

# Простые матрицы над дистрибутивными решётками

**В. Е. МАРЕНИЧ**

Мурманский государственный  
педагогический университет  
e-mail: vmarenich@yandex.ru

УДК 512.64

**Ключевые слова:** решёточные матрицы, матрицы над дистрибутивными решётками, простые матрицы.

## Аннотация

В работе найдены признаки простоты решёточных матриц, критерии и условия существования простых матриц над дистрибутивными решётками.

## Abstract

*V. E. Marenich, On prime matrices over distributive lattices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 157—173.*

Characteristics for lattice matrices to be prime and existence criteria for prime matrices over distributive lattices are obtained.

## Введение

Первым вопросом, возникающим при изучении простых решёточных матриц, является вопрос о существовании простых матриц над данной дистрибутивной решёткой. Наиболее изучены простые матрицы над двухэлементной булевой решёткой  $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$  (см. [3, 5—11, 14, 15]). Свойства простых  $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ -булевых матриц рассматривались в [1, 13].

В работе рассмотрены вопросы существования простых матриц над данной дистрибутивной решёткой. Найдены признаки простоты решёточных матриц, критерии и условия существования простых матриц над дистрибутивными решётками.

## 1. Обозначения и терминология

Элементы частично упорядоченного множества  $(Q, \leq)$  образуют  $\leq$ -антицепь, если никакие два из них не сравнимы по отношению  $\leq$ .

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2008, том 14, № 7, с. 157—173.

© 2008 Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»

Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — решётка. *Решёточными* будем называть матрицы, элементы которых принадлежат множеству  $P$ . В название решёточной матрицы часто включают название решётки. Матрицы над булевыми решётками называют *булевыми* матрицами, над двухэлементной булевой решёткой —  $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ -*булевыми* матрицами, над нечёткой решёткой — *нечёткими* матрицами.

Обозначим  $P^{m \times n}$  множество всех решёточных матриц размера  $m \times n$ , где  $n, m \geq 1$ .

Если  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ , то определена *единичная* матрица  $E = E_{n \times n} \in P^{n \times n}$ , где

$$e_{ij} = \begin{cases} \tilde{1}, & \text{если } i = j, \\ \tilde{0}, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Матрица размера  $m \times n$ , все элементы которой равны  $\tilde{0}$ , называется *нулевой* и обозначается  $0 = 0_{m \times n}$ . Матрица размера  $m \times n$ , все элементы которой равны  $\tilde{1}$ , называется *универсальной* и обозначается  $J = J_{m \times n}$ .

Операции сложения и умножения решёточных матриц над решёткой  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  определяются как обычно: вместо операции сложения используется операция объединения  $\vee$ , а вместо операции умножения — операция пересечения  $\wedge$ .

Пусть  $A \in P^{n \times n}$ . Матрица  $A$  называется *обратимой слева* (или *справа*), если существует матрица  $B \in P^{n \times n}$ , такая что  $BA = E_{n \times n}$  (или  $BA = E_{n \times n}$ ).

**Теорема Гивеона–Скорнякова об обратимости.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $A \in P^{n \times n}$  — квадратная решёточная матрица. Тогда  $A$  обратима в  $P^{n \times n}$  тогда и только тогда, когда  $A \cdot {}^t A = {}^t A \cdot A = E$ .  $\square$

*Элементарная матрица*  $\text{El}_n(k, \lambda)$  *первого вида* — матрица, полученная из единичной матрицы  $E = E_{n \times n}$  заменой столбца  $E^{(k)}$  на столбец  $\lambda E^{(k)}$ . *Элементарная матрица*  $\text{El}_n(k, l, \lambda)$  *второго вида* — матрица, полученная из единичной матрицы  $E$  заменой столбца  $E^{(k)}$  на столбец  $E^{(k)} + \lambda E^{(l)}$ , где  $k \neq l$ .

Квадратная  $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ -матрица называется *подстановочной матрицей* (*матрицей перестановки*, *матрицей подстановки*, *перестановочной матрицей*), если каждый столбец и каждая строка матрицы содержит только одну единицу  $\tilde{1}$ . Подстановочная матрица  $M(\pi) = (m(\pi)_{ij})$  порядка  $n$  определяется подстановкой  $\pi \in S_n$ :

$$m(\pi)_{ij} = \begin{cases} \tilde{1}, & \text{если } j = \pi(i), \\ \tilde{0}, & \text{если } j \neq \pi(i), \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Матрица  $A$  называется *частично разложимой*, если она содержит нулевую подматрицу  $0_{s \times t}$ , где  $s + t = n$ . Другими словами, матрица  $A$  частично разложима, если существуют такие подстановочные матрицы  $M(\pi)$ ,  $M(\sigma)$ , что

$$M(\pi)AM(\sigma) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0_{s \times t} & B_{22} \end{pmatrix},$$

где  $B_{11} \in P^{t \times t}$ ,  $B_{22} \in P^{s \times s}$ ,  $s + t = n$ ,  $1 \leq s, t \leq n - 1$ . Матрицу  $0_{1 \times 1}$  считаем частично разложимой. Матрица  $A$  называется *вполне неразложимой*, если она не является частично разложимой.

Если каждый элемент матрицы  $A \in P^{m \times n}$  имеет дополнение, то матрица  $\bar{A} \in P^{m \times n}$ , где  $\bar{a}_{ij} = \overline{a_{ij}}$  для всех  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , называется *матрицей дополнений*.

*Строчечным пространством* матрицы  $A$  называется линейная оболочка векторов-строк матрицы  $A$ . *Столбцовым пространством* матрицы  $A$  называется линейная оболочка векторов-столбцов матрицы  $A$ . Строчечные и столбцовые пространства матрицы  $A$  обозначаются соответственно  $\text{Row}(A)$  и  $\text{Column}(A)$ .

