когда $x = 0$. Следовательно, для транзитивной алгебры Ли L однородные подпространства L_i, $i > 0$, содержатся в i-м продолжении Картана $L_0^{(i)}$ пары (L_{-1}, L_0), $L_0 \subset \mathfrak{gl}(L_{-1})$ (последнее включение индуцировано присоединённым представлением). Продолжения Картана определяются индуктивно: $L_0^{(0)} = L_0$, для $i > 0$

$$L_0^{(i)} = \{\varphi \in \operatorname{Hom}(L_{-1}, L_0^{(i-1)}) \mid \varphi(x)(y) = \varphi(y)(x) \text{ для любых } x, y \in L_{-1}\}.$$

Градуированная алгебра Ли называется *неприводимой*, если L_{-1} — неприводимый L_0-модуль. Обозначим L_{-1} через W, алгебру Ли $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ из теоремы — через $\mathcal{L}$. Следующие простые леммы доказаны в [2].

Лемма 1. *Пусть алгебра Ли $\mathcal{L}$ является суммой коммутирующих неабелевых подалгебр, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, $[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = 0$. Тогда $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \subseteq Z(\mathcal{L})$ и существует сюръективный гомоморфизм алгебры Ли $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ на $\mathcal{L}$.* □

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{L}$ будет как в лемме 1. Если $\mathcal{L}$ — неприводимая подалгебра в $\mathfrak{gl}(W)$, то $W = U \otimes_F V$, $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{gl}(U) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{gl}(V)$, $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathfrak{gl}(U) \otimes 1$, $\mathcal{L}_2 \subseteq 1 \otimes \mathfrak{gl}(V)$, где U — неприводимый $\mathcal{L}_1$-модуль, V — неприводимый $\mathcal{L}_2$-модуль, $\dim U = n > 1$, $\dim V = m > 1$.* □

Обозначим $\mathfrak{gl}(U)\otimes 1 + 1\otimes\mathfrak{gl}(V)$ через G. Пусть $T = \mathbb{G}_m(F)^{n+m}$ — $(n+m)$-мерный тор. Он действует автоморфизмами алгебры Ли $\mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_{-1} = W$, $\mathfrak{g}_0 = G$: если $t = (\tau_1, \ldots, \tau_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in T$, $\{u_i\}$, $\{v_j\}$ — фиксированные базисы в U и V соответственно, то $t \circ (u_i \otimes v_j) = \tau_i \lambda_j u_i \otimes v_j$, $t \circ (T_{ij} \otimes 1) = \tau_i \tau_j^{-1} T_{ij} \otimes 1$, $t \circ (1 \otimes E_{rs}) = \lambda_r \lambda_s^{-1} 1 \otimes E_{rs}$, где T_{ij}, E_{rs} — матричные единицы в $\mathfrak{gl}(U)$, $\mathfrak{gl}(V)$ соответственно. Автоморфизмы градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0$ продолжаются до автоморфизмов градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \ldots$, где $\mathfrak{g}_i = G^{(i)}$ — i-е продолжение Картана пары $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)$. Действие автоморфизма φ градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0$ определяется на $G^{(i)}$ индуктивно: для $\Phi \in G^{(i)} \subset \operatorname{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, G^{(i-1)})$ положим $(\varphi \circ \Phi)(x) = \varphi(\Phi(\varphi^{-1}(x)))$. Если векторное пространство N имеет структуры G-модуля и T-модуля, такие что $t(gn) = (tg)(tn)$, то N называется TG-модулем. Очевидно, W, $G^{(i)}$ — TG-модули.

Пусть $X(T)$ — решётка характеров тора T. Очевидно, характеры $\varepsilon_i \colon t \mapsto \tau_i$, $\eta_r \colon t \mapsto \lambda_r$ образуют базис $X(T)$. Элементы $u_i \otimes v_j \in W$ имеют вес $\varepsilon_i + \eta_j$, $T_{ij} \otimes 1$ — вес $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $1 \otimes E_{rs}$ — вес $\eta_r - \eta_s$. Очевидно, для $\mu \in X(T)$, если $G_\mu \neq 0$, $\dim G_\mu = 1$.

