О полигонах над полурешётками

М. Ю. МАКСИМОВСКИЙ
Московский государственный институт электронной техники
e-mail: maksimovskiy@gmail.com

УДК 512.579

Ключевые слова: полигон над полугруппой, частично упорядоченное множество, полурешётка, коммутативная полугруппа идемпотентов.

Аннотация

В данной работе рассматриваются полигоны над коммутативными полугруппами идемпотентов (полурешётками). Доказано, что полигон над полурешёткой является частично упорядоченным множеством. Получено полное описание полигонов над конечной цепью. Приведены необходимые условия на частично упорядоченное множество, при которых оно будет являться полигоном над некоторой полурешёткой.

Abstract

M. Yu. Maksimovskiy, Acts over semilattices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 151—156.

In this paper, we consider acts over commutative semigroups of idempotents (semilattices). We prove that an act over a semilattice is a partially ordered set. We obtain a full description of acts over a finite chain and a necessary condition for a partially ordered set to be an act over some semilattice.

Полигоном над полугруппой S (см. [3]) называется множество X вместе с отображением $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющим условию $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s, t \in S$. Полурешёткой называется множество, в котором любое двухэлементное подмножество имеет точную нижнюю границу. Хорошо известно, что полурешётка — это то же, что и коммутативная полугруппа идемпотентов: если $(A, \leqslant)$ — полурешётка, то $(A, \cdot)$, $a \cdot b = \inf\{a, b\}$, — коммутативная полугруппа идемпотентов, и наоборот, если $(A, \cdot)$ — коммутативная полугруппа идемпотентов, то $(A, \leqslant)$, $a \leqslant b \iff ab = ba = a$, — полурешётка. Линейно упорядоченную полурешётку назовём цепью.

Если полугруппа S имеет простое строение, то правые полигоны над ней могут быть описаны. В частности, в [2] были описаны (в терминах теории множеств и теории групп) все полигоны над вполне простой (вполне 0-простой) полугруппой. В данной работе получено полное описание полигонов над конечной цепью. Приведены необходимые требования на частично упорядоченное множество X, при которых оно будет полигоном над некоторой полурешёткой.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 7, с. 151—156.
© 2008 *Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом «Открытые системы»*

Нижним конусом элемента x частично упорядоченного множества X назовём множество $x^{\nabla} = \{y \in X \mid y \leqslant x\}$. Для полугруппы S положим

$$S^1 = \begin{cases} S, & \text{если } S \text{ имеет единицу,} \\ S \cup \{1\}, & \text{если } S \text{ не имеет единицы.} \end{cases}$$

Пусть X — полигон над полурешёткой S. Положим $x \leqslant y \iff x \in yS^1$. Будем считать, что $x \cdot 1 = x$ при $x \in X$.

Предложение 1. *Полигон X над полурешёткой S является частично упорядоченным множеством относительно отношения $x \leqslant y \iff x \in yS^1$.*

Доказательство. Так как $x \cdot 1 = x$, то отношение $\leqslant$ рефлексивно. Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x = ys$, $y = zt$ при некоторых $s, t \in S^1$. Тогда $x = zts$, что влечёт транзитивность этого отношения. Осталось доказать антисимметричность. Пусть $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$. Тогда $x = ys$, $y = xt$ при некоторых $s, t \in S^1$. Отсюда, пользуясь коммутативностью и идемпотентностью полугруппы S, получаем, что

$$x = ys = xts = xt^2s = xtst = yst = xt = y.$$

Это означает, что данное отношение антисимметрично. Следовательно, оно является отношением порядка. □

Предложение 2. *Если X — полигон над полурешёткой S, то для каждого $x \in X$ множество x^{∇} является полурешёткой.*