## 2. Свойства простых решёточных матриц

Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $A \in P^{n \times n}$  — квадратная матрица,  $n \geq 2$ .

Матрица  $A$  называется *простой* над решёткой  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  (или простой матрицей моноида  $P^{n \times n}$ ), если она не является обратимой и из равенства  $A = BC$ , где  $B, C \in P^{n \times n}$ , следует, что  $B$  или  $C$  — обратимая матрица. Если ясно, о какой решётке идёт речь, мы говорим о простых матрицах.

Необратимая матрица  $A$  называется *факторизуемой*, если  $A = BC$ , где матрицы  $B, C \in P^{n \times n}$  необратимые. Разложение  $A = BC$  называется *факторизацией* матрицы  $A$ .

**Пример 1.** Если в дистрибутивной решётке  $(L, \wedge, \vee, \leq)$  дополнение имеют не только нуль  $\tilde{0}$  и единица  $\tilde{1}$ , то матрица  $\overline{E_{n \times n}}$  факторизуема для всех  $n \geq 3$ .

Действительно, пусть элемент  $a$ , отличный от  $\tilde{0}$ ,  $\tilde{1}$ , имеет дополнение. Рассмотрим матрицу  $A = aE_{n \times n} + \overline{aE_{n \times n}}$ . Матрицы  $A$  и  $\bar{A} = \bar{a}E_{n \times n} + \overline{aE_{n \times n}}$  необратимые. Действительно,

$$\begin{aligned} A \cdot {}^t A &= (aE_{n \times n} + \overline{aE_{n \times n}})(aE_{n \times n} + \overline{aE_{n \times n}}) = aE_{n \times n} + \bar{a}J_{n \times n} = \\ &= \overline{aE_{n \times n}} \neq E_{n \times n}, \\ \bar{A} \cdot {}^t \bar{A} &= (\bar{a}E_{n \times n} + \overline{aE_{n \times n}})(\bar{a}E_{n \times n} + \overline{aE_{n \times n}}) = \bar{a}E_{n \times n} + \bar{a}J_{n \times n} = \\ &= \overline{aE_{n \times n}} \neq E_{n \times n}. \end{aligned}$$

Справедливы равенства

$$A \cdot \bar{A} = (aE_{n \times n} + \overline{aE_{n \times n}})(\bar{a}E_{n \times n} + \overline{aE_{n \times n}}) = \overline{aE_{n \times n}} + \bar{a}E_{n \times n} = \overline{E_{n \times n}}. \quad \square$$

Множество матриц  $P^{n \times n}$  разбито на три подмножества: множество обратимых матриц, множество простых матриц, множество факторизуемых матриц.

Перечислим некоторые свойства простых и факторизуемых матриц.

Если  $A$  — простая матрица, то  ${}^t A$  — простая матрица.

Произведение простой матрицы и обратимой матрицы является простой матрицей.

Если переставить строки и столбцы простой матрицы, то получим простую матрицу.

Если  $A$  — простая матрица,  $\text{Column}(A) = \text{Column}(B)$ , где  $B \in P^{n \times n}$ , то  $B$  — простая матрица. Действительно, существует матрица  $C \in P^{n \times n}$ , такая что  $A = BC$ . Матрица  $C$  обратима,  $B = AC^{-1}$  — простая матрица.

Если  $A$  — факторизуемая матрица, то  ${}^t A$  — факторизуемая матрица.

Если  $A \in P^{n \times n}$  — идемпотент,  $A \neq E_{n \times n}$  и  $n \geq 2$ , то  $A$  — факторизуемая матрица.

В частности, для всех  $n \geq 2$  следующие матрицы факторизуемы:

- элементарные матрицы  $\text{El}_n(k, l, \lambda)$ ,  $\text{El}_n(k, \mu)$ , где  $\lambda > \tilde{0}$ ,  $\mu < \tilde{1}$ ;
- универсальная матрица  $J_{n \times n}$ ;
- верхняя треугольная матрица  $\Delta_n$ .

Рассмотрим признаки простоты решёточных матриц.

**Теорема 1.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $A \in P^{n \times n}$  — простая матрица. Справедливы следующие утверждения.

1.  $\text{rank}_c(A) = \text{rank}_r(A) = \text{rank}_s(A) = n$ .
2. Семейство столбцов матрицы  $A \cdot \text{El}_n(r, \lambda)$  (строк матрицы  $\text{El}_n(r, \lambda) \cdot A$ ) является  $\leq$ -антицепью для всех  $r = 1, \dots, n$  и любых  $\lambda \in P$ ,  $\lambda > \tilde{0}$ .
3.  $\|A^{(i)}\| = \|A_{(i)}\| = \tilde{1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Доказательство.** 1. Предположим, что  $k = \text{rank}_s(A) < n$ . Тогда матрица  $A$  есть произведение двух необратимых  $(n \times n)$ -матриц, одна из которых имеет  $n - k$  нулевых столбцов, а другая имеет  $n - k$  нулевых строк. Получили противоречие, поэтому  $\text{rank}_s(A) = n$ . Отсюда и из свойств мультипликативного ранга получаем, что  $\text{rank}_c(A) = \text{rank}_r(A) = n$ .

2. Предположим, что семейство столбцов матрицы  $B = A \cdot \text{El}_n(r, \lambda)$  не является  $\leq$ -антицепью для некоторых  $r = 1, \dots, n$  и  $\lambda \in P$ ,  $\lambda > \tilde{0}$ .

Пусть по отношению  $\leq$  сравнимы столбцы  $B^{(i)}$  и  $B^{(j)}$ , где  $i \neq j$ . Возможны следующие случаи.