Лемма 3. *Отображение*

$$\varphi \colon W^* \to G^{(1)},$$

$$\varphi(u^* \otimes v^*)(a \otimes b) = v^*(b) a \otimes u^* \otimes 1 + u^*(a)(1 \otimes b \otimes v^*), \text{ где } a \otimes b \in U \otimes V = W,$$

является инъективным морфизмом TG-модулей.

Доказательство. В [2, лемма 2.3] доказано, что φ — инъективный морфизм G-модулей. Так как W^*, $G^{(1)}$ — TG-модули, остаётся доказать, что φ — морфизм T-модулей. Для этого достаточно непосредственно проверить равенство

$$\varphi(t \circ u_i^* \otimes v_r^*)(u_j \otimes v_s) = (t \circ \varphi(u_i^* \otimes v_r^*))(u_j \otimes v_s),$$

учтя то, что $t \circ (u_i^* \otimes v_r^*) = \tau_i^{-1} \lambda_r^{-1} u_i^* \otimes v_r^*$. □

Лемма 4. *Пусть* $\varphi\colon W^* \to G^{(1)}$ *— морфизм* TG*-модулей из леммы* 3.

1. $G^{(1)} = \varphi(W^*)$.
2. $G^{(2)} = 0$, *кроме случая, когда* $p = 2$, $n = m = 2$.
3. *Если* $p = 2$, $n = m = 2$, *то* $\dim G^{(2)} = 1$, $G^{(3)} = 0$.

Доказательство. Доказательство утверждения 1, приведённое в [2, лемма 2.4], не зависит от характеристики.

Докажем утверждения 2 и 3. Отождествим $G^{(1)}$ и W^* с помощью φ. Веса T-модуля $G^{(1)}$ имеют вид $-\varepsilon_i - \eta_r$, весовые пространства $G^{(1)}_\mu$ одномерны. Так как $G^{(2)} \subset \mathrm{Hom}(W, G^{(1)})$, то веса T-модуля $G^{(2)}$ имеют вид $\mu = -\varepsilon_i - \eta_r - \varepsilon_j - \eta_s$. Пусть $0 \neq \Phi \in G^{(2)}_\mu$. Тогда $\Phi(u_k \otimes v_q) = 0$, если $k \neq i, j$, $q \neq r, s$. Без потери общности будем считать, что $0 \neq \Phi(u_i \otimes v_s) \in G^{(1)}_\nu$, $\nu = -\varepsilon_j - \eta_r$. Тогда $\Phi(u_i \otimes v_s) = \lambda u_j^* \otimes v_r^*$, $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$. Если $i \neq j$, $r \neq s$, то согласно лемме 3

$$\begin{aligned}\Phi(u_i \otimes v_s)(u_j \otimes v_r) &= \lambda u_j^* \otimes v_r^*(u_j \otimes v_r) = \\ &= \lambda(u_j \otimes u_j^* \otimes 1 + 1 \otimes v_r \otimes v_r^*) = \lambda(T_{jj} \otimes 1 + 1 \otimes E_{rr}) = \\ &= \Phi(u_j \otimes v_r)(u_i \otimes v_s) = \alpha(u_i^* \otimes v_s^*)(u_i \otimes v_s) = \alpha(T_{ii} \otimes 1 + 1 \otimes E_{ss}),\end{aligned}$$

т. е. $\lambda(T_{jj} \otimes 1 + 1 \otimes E_{rr}) = \alpha(T_{ii} \otimes 1 + 1 \otimes E_{ss})$, $\alpha, \lambda \neq 0$. Если $n > 2$, то, действуя на $u_k \otimes v_r$, $k \neq i, j$, получаем, что $\lambda u_k \otimes v_r = 0$, противоречие. Аналогично, если $i = j$, $r \neq s$, то $\mu = -2\varepsilon_i - \eta_r - \eta_s$ и

$$\begin{aligned}\Phi(u_i \otimes v_r)(u_i \otimes v_s) &= \lambda(T_{ii} \otimes 1 + 1 \otimes E_{ss}) = \\ &= \Phi(u_i \otimes v_s)(u_i \otimes v_r) = \alpha(T_{ii} \otimes 1 + 1 \otimes E_{rr}), \quad \alpha, \lambda \neq 0.\end{aligned}$$