Доказательство. Пусть $y, z \in x^{\nabla}$. Тогда $y = xa$, $z = xb$ при некоторых $a, b \in S^1$. Положим $u = xab$. Так как $u = yb = za$, то $u \leqslant y$, $u \leqslant z$. Пусть теперь $p \in X$ таково, что $p \leqslant y$ и $p \leqslant z$. Тогда $p = ys = zt$ при некоторых $s, t \in S^1$. Мы имеем $p = xas = xbt$. Далее,

$$ust = ybst = pbt = x \cdot bt \cdot bt = xbt = p,$$

т. е. $p \leqslant u$. Таким образом, $u = \inf\{y, z\}$. □

Назовём частично упорядоченное множество X связным, если для любых $x, y \in X$ существует такая последовательность элементов $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$, что $x_0 = x$, $x_n = y$ и $x_{i+1} \leqslant x_i$ или $x_i \leqslant x_{i+1}$ при $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Нетрудно проверить, что всякое частично упорядоченное множество является объединением попарно не пересекающихся связных подмножеств (компонент связности). Легко проверяется также справедливость следующего утверждения.

Предложение 3. *Если X таково, что x^{∇} — полурешётка для каждого $x \in X$, то каждая компонента связности X_α обладает свойством*

$$\forall\, x, y \in X_\alpha \ \exists\, z \in X_\alpha \ z \leqslant x, y.$$

Пусть X — полигон над полурешёткой S и

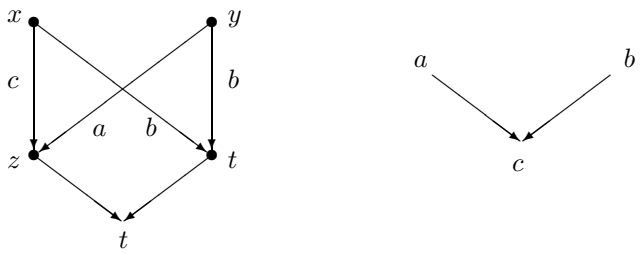
$$X = \bigcup \{X_\alpha \mid \alpha \in \Omega\} -$$

разложение на компоненты связности. Очевидно, каждая компонента X_α является подполигоном полигона X, и мы имеем

$$X = \coprod_\alpha X_\alpha,$$

где символ $\coprod$ обозначает копроизведение (непересекающееся объединение) полигонов. При этом компоненты X_α не обязательно являются полурешётками, как показывает следующий пример.

Пример 1. Полигон $X = \{x, y, z, t, u\}$ над полурешёткой $S = \{a, b, c\}$ и сама полурешётка изображены на рисунках. Так как z и t несравнимы, то $\inf\{x, y\}$ не существует. Следовательно, X не является полурешёткой.



Назовём частично упорядоченное множество X деревом, если оно связно и для любого $x \in X$ нижний конус x^∇ является цепью.

Предложение 4. *Если X — полигон над цепью S, то каждая его компонента связности X_α является деревом.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что x^∇ — цепь для любого $x \in X$. Пусть $y, z \in x^\nabla$. Тогда $y = xa$, $z = xb$ при некоторых $a, b \in S^1$. Так как любые элементы из S^1 сравнимы друг с другом (мы считаем, что $s \leqslant 1$ при всех $s \in S$), то $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$. Пусть, например, $a \leqslant b$. Тогда $a = bs$ при некотором $s \in S^1$. Отсюда получаем, что $y = xa = xbs = zs \leqslant z$, значит, y и z сравнимы. □

Пусть X — частично упорядоченное множество и $X = \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ — его разложение на компоненты связности. Понятно, что X будет являться полигоном над полурешёткой S (в частности, над цепью) в том и только том случае, если каждая компонента X_α является полигоном над S. Следовательно, при рассмотрении полигонов над полурешётками мы можем ограничиться связными полигонами.

Теорема. *Пусть n — натуральное число и X — частично упорядоченное множество, обладающее следующими свойствами*:

1) *X — дерево*;
2) *X представимо в виде объединения попарно не пересекающихся подмножеств $X_0, X_1, \ldots, X_n$*;

3) X_0 *состоит из одного элемента* (*будем считать, что* $X_0 = \{u_0\}$);

4) *если* $x \in X_i$, $y \in X_j$ *и* $i \leqslant j$, *то* $y \not< x$.