Случай 1:  $B^{(i)} \geq B^{(j)}$ ,  $i, j \neq r$ . Тогда  $A^{(i)} = B^{(i)} \geq B^{(j)} = A^{(j)}$ . Поэтому матрица  $A$  есть произведение необратимых матриц  $A = A \cdot \text{El}_n(i, j, \tilde{1})$  — противоречие.

Случай 2:  $B^{(i)} \geq B^{(r)}$ ,  $i \neq r$ . Тогда  $A^{(i)} = B^{(i)} \geq B^{(r)} = \lambda A^{(r)}$ . Поэтому матрица  $A$  есть произведение необратимых матриц  $A = A \cdot \text{El}_n(i, r, \lambda)$  — противоречие.

Случай 3:  $B^{(r)} \geq B^{(j)}$ ,  $j \neq r$ . Тогда  $A^{(r)} \geq \lambda A^{(r)} = B^{(r)} \geq B^{(j)} = A^{(j)}$ . Поэтому матрица  $A = A \cdot \text{El}_n(r, j, \lambda)$  есть произведение необратимых матриц — противоречие.

3. Если  $\|A^{(i)}\| = \lambda < \tilde{1}$ , то  $A = A \cdot \text{El}_n(i, \lambda)$  — противоречие.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $A \in P^{n \times n}$  — простая матрица. Справедливы следующие утверждения.

1.  $\sum_{r=1}^n A^{(r)} = J_{n \times 1}$ ,  $\bigwedge_{r=1}^n A^{(r)} = 0_{n \times 1}$ .

2.  $\sum_{r=1}^n A_{(r)} = J_{1 \times n}$ ,  $\bigwedge_{r=1}^n A_{(r)} = 0_{1 \times n}$ .
3. Решётка, порождённая элементами простой матрицы, содержит нуль  $\tilde{0}$  и единицу  $\tilde{1}$  решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ .

**Доказательство.** Докажем, что  $a_i = \bigwedge_{r=1}^n a_{ir} = \tilde{0}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Предположим, что  $a_i = \lambda > \tilde{0}$  для некоторого  $i$ . Тогда  $a_{ir} \geq \lambda$  для всех  $r = 1, \dots, n$ . Имеем  $A = A \cdot \text{El}_n(i, j, \lambda)$ ,  $j \neq i$ . Получили противоречие с тем, что  $A$  — простая матрица. Доказано, что  $\lambda = \tilde{0}$ .  $\square$

Для элемента  $\lambda = \tilde{1}$  из пункта 2 теоремы 1 получаем следствие.

**Следствие 2.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $A \in P^{n \times n}$  — простая матрица. Тогда столбцы (строки) матрицы  $A$  образуют  $\leq$ -антицепь.  $\square$

Из следствий 1 и 2 следует, что простые матрицы не имеют нулевых строк (столбцов), не имеют одинаковых столбцов (строк) и не имеют универсальных строк (столбцов).

**Пример 2.** Если  $A \in P^{n \times n}$  — простая матрица, то  $AJ_{n \times n} = J_{n \times n}A = J_{n \times n}$ . Поэтому универсальная матрица  $J_{n \times n}$  делится слева и справа на любую простую  $(n \times n)$ -матрицу.  $\square$

Рассмотрим свойства простых матриц, связанные с матричными уравнениями.

**Теорема 2.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $A, X, Y \in P^{n \times n}$ . Если  $A$  — простая матрица, то каждое из уравнений  $AX = A$  и  $YA = A$  имеет единственное решение  $X = E_{n \times n}$ ,  $Y = E_{n \times n}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение

$$AX = A. \quad (1)$$

Пусть  $A$  — простая матрица. Каждое решение уравнения (1) обратимо, единичная матрица  $E_{n \times n}$  — решение уравнения (1). Множество решений уравнения (1) образует мультипликативную группу. Если  $X, Z$  — решения уравнения (1), то  $X + Z$  — решение уравнения (1). Обратимые матрицы образуют  $\leq$ -антицепь. Из неравенств  $X \leq X + Z$  и  $Z \leq X + Z$  получаем, что  $X = X + Z = Z$ ,  $X = Z = E_{n \times n}$ .  $\square$

**Теорема 3.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $A \in P^{n \times n}$ ,  $X \in P^{k \times n}$ ,  $Y \in P^{k \times n}$ . Справедливы следующие утверждения.

1. Если  $A$  — простая матрица, то уравнение  $YA = 0_{k \times n}$  (или  $AX = 0_{n \times k}$ ) имеет единственное решение  $Y = 0_{k \times n}$  (или  $X = 0_{n \times k}$ ).
2. Простые  $(n \times n)$ -матрицы не являются делителями нуля  $0_{n \times n}$  в полугруппе  $(P^{n \times n}, \cdot)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение  $YA = 0_{k \times n}$ . Справедливы равенства  $0_{k \times n} = 0_{k \times n}J_{n \times n} = Y(AJ_{n \times n}) = YJ_{n \times n}$ ,  $Y = 0_{k \times n}$ .  $\square$

### 3. Вполне неразложимые простые решёточные матрицы

Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $A \in P^{n \times n}$ ,  $n \geq 2$ .

При изучении простых матриц достаточно ограничиться изучением вполне неразложимых простых матриц.

Докажем следующую теорему, используя рассуждения из [14, с. 138].

**Теорема 4.** Пусть  $(P, \vee, \wedge, \leq)$  — решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ , только нуль  $\tilde{0}$  и единица  $\tilde{1}$  обладают дополнениями в решётке  $(L, \wedge, \vee, \leq)$ . Если  $A$  — простая матрица,  $A \in P^{n \times n}$ , то справедливо одно из следующих двух утверждений.

1. Матрица  $A$  вполне неразложима.
2. Матрица  $A$  перестановочно эквивалентна блочной матрице

$$\begin{pmatrix} B_{11} & 0_{t \times s} \\ 0_{s \times t} & E_{s \times s} \end{pmatrix} = B_{11} \oplus E_{s \times s},$$

где  $B_{11}$  — вполне неразложимая простая  $(t \times t)$ -матрица,  $1 \leq s, t \leq n-1$ ,  $s+t=n$ .