Так как $n \geqslant 2$, то, действуя на $u_q \otimes v_s$, $q \neq i$, получаем, что $\lambda(u_q \otimes v_s) = 0$, противоречие. Таким образом, случай $i \neq j$, $r \neq s$ невозможен, если $n > 2$ или, что доказывается аналогично, если $m > 2$, а случай $i = j$, $r \neq s$ невозможен при любом n, по аналогичным соображениям случай $i \neq j$, $r = s$ невозможен.

Рассмотрим случай, когда $i = j$, $r = s$, т. е. когда $\mu = -2\varepsilon_i - 2\eta_r$. Очевидно, $\Phi(u_i \otimes v_r) = \lambda(u_i^* \otimes v_r^*)$, $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$. Для $k \neq r$ по лемме 3 $\Phi(u_i \otimes v_r)(u_i \otimes v_k) = \lambda(1 \otimes E_{kr})$. С другой стороны, $\Phi(u_i \otimes v_r)(u_i \otimes v_k) = \Phi(u_i \otimes v_k)(u_i \otimes v_r) = 0$, так как $\Phi(u_i \otimes v_k) \in G^{(1)}_\nu$, но $\nu = \mu + \eta_k = -\varepsilon_i - 2\eta_r + \eta_k$ не является весом $G^{(1)}$. Остаётся единственная возможность: $n = 2$, $m = 2$, $i \neq j$, $r \neq s$. В этом случае $\mu = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \eta_1 - \eta_2$, $G^{(2)} = G^{(2)}_\mu$. Перенумеровав, если нужно, базисные векторы, можно считать, что $\Phi(u_1 \otimes v_2) \neq 0$. Так как весовые подпространства в $G^{(1)}$ одномерны, можно считать, что $\Phi(u_1 \otimes v_2) = u_2^* \otimes v_1^*$. Тогда

$$\begin{aligned}\Phi(u_1 \otimes v_2)(u_2 \otimes v_1) &= T_{22} \otimes 1 + 1 \otimes E_{11} = \\ &= \Phi(u_2 \otimes v_1)(u_1 \otimes v_2) = \alpha(T_{11} \otimes 1 + 1 \otimes E_{22}), \quad \alpha \in F, \quad \alpha \neq 0.\end{aligned}$$

Очевидно, равенство $T_{22} \otimes 1 + 1 \otimes E_{11} = \alpha(T_{11} \otimes 1 + 1 \otimes E_{22}$ возможно, только когда $p = 2$, $\alpha = 1$, что доказывает утверждение 2. Теперь $\Phi(u_1 \otimes v_2)(u_2 \otimes v_2) = u_2^* \otimes v_1^*(u_1 \otimes v_2) = 1 \otimes E_{21}$. Следовательно, $\Phi(u_2 \otimes v_2) = u_1^* \otimes v_1^*$. Аналогично получаем, что $\Phi(u_1 \otimes v_1) = u_2^* \otimes v_2^*$. Таким образом, $G^{(2)} = \langle \Phi \rangle$.

Предположим, что $0 \neq \Psi \in G^{(3)}_{\delta}$. Так как $G^{(3)} \subseteq \mathrm{Hom}(W, G^{(2)})$, веса T-модуля $G^{(3)}$ имеют вид $\delta = \mu - \varepsilon_i - \eta_r$, $\mu = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \eta_1 - \eta_2$, $i, r = 1, 2$. Рассмотрим случай, когда $\delta = -2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - 2\eta_1 - \eta_2$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Так как $G^{(2)} = G^{(2)}_{\mu}$, то из подсчёта весов следует, что $\Psi(u_i \otimes v_r) \neq 0$ только для $i = r = 1$. Поэтому

$$\Psi(u_1 \otimes v_1)(u_2 \otimes v_2) = \alpha\Phi(u_2 \otimes v_2) = \alpha u_1^* \otimes v_1^*, \quad \alpha \in F, \quad \alpha \neq 0.$$

Однако $\Psi(u_1 \otimes v_1)(u_2 \otimes v_2) = \Psi(u_2 \otimes v_2)(u_1 \otimes v_1) = 0$, так как $\Psi(u_2 \otimes v_2) = 0$. Следовательно, $G^{(3)} = 0$. □

Описание $G^{(1)}(W)$, полученное в [2], справедливо и для $p = 2$.