Пусть $S = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ *— цепь* ($a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$). *Для элементов* $x \in X$ *и* $a_j \in S$ *положим*

$$x \cdot a_j = \max\bigl(x^{\nabla} \cap (X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_j)\bigr). \qquad (*)$$

Тогда X *является полигоном над цепью* S. *Наоборот, всякий связный полигон над конечной цепью устроен таким образом.*

Доказательство. Докажем вначале, что X — полигон. Рассмотрим произведение $(x \cdot a_j) \cdot a_k$. Очевидно, $xa_j \in X_0 \cup \ldots \cup X_j$. Если $k \geqslant j$, то $(xa_j)a_k = xa_j = x(a_j a_k)$. Пусть теперь $k < j$. Положим

$$xa_j = y, \quad ya_k = z, \quad xa_k = z'.$$

Тогда

$$y = \max\bigl(x^{\nabla} \cap (X_0 \cup \ldots \cup X_j)\bigr), \quad z = \max\bigl(y^{\nabla} \cap (X_0 \cup \ldots \cup X_k)\bigr),$$
$$z' = \max\bigl(x^{\nabla} \cap (X_0 \cup \ldots \cup X_k)\bigr).$$

Так как $y \in x^{\nabla}$, то $z' \geqslant z$. Поскольку $z' \leqslant y$, имеем $z' \in y^{\nabla}$. Так как $z' \in X_0 \cup \ldots \cup X_k$, то $z' \in y^{\nabla} \cap (X_0 \cup \ldots \cup X_k)$, поэтому

$$z' \leqslant \max\bigl(y^{\nabla} \cap (X_0 \cup \ldots \cup X_k)\bigr) = z.$$

Таким образом, $z' = z$. Теперь получаем, что

$$(xa_j)a_k = ya_k = z = z' = xa_k = x(a_j a_k),$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь X — произвольный связный полигон над цепью

$$S = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}\}.$$

Ввиду предложения 1 X — дерево. Следовательно, выполнено условие 1). Положим

$$X_0 = Xa_0, \; X_1 = Xa_1 \setminus Xa_0, \ldots, \; X_{n-1} = Xa_{n-1} \setminus Xa_{n-2}, \; X_n = X \setminus Xa_{n-1}.$$

Тем самым будет выполнено 2). Пусть $x \in X_i$, $y \in X_j$, $i \leqslant j$, $y \leqslant x$. Тогда $y = xa_k$ при некотором k. Имеем $x = xa_i$, $y = ya_j$, $x \notin Xa_{i-1}$, $y \notin Xa_{j-1}$. Если $k \leqslant j - 1$, то $y = ya_k = ya_{j-1}a_k \in Xa_{j-1}$ — противоречие. Значит, $k \geqslant j$. Тогда $k \geqslant i$. Теперь имеем

$$y = xa_k = xa_i a_k = xa_i = x.$$

Этим доказано 4). Если $u, v \in X_0$ и $u \neq v$, то ввиду 4) u и v несравнимы. Следовательно, u и v лежат в разных компонентах связности, что невозможно. Значит, $|X_0| = 1$, что доказывает 3).

Нам осталось доказать, что умножение элементов X и S осуществляется по формуле $(*)$. Пусть $x \in X$, $a_j \in S$. Ясно, что $xa_j \in x^{\nabla}$. Далее,

$$xa_j \in Xa_j = (Xa_j \setminus Xa_{j-1}) \cup \ldots \cup (Xa_1 \setminus Xa_0) \cup Xa_0 = X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_j.$$

Следовательно,

$$xa_j \in x^{\nabla} \cap (X_0 \cup \ldots \cup X_j).$$

Пусть x' — произвольный элемент из $x^{\nabla} \cap (X_0 \cup \ldots \cup X_j)$. Тогда $x' = xa_k$ при некотором k и $x' = x'a_s$ при некотором $s \leqslant j$. Имеем