**Доказательство.** Из теоремы Скорнякова об изоморфизме следует, что над решёткой  $(P, \vee, \wedge, \leq)$  обратимы только подстановочные матрицы.

Предположим, что  $A$  — частично разложимая матрица. Тогда определена простая матрица

$$B = M(\pi)AM(\sigma) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0_{s \times t} & B_{22} \end{pmatrix},$$

где  $B_{11} \in P^{t \times t}$ ,  $B_{22} \in P^{s \times s}$  — квадратные матрицы,  $s+t=n$ ,  $1 \leq s, t \leq n-1$  и  $M(\pi)$ ,  $M(\sigma)$  — подстановочные матрицы.

Если  $B_{12} \neq 0_{t \times s}$ , то матрица  $B_{11}$  не является подстановочной матрицей. В противном случае для некоторой элементарной матрицы  $\text{El}_n(r, \lambda)$  первого вида два различных столбца матрицы  $B \cdot \text{El}_n(r, \lambda)$  сравнимы по отношению  $\leq$  — противоречие.

Докажем, что  $B_{12} = 0_{t \times s}$ . Предположим противное,  $B_{12} \neq 0_{t \times s}$ . Значит, матрица  $B_{11}$  не является подстановочной матрицей. Справедливо равенство

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0_{s \times t} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{t \times t} & B_{12} \\ 0_{s \times t} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & 0_{t \times s} \\ 0_{s \times t} & E_{s \times s} \end{pmatrix}.$$

Оба сомножителя в правой части последнего равенства — необратимые матрицы. Мы получили противоречие с тем, что  $B$  — простая матрица.

Из равенства  $B_{12} = 0_{t \times s}$  имеем

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0_{t \times s} \\ 0_{s \times t} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{t \times t} & 0_{t \times s} \\ 0_{s \times t} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & 0_{t \times s} \\ 0_{s \times t} & E_{s \times s} \end{pmatrix}.$$

Так как  $B$  — простая матрица, то один из сомножителей в правой части последнего равенства есть обратимая матрица.

Без потери общности можно считать, что  $B_{11}$  — вполне неразложимая матрица.  $\square$

Следующая теорема по данной простой матрице определяет простые матрицы большего размера.

**Теорема 5.** Пусть  $(P, \vee, \wedge, \leq)$  — дистрибутивная решётка с  $\vee$ -неразложимой единицей  $\tilde{1}$ ,  $3 \leq t < n$ ,  $B \in P^{t \times t}$ . Прямая сумма  $B \oplus E_{(n-t) \times (n-t)}$  — простая матрица тогда и только тогда, когда  $B$  — простая матрица.

**Доказательство.** Пусть  $B$  — простая матрица,  $s = n - t$ ,  $s \geq 1$ ,  $A = B \oplus E_{s \times s}$  и  $A = CD$ , где  $C, D \in P^{n \times n}$ .

Каждый столбец матрицы  $A$  есть сумма столбцов матрицы  $C$ . Столбцы  $A^{(t+1)}, \dots, A^{(n)}$   $\vee$ -неразложимы над решёткой  $P^{n \times 1}$ , поэтому они являются столбцами матрицы  $C$ . Без потери общности будем считать, что

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0_{t \times s} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

$$A = B \oplus E_{s \times s} = \begin{pmatrix} B & 0_{t \times s} \\ 0_{s \times t} & E_{s \times s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0_{t \times s} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix},$$

где  $C_{11} \in P^{t \times t}$ ,  $C_{21} \in P^{s \times t}$ ,  $C_{22} \in P^{s \times s}$ ,  $D_{11} \in P^{t \times t}$ ,  $D_{12} \in P^{t \times s}$ ,  $D_{21} \in P^{s \times t}$ ,  $D_{22} \in P^{s \times s}$ .

Справедливы равенства

$$C_{11}D_{11} = B, \quad C_{11}D_{12} = 0_{t \times s},$$

$$C_{21}D_{11} + C_{22}D_{21} = 0_{s \times t}, \quad C_{21}D_{12} + C_{22}D_{22} = E_{s \times s}.$$

Из равенства  $B = C_{11}D_{11}$  следует, что одна из матриц  $C_{11}$  и  $D_{11}$  обратима.

Пусть  $C_{11}$  — обратимая матрица. Тогда  $D_{11}$  — простая матрица.

Из равенства  $C_{11}D_{12} = 0_{t \times s}$  следует, что  $D_{12} = 0_{t \times s}$ .

Из равенств  $C_{22}D_{22} = C_{21}D_{12} + C_{22}D_{22} = E_{s \times s}$  следует, что матрицы  $C_{22}$  и  $D_{22}$  обратимы.

Из равенства  $C_{21}D_{11} + C_{22}D_{21} = 0_{s \times t}$  имеем, что  $C_{21}D_{11} = 0_{s \times t}$ .

Так как  $D_{11}$  — простая матрица, то  $C_{21} = 0_{s \times t}$ . Поэтому матрица

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0_{t \times s} \\ 0_{s \times t} & C_{22} \end{pmatrix}$$

обратима. Доказано, что  $A = B \oplus E_{s \times s}$  — простая матрица.  $\square$

#### 4. Частично упорядоченное множество столбцовых пространств $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$

Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $A \in P^{n \times n}$ .

Определим множество подпространств

$$\text{Space}_{n \times n}(P) = \{\text{Column}(Z) \mid Z \in P^{n \times n}\}.$$

Множество  $\text{Space}_{n \times n}(P)$  состоит из подпространств пространства  $P^{n \times 1}$ , размерность которых не превосходит числа  $n$ .