Следствие. *Пусть* $\dim U = n > 1$, $\dim V = m > 1$. *Тогда*

$$G^{(1)}(W) = \\ = \begin{cases} G = \mathfrak{gl}(U) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{gl}(V), & n + m \not\equiv 0\,(p); \\ \mathfrak{sl}(U) \otimes 1 \oplus 1 \otimes \mathfrak{sl}(V), & n + m \equiv 0\,(p),\ nm \not\equiv 0\,(p); \\ \langle \mathfrak{sl}(U) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{sl}(V), T_{11} \otimes 1 + 1 \otimes E_{11} \rangle \neq G, & n \equiv m \equiv 0\,(p). \end{cases}$$

□

2. Доказательство теоремы

Нам нужно лишь внести некоторые дополнения в доказательство теоремы работы [2], чтобы включить случай, когда $p = 2$. Пусть 1-градуированная алгебра Ли L удовлетворяет условиям теоремы. Тогда по лемме 2 $L_{-1} = W = U \otimes V$, $\dim U \geqslant 2$, $\dim V \geqslant 2$, $L_0 \subseteq G = \mathfrak{gl}(U) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{gl}(V)$. Очевидно, L — градуированная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 + \ldots$, $\mathfrak{g}_{-1} = W$, $\mathfrak{g}_0 = G$, $\mathfrak{g}_i = G^{(i)}$. Так как согласно леммам 3, 4 $G^{(1)}$ и W^* изоморфны как $\mathfrak{g}_0$-модули и, следовательно, как L_0-модули, то из неприводимости L_0-модуля $L_{-1} = W$ получаем, что $G^{(1)}$ — неприводимый L_0-модуль. Следовательно, $L_1 = G^{(1)}$ и $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] = [L_{-1}, L_1] = G^{(1)}(W) \subseteq L_0$. Легко убедиться непосредственно (см. также [2, лемма 5]), что классическая простая алгебра Ли $\mathfrak{a} = \bar{A}_{m+n-1} = A_{m+n-1}/Z = \mathfrak{a}_{-1} + \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1$ с градуировкой типа $\Bigl(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-1}\Bigr)$ изоморфна подалгебре в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}_{-1} \cong \mathfrak{g}_{-1}$, $\mathfrak{a}_1 \cong \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{a}_0 \cong [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] = G^{(1)}(W)$. Отсюда следует, в частности, что для любой характеристики p $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = 0$. Так как $L_{-1} + [L_{-1}, L_1] + L_1 = \mathfrak{a}$ — идеал в L, то $\mathfrak{a} \subseteq L \subseteq \mathrm{Der}(\mathfrak{a})$, что завершает доказательство первой части теоремы.

Для $p \neq 2$ все возможности для L перечислены в теореме работы [2]. В [3] вычислена группа $H^1(L, L)$ для всех алгебр Шевалле и их фактор-алгебр по центру при $p = 2$. Если s чётное, то все дифференцирования алгебры Ли $\bar{A}_s$ внутренние, для нечётного $s > 3$ имеется одномерное пространство внешних дифференцирований. Таким образом, список алгебр Ли L, когда $p = 2$, $s > 3$, будет таким же, как в [2]. Рассмотрим случай, когда $s = 3$. Согласно [3]