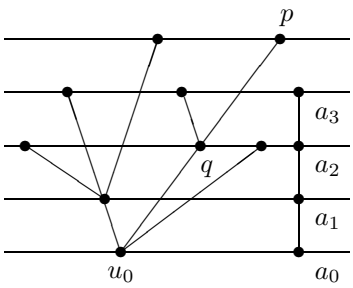
$$x' = xa_ka_s = (xa_s)a_k = (xa_ja_s)a_k = xa_j \cdot a_sa_k \leqslant xa_j.$$

Значит,

$$xa_j = \max\bigl(x^{\nabla} \cap (X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_j)\bigr),$$

т. е. выполнено $(*)$. Теорема доказана. □

Строение полигона над конечной цепью может быть проиллюстрировано следующим рисунком, где $pa_3 = pa_2 = q$, $pa_0 = u_0$.



Следствие 1. *Связное частично упорядоченное множество X является полигоном над некоторой цепью из n элементов в том и только том случае, если X — дерево, длины всех цепей которого не превышают $n+1$.*

Доказательство. Необходимость утверждения очевидна. Докажем достаточность. Пусть u_1, u_2 — два минимальных элемента множества X. Если $u_1 \neq u_2$, то u_1 и u_2 лежат в разных компонентах связности множества X, что противоречит условию. Следовательно, множество X имеет наименьший элемент; обозначим его u_0. Положим $X_0 = \{u_0\}$. Пусть X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — множество элементов $x \in X$, для которых существует путь $u_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i = x$ длины $i+1$, но нет пути меньшей длины из u_0 в x. Нетрудно проверить, что множества $X_0, X_1, \ldots X_n$ удовлетворяют условиям 1)—4), и из теоремы следует, что X — полигон над цепью из n элементов. □

В произвольном (не обязательно связном) случае мы имеем следующее очевидное утверждение.

Следствие 2. *Частично упорядоченное множество X является полигоном над цепью из n элементов в том и только том случае, если X является объединением непересекающихся деревьев и длины цепей в X не превышают $n+1$.*

Таким образом, мы установили, что если X — частично упорядоченное множество, являющееся полигоном над некоторой полурешёткой, то

для любого $x \in X$ множество $\{y \mid y \leqslant x\}$ является полурешёткой. $(**)$

Естественно спросить: при каких условиях частично упорядоченное множество X является полигоном над некоторой полурешёткой? Необходимым является условие $(**)$, но оно не является достаточным, как показывает следующий пример.

Пример 2. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ — частично упорядоченное множество, заданное соотношениями $7 < 5$, $7 < 6$, $5 < 3$, $5 < 4$, $6 < 1$, $6 < 2$, $3 < 1$, $3 < 2$, $4 < 2$. Тогда X удовлетворяет условию $(**)$, но не является полигоном ни над какой полурешёткой.

Если X — полигон над полурешёткой S, то существует множество Φ отображений $X \to X$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) если $x \leqslant y$, то $x\varphi \leqslant y\varphi$ при всех $x, y \in S$, $\varphi \in \Phi$ (условие изотонности);
2) если $x \leqslant y$, то существует такое $\varphi \in \Phi$, что $x = y\varphi$;
3) $\varphi^2 = \varphi$ для всех $\varphi \in \Phi$ (условие идемпотентности);
4) $\varphi\psi = \psi\varphi$ для всех $\varphi, \psi \in \Phi$ (условие коммутативности).

Для этого множества X с помощью компьютерного моделирования были найдены все изотонные идемпотентные отображения. Мощность их множества равна 41. Это множество является множеством с частичной операцией, в котором максимальной коммутативной подполугруппы, удовлетворяющей условию $(**)$, не существует. Следовательно, X не может быть полигоном ни над какой полурешёткой.

Литература

[1] Кожухов И. Б., Максимовский М. Ю. Об автоматах над полурешётками // Системный анализ и информационно-управляющие системы / Под ред. В. А. Бархоткина. — М.: МИЭТ, 2006. — С. 19—34.

[2] Avdeyev A. Yu., Kozhukhov I. B. Acts over completely 0-simple semigroups // Acta Cybernet. — 2000. — Vol. 14, no. 4. — P. 523—531.

[3] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. — Berlin: Walter de Gruyter, 2000.