Свойства частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$  определяют свойства отношения левой (правой) делимости в моноиде  $(P^{n \times n}, \cdot)$ .

Для любых матриц  $A, B \in P^{n \times n}$  следующие утверждения равносильны:

- 1)  $\text{Column}(B) \subseteq \text{Column}(A)$ ;
- 2) матричное уравнение  $AX = B$  совместно;
- 3) матрица  $A$  является левым делителем матрицы  $B$ .

Заметим, что частично упорядоченное множество  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$  имеет единицу  $\text{Column}(E_{n \times n}) = P^{n \times 1}$  и нуль  $\text{Column}(0_{n \times n}) = \{0_{n \times 1}\}$ .

Пусть матрица  $A \in P^{n \times n}$ . Матрица  $A$  обратима тогда и только тогда, когда  $\text{Column}(A) = P^{n \times 1}$  (или  $\text{Row}(A) = P^{n \times 1}$ ).

Доказанный ниже признак простоты решёточной матрицы является важным фактом теории простых решёточных матриц.

**Теорема 6.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $A \in P^{n \times n}$ . Если  $A$  — простая матрица, то пространства  $\text{Column}(A)$  и  $\text{Column}({}^t A)$  являются коатомами частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ .

**Доказательство.** Предположим, что пространство  $\text{Column}(A)$  не является коатомом частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ . Тогда существует матрица  $B \in P^{n \times n}$ , такая что  $\text{Column}(A) \subset \text{Column}(B) \subset P^{n \times 1}$ . Поэтому существует матрица  $C \in P^{n \times n}$ , такая что  $A = BC$ . Так как  $A$  — простая матрица, то одна из матриц  $B$  и  $C$  обратима. Матрица  $B$  не является обратимой, так как  $\text{Column}(B) \neq P^{n \times 1}$ . Значит, обратима матрица  $C$ . Тогда  $B = AC^{-1}$ ,  $\text{Column}(B) \subseteq \text{Column}(A)$  — противоречие. Доказано, что  $\text{Column}(A)$  — коатом частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ .

Матрица  ${}^t A$  — простая матрица. Поэтому  $\text{Column}({}^t A)$  — коатом частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ .  $\square$

Опишем те коатомы  $\text{Column}(A)$  частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ , для которых  $A$  — простая матрица.

**Лемма 1.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $A \in P^{n \times n}$ , пространство  $\text{Column}(A)$  является коатомом частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ . Следующие утверждения равносильны.

1.  $A$  — простая матрица.
2. Уравнение  $AX = A$  имеет единственное решение  $X = E_{n \times n}$ .
3. Уравнение  $YA = A$  имеет единственное решение  $Y = E_{n \times n}$ .

**Доказательство.** Докажем равносильность утверждений 1 и 2. Пусть  $A$  — простая матрица. Тогда по теореме 2 уравнение  $AX = A$  имеет единственное решение  $X = E_{n \times n}$ .

Пусть уравнение  $AX = A$  имеет единственное решение  $X = E_{n \times n}$ . Рассмотрим произвольное разложение  $A = BC$ , где  $B, C \in P^{n \times n}$ , и докажем, что одна из матриц  $B$  и  $C$  обратимая. Из равенства  $A = BC$  следует, что  $\text{Column}(A) \subseteq \text{Column}(B)$ . Если  $B$  — обратимая матрица, то доказывать нечего. Пусть  $B$  — необратимая матрица. Тогда  $\text{Column}(B) \subset P^{n \times 1}$ ,  $\text{Column}(A) = \text{Column}(B)$ . Существует такая матрица  $D \in P^{n \times n}$ , что  $B = AD$ . Из равенства  $A = A(DC)$  получаем, что  $DC = E_{n \times n}$ ,  $C$  — обратимая матрица. Значит,  $A$  — простая матрица.

Равносильность утверждений 2 и 3 вытекает из равносильности следующих утверждений:

- уравнение  $AX = A$  имеет единственное решение  $X = E_{n \times n}$ ;
- $A$  — простая матрица;
- ${}^t A$  — простая матрица;
- уравнение  ${}^t A \cdot X = {}^t A$  имеет единственное решение  $X = E_{n \times n}$ ;
- уравнение  $Y \cdot A = A$  имеет единственное решение  $Y = {}^t X = E_{n \times n}$ .  $\square$

Уравнение  $AX = A$  может иметь единственное решение для матриц  $A$ , не являющихся простыми.

**Пример 3.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — булева решётка. Уравнение  $AX = A$ , где  $A = E_{n \times n}$ , имеет единственное решение  $X = E_{n \times n}$ . Далее будет доказано, что матрица  $E_{n \times n}$  не является простой ни для какого  $n \geq 4$ .  $\square$

Рассмотрим описание коатов частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$  над дистрибутивными решётками.

**Теорема 7.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $V$  — подпространство пространства  $P^{n \times 1}$ . Если пространство  $V$  — коатом частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ , то справедливо одно из следующих утверждений.

1.  $V = \text{Column}(A)$ , где  $A \in P^{n \times n}$  — простая матрица.
2.  $V = \text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha))$ , где  $k, l = 1, \dots, n$ ,  $k \neq l$ ,  $\alpha$  — атом решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ .
3.  $V = \text{Column}(\text{El}_n(k, \eta))$ , где  $k = 1, \dots, n$ ,  $\eta$  — коатом решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ ,  $\eta > \tilde{0}$ .

**Доказательство.** Если  $A$  — простая матрица, то по теореме 6 пространство  $V = \text{Column}(A)$  — коатом частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ .

Пусть пространство  $V = \text{Column}(A)$  являются коатомом частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ , но матрица  $A$  не является простой. Уравнение  $YA = A$  имеет необратимое решение  $Z$ . Значит,  $V = \text{Column}(A) \subseteq \text{Column}(Z) \neq P^{n \times 1}$ ,  $V = \text{Column}(A) = \text{Column}(Z)$ .