$\dim \operatorname{Der} \bar{A}_3 = 7$, а согласно [4] (ср. [5]) группа автоморфизмов алгебры Ли $\bar{A}_3$ является присоединённой группой Шевалле типа B_3. Алгебра Ли $\mathfrak{b}_3$, соответствующая присоединённой группе типа B_3, содержит идеал коразмерности 7, изоморфный алгебре $\bar{A}_3$, который порождён корневыми векторами, соответствующими коротким корням. Алгебра Ли $\mathfrak{b}_3$ имеет тривиальный центр, в отличие от алгебры Шевалле типа B_3 (см. [5]). Ограничение присоединённых эндоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{b}_3$ на 7-мерный идеал является изоморфизмом $\mathfrak{b}_3$ и алгебры Ли дифференцирований $\operatorname{Der} \bar{A}_3$. Пусть $\{\alpha, \delta, \beta\}$ — базис системы корней типа A_3. Можно отождествить градуированную алгебру Ли $\mathfrak{a} = \bar{A}_3$ и идеал $L_{-1} + [L_{-1}, L_1] + L_1$ алгебры L так, чтобы $x_{-\delta} = u_1 \otimes v_1$, $x_{-\delta-\alpha} = u_2 \otimes v_1$, $x_{-\delta-\beta} = u_1 \otimes v_2$, $x_{-\delta-\alpha-\beta} = u_2 \otimes v_2$, где x_γ — корневые векторы из базиса Шевалле, $u_i^* \otimes v_j^* \in L_1 = G^{(1)} = W^*$ соответствуют противоположным корням. Очевидно, построенный при доказательстве леммы 4 элемент $\Phi \in G^{(2)}$ совпадает с дифференцированием $d_{\alpha+2\delta+\beta}$ из теоремы. Так как алгебра Ли L_0 является подалгеброй в $G = \mathfrak{gl}(2) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{gl}(2)$ и по следствию содержит идеал $[L_{-1}, L_1] = G^{(1)}(W)$ в G коразмерности один, то в исключительном случае ($p = 2$, $s = 3$) существуют четыре неизоморфных алгебры Ли L, удовлетворяющих условиям теоремы: $\mathfrak{psl}(4)$, $\mathfrak{pgl}(4)$, $\mathfrak{psl}(4) + \langle d_{\alpha+2\delta+\beta} \rangle$, $\mathfrak{pgl}(4) + \langle d_{\alpha+2\delta+\beta} \rangle$, $\langle d_{\alpha+2\delta+\beta} \rangle = L_2$. $\square$

Замечание. Дифференцирование $d_{\alpha+2\delta+\beta}$ имеет вес $-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \eta_1 - \eta_2 = \alpha + 2\delta + \beta$ относительно тора T, если корни алгебры $\bar{A}_3$ рассматривать как веса корневых векторов x_γ относительно T: $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\beta = \eta_1 - \eta_2$. Представление T автоморфизмами алгебры Ли $\bar{A}_3$ имеет одномерное ядро. Образ T в группе автоморфизмов является стандартным тором присоединённой группы Шевалле типа B_3.

Другие внешние весовые дифференцирования алгебры $\bar{A}_3$ относительно T при $p = 2$ соответствуют весам $\pm(\alpha + \beta)$, $\pm(\alpha - \beta)$, $-(\alpha + 2\delta + \beta)$ (см. [3]). Их действие аналогично действию $d_{\alpha+2\delta+\beta}$. Имеется также внешнее дифференцирование нулевого веса d_0. Соответствующее d_0 полупрямое произведение изоморфно $\mathfrak{pgl}(4)$.

Литература

[1] Кострикин А. И., Острик В. В. К теореме распознавания для алгебр Ли характеристики три // Мат. сб. — 1995. — Т. 186. — С. 73—88.

[2] Кузнецов М. И. Градуированные алгебры Ли с нулевой компонентой, равной сумме коммутирующих идеалов // Мат. сб. — 1981. — Т. 116 (158), № 4 (12). — С. 568—574.

[3] Пермяков Д. С. Дифференцирования классических алгебр Ли над полем характеристики 2 // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. Сер. мат. — 2005. — Вып. 1 (3). — С. 123—134.

[4] Frohardt D. E., Griss R. L. (Jr.) Automorphisms of modular Lie algebras // Nova J. Algebra Geom. — 1992. — Vol. 1. — P. 339—345.

[5] Hogeweij G. M. D. Almost classical Lie algebras. I, II // Indag. Math. — 1982. — Vol. 44. — P. 441—452; 453—460.