Случай 1:  $Z < E_{n \times n}$ . Уравнение  $YA = A$  имеет решение  $Y = \text{El}_n(k, \eta)$ ,  $Z \leq Y < E_{n \times n}$ , где элемент  $\eta$  — некоторый коатом решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ ,  $\eta > \tilde{0}$ . Доказано, что  $V = \text{Column}(\text{El}_n(k, \eta))$ .

Случай 2:  $Z \not< E_{n \times n}$ . Матрица  $E_{n \times n} + Z$  — решение уравнения  $YA = A$ , причём  $E_{n \times n} + Z > E_{n \times n}$ . Поэтому уравнение  $YA = A$  имеет решение  $Y = \text{El}_n(k, l, \alpha)$ ,  $E_{n \times n} + Z \geq Y > E_{n \times n}$ , где элемент  $\alpha$  — некоторый атом решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ . Доказано, что  $V = \text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha))$ .  $\square$

Коатомами частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$  являются столбцовые пространства простых матриц. Столбцовые пространства элементарных матриц из теоремы 7, могут быть коатомами частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ . Если решётка  $(L, \wedge, \vee, \leq)$  не имеет атомов, то столбцовые пространства элементарных матриц первого вида не являются коатомами частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ . Если решётка  $(L, \wedge, \vee, \leq)$  не имеет атомов, то столбцовые пространства элементарных матриц второго вида не являются коатомами частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ .

**Теорема 8.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $k, l, m = 1, \dots, n$ ,  $k \neq l$ . Тогда следующие пространства попарно различны:

- 1)  $V_1 = \text{Column}(A)$ , где  $A \in P^{n \times n}$  — простая матрица;
- 2)  $V_2 = \text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha))$ , где  $\alpha$  — атом решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ ;
- 3)  $V_3 = \text{Column}(\text{El}_n(m, \eta))$ , где  $\eta$  — коатом решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ ,  $\eta > \tilde{0}$ .

**Доказательство.** Предположим противное и рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1:  $\text{Column}(A) = \text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha))$ . Тогда  $A = \text{El}_n(k, l, \alpha)B$  для некоторой обратимой матрицы  $B \in P^{n \times n}$ , т. е. идемпотент  $\text{El}_n(k, l, \alpha) = AB^{-1}$  является простой матрицей — противоречие.

Случай 2:  $\text{Column}(A) = \text{Column}(\text{El}_n(m, \eta))$ . Приводится к противоречию аналогично случаю 1.

Случай 3:  $\text{Column}(\text{El}_n(m, \eta)) = \text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha))$ . Для некоторой матрицы  $B \in P^{n \times n}$  справедливо равенство  $\text{El}_n(k, l, \alpha) = \text{El}_n(m, \eta)B$ . Тогда имеем, что

$$\tilde{1} = \|(\text{El}_n(k, l, \alpha))_{(m)}\| = \|(\text{El}_n(m, \eta)B)_{(m)}\| \leq \|(\text{El}_n(m, \eta))_{(m)}\| = \eta -$$

противоречие.  $\square$

## 5. Столбцовые пространства элементарных матриц первого вида

Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ . Столбцовые пространства элементарных матриц могут быть коатомами частично упо-

рядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ . Найдём условия, при которых столбцовые пространства элементарных матриц первого вида являются коатомами частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ .

**Лемма 2.** Пусть  $(L, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и  $\vee$ -неразложимой единицей  $\tilde{1}$ ,  $i, k = 1, \dots, n$ ,  $\eta$  — коатом решётки,  $\eta > \tilde{0}$  и  $\alpha \wedge \eta \neq \tilde{0}$  для любого элемента  $\alpha \in P$ ,  $\alpha > \tilde{0}$ ,  $B \in P^{n \times n}$ . Справедливы следующие утверждения.

1. Если  $\text{Column}(\text{El}_n(k, \eta)) \subseteq \text{Column}(B)$ , то  $B = \text{El}_n(k, \nu) \cdot M(\pi)$  для некоторой подстановочной матрицы  $M(\pi)$ , где  $\nu = \eta$  или  $\nu = \tilde{1}$ .
2. Если  $\text{Column}(\text{El}_n(k, \eta)) = \text{Column}(\text{El}_n(i, \nu))$ , где  $\nu \in P$ , то  $k = i$ ,  $\eta = \nu$ .
3. Если  $\text{Column}(\text{El}_n(k, \eta)) = \text{Column}(B)$ , где  $k = 1, \dots, n$ , то  $B = \text{El}_n(k, \eta) \cdot M(\pi)$  для некоторой подстановочной матрицы  $M(\pi)$ .

**Доказательство.** 1. Пусть  $E = E_{n \times n}$  — единичная матрица. Без потери общности можно считать, что  $k = 1$ . Рассмотрим столбцы матрицы  $\text{El}_n(k, \eta)$ , начиная со второго. Аналогично доказательству леммы 1 доказывается, что векторы  $E^{(2)}, E^{(3)}, \dots, E^{(n)}$  являются столбцами матрицы  $B$ . Без потери общности можно считать, что  $B^{(i)} = E^{(i)}$  для всех  $i \neq 1$ .

Рассмотрим первый столбец матрицы  $\text{El}_n(k, \eta)$ . Имеем  $\eta E^{(1)} = \lambda_{11} B^{(1)}$ , где  $B^{(1)} = {}^t(b_{11}, b_{21}, \dots, b_{n1})$ ,  $\eta = \lambda_{11} \wedge b_{11}$ ,  $\lambda_{11} \wedge b_{i1} = \tilde{0}$ ,  $i \neq 1$ . Тогда  $\eta \leq b_{11}$ ,  $\eta \leq \lambda_{11}$ ,  $\eta \wedge b_{i1} = \tilde{0}$ ,  $i \neq 1$ . Так как  $\alpha \wedge \eta \neq \tilde{0}$  для любого  $\alpha > \tilde{0}$ , то  $b_{i1} = \tilde{0}$ ,  $i \neq 1$ . Доказано, что  $B = \text{El}_n(1, \nu) M(\pi)$ , где  $\eta \leq b_{11} = \nu$ .

2. Равенство  $\text{Column}(\text{El}_n(k, \eta)) = \text{Column}(\text{El}_n(i, \nu))$  равносильно равенству  $\text{El}_n(i, \nu) = \text{El}_n(k, \eta) \cdot M(\pi)$  для некоторой подстановочной матрицы  $M(\pi)$ . Последнее равенство равносильно тому, что  $k = i$ ,  $\nu = \eta$ .

3. Последнее утверждение следует из утверждения 1.  $\square$

Лемма 2 даёт условия, при которых столбцовые пространства элементарных матриц первого вида являются коатомами в частично упорядоченном множестве  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ .

**Теорема 9.** Пусть  $(L, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и  $\vee$ -неразложимой единицей  $\tilde{1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $\eta$  — коатом решётки  $(L, \wedge, \vee, \leq)$ ,  $\eta > \tilde{0}$ . Если  $\alpha \wedge \eta \neq \tilde{0}$  для любого элемента  $\alpha \in P$ ,  $\alpha > \tilde{0}$ , то пространство  $\text{Column}(\text{El}_n(k, \eta))$  является коатомом частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ . Разные коатомы  $\eta$  определяют разные коатомы  $\text{Column}(\text{El}_n(k, \eta))$ .  $\square$

Рассмотрим условия, при которых столбцовые пространства элементарных матриц первого вида не являются коатомами частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ .

**Теорема 10.** Пусть  $(L, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $\eta$  — коатом решётки,  $\eta > \tilde{0}$ . Если  $\alpha \wedge \eta = \tilde{0}$  для некоторого элемента  $\alpha \in P$ ,  $\alpha > \tilde{0}$ , то пространства  $\text{Column}(\text{El}_n(k, \eta))$  не являются коатомами частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$  для всех  $k = 1, \dots, n$ .

**Доказательство.** Нужно утверждение следует из равенства  $\text{El}_n(k, \eta) = \text{El}_n(k, l, \alpha)\text{El}_n(k, \eta)$ .  $\square$

Рассмотрим условия, при которых данное пространство не содержится в коатомах частично упорядоченного множества  $(\text{Spac}_{n \times n}(P), \subseteq)$ , порождённых столбцами элементарных матриц первого вида.

**Лемма 3.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $A \in P^{n \times n}$ . Следующие утверждения равносильны.

1. Пространство  $\text{Column}(A)$  ( $\text{Row}(A)$ ) не содержится в пространствах  $\text{Column}(\text{El}_n(r, \eta))$  ( $\text{Row}(\text{El}_n(r, \eta))$ ), где  $\eta$  — коатомы решётки,  $r = 1, \dots, n$ .
2.  $\|A_{(r)}\| = \tilde{1}$  ( $\|A^{(r)}\| = \tilde{1}$ ),  $r = 1, \dots, n$ .  $\square$

## 6. Столбцовые пространства элементарных матриц второго вида

Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ . Столбцовые пространства элементарных матриц могут быть коатомами частично упорядоченного множества  $(\text{Spac}_{n \times n}(P), \subseteq)$ . Найдём условия, при которых столбцовые пространства элементарных матриц второго вида являются коатомами частично упорядоченного множества  $(\text{Spac}_{n \times n}(P), \subseteq)$ .

**Лемма 4.** Пусть  $(L, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и  $\vee$ -неразложимой единицей  $\tilde{1}$ ,  $i, j, k, l = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ ,  $k \neq l$ ,  $\lambda, \mu \in P$ ,  $B \in P^{n \times n}$ . Справедливы следующие утверждения.

1. Если  $\text{Column}(\text{El}_n(k, l, \lambda)) \subseteq \text{Column}(B)$ , то  $B = \text{El}_n(k, l, \mu) \cdot M(\pi)$  для некоторой подстановочной матрицы  $M(\pi)$  и некоторого элемента  $\mu \in P$ ,  $\mu \leq \lambda$ .
2. Если  $\text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha)) = \text{Column}(\text{El}_n(i, j, \beta))$ , то  $k = i$ ,  $l = j$ ,  $\alpha = \beta$ .
3. Если  $\text{Column}(\text{El}_n(k, l, \lambda)) = \text{Column}(B)$ , то  $B = \text{El}_n(k, l, \lambda) \cdot M(\pi)$  для некоторой подстановочной матрицы  $M(\pi)$ .

**Доказательство.** 1. Пусть  $E = E_{n \times n}$  — единичная матрица. Так как единица  $\tilde{1}$   $\vee$ -неразложима в решётке  $(L, \wedge, \vee, \leq)$ , то векторы  $E^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\vee$ -неразложимы над решёткой  $(P^{n \times 1}, \leq)$ .

Без потери общности будем считать, что  $k = 1$ ,  $l = 2$ . Столбцы матрицы  $\text{El}_n(1, 2, \lambda)$  являются линейными комбинациями столбцов матрицы  $B$ . Рассмотрим столбцы матрицы  $\text{El}_n(1, 2, \lambda)$ , начиная со второго. Пусть

$$E^{(i)} = \lambda_{i1}B^{(1)} + \lambda_{i2}B^{(2)} + \dots + \lambda_{in}B^{(n)}, \quad i \neq 1.$$

Так как столбец  $E^{(i)}$  является  $\vee$ -неразложимым в решётке  $P^{n \times 1}$ , то  $E^{(i)} = \lambda_{ir}B^{(r)}$  для некоторого индекса  $r$ .

Имеем  $\lambda_{ir} = \tilde{1}$ ,  $E^{(i)} = B^{(r)}$ . Без потери общности можно считать, что  $E^{(i)} = B^{(i)}$  для всех  $i = 2, \dots, n$ . Рассмотрим первый столбец матрицы  $\text{El}_n(1, 2, \lambda)$ . Имеем

$$E^{(1)} + \lambda E^{(2)} = \lambda_{11} B^{(1)} + \lambda_{12} B^{(2)} = \lambda_{11} B^{(1)} + \lambda_{12} E^{(2)}.$$

Поэтому  $B^{(1)} = {}^t(b_{11}, b_{21}, \tilde{0}, \dots, \tilde{0})$ ,  $\tilde{1} = \lambda_{11} \wedge b_{11}$ ,  $\lambda = (\lambda_{11} \wedge b_{21}) \vee \lambda_{12}$ . Значит,  $\lambda_{11} = b_{11} = \tilde{1}$ ,  $\lambda = b_{21} \vee \lambda_{12}$ . Отсюда следует, что  $B^{(1)} = {}^t(\tilde{1}, b_{21}, \tilde{0}, \dots, \tilde{0})$ ,  $B = \text{El}_n(1, 2, b_{21})$ ,  $b_{21} \leq \lambda$ . Доказано, что  $B = \text{El}_n(k, l, \mu)$ , где  $\mu = b_{21} \leq \lambda$ .

2. Равенство  $\text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha)) = \text{Column}(\text{El}_n(i, j, \beta))$  равносильно равенству  $\text{El}_n(i, j, \mu) = \text{El}_n(k, l, \lambda) \cdot M(\pi)$  для некоторой подстановочной матрицы  $M(\pi)$ . Последнее равенство равносильно тому, что  $k = i$ ,  $l = j$ ,  $\alpha = \beta$ .

3. Из утверждения 1 следует, что  $B = \text{El}_n(k, l, \mu) \cdot M(\pi)$  для некоторой подстановочной матрицы  $M(\pi)$  и некоторого элемента  $\mu \in P$ ,  $\mu \leq \lambda$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{Column}(\text{El}_n(k, l, \lambda)) &= \text{Column}(B) = \\ &= \text{Column}(\text{El}_n(k, l, \mu) \cdot M(\pi)) = \text{Column}(\text{El}_n(k, l, \mu)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\text{El}_n(k, l, \mu) = \text{El}_n(k, l, \lambda) \cdot M(\sigma)$  для некоторой подстановочной матрицы  $M(\sigma)$ . Значит,  $\mu = \lambda$ .  $\square$

Лемма 4 даёт условия, при которых столбцовые пространства элементарных матриц второго вида являются коатомами частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ .

**Теорема 11.** Пусть  $(L, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и  $\vee$ -неразложимой единицей  $\tilde{1}$ ,  $k, l = 1, \dots, n$ ,  $k \neq l$ ,  $\alpha \in P$ . Справедливы следующие утверждения.

1. Пространство  $\text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha))$  является коатомом частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$  тогда и только тогда, когда  $\alpha$  является атомом решётки  $(L, \wedge, \vee, \leq)$ .
2. Разные атомы  $\alpha$  определяют разные коатомы вида  $\text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha))$ .

**Доказательство.** Докажем первое утверждение. Пусть пространство  $\text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha))$  является коатомом частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$  и  $\beta < \alpha$ . Имеем  $\text{El}_n(k, l, \alpha) = \text{El}_n(k, l, \beta) \cdot \text{El}_n(k, l, \alpha)$ ,  $\text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha)) \subset \text{Column}(\text{El}_n(k, l, \beta)) = P^{n \times 1}$ . Тогда  $\text{El}_n(k, l, \beta)$  — обратимая матрица. Значит,  $\beta = \tilde{0}$  и  $\alpha$  — атом решётки  $(L, \wedge, \vee, \leq)$ .

Пусть теперь  $\alpha \in P$ ,  $\text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha)) \subset \text{Column}(B)$ , где  $B \in P^{n \times n}$ . Из леммы 4 следует, что  $B = \text{El}_n(k, l, \mu) \cdot M(\pi)$  для некоторой подстановочной матрицы  $M(\pi)$  и некоторого элемента  $\mu \in P$ ,  $\mu \leq \alpha$ . Поэтому  $\mu = \alpha$  или  $\mu = \tilde{0}$ . Значит, пространство  $\text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha))$  является коатомом частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ .

Утверждение 2 доказано в лемме 4.  $\square$

Рассмотрим условия, при которых данное пространство не содержится в коатомах частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ , порождённых столбцами элементарных матриц второго вида.

**Лемма 5.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $\alpha$  — атом решётки,  $A \in P^{n \times n}$ . Следующие утверждения равносильны.

1. Пространство  $\text{Column}(A)$  ( $\text{Row}(A)$ ) не содержится в пространствах  $\text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha))$  ( $\text{Row}(\text{El}_n(k, l, \alpha))$ ), где  $k, l = 1, \dots, n$ ,  $k \neq l$ .
2. Для всех  $r = 1, \dots, n$  семейство строк матрицы  $\text{El}_n(r, \alpha) \cdot A$  (столбцов матрицы  $A \cdot \text{El}_n(r, \alpha)$ ) является  $\leq$ -антицепью.

**Доказательство.** Докажем импликацию  $1 \implies 2$ . Матрицы  $\text{El}_n(k, l, \alpha)$  не являются левыми делителями матрицы  $A$ . Предположим, что для некоторого  $r$  семейство строк матрицы  $\text{El}_n(r, \alpha) \cdot A$  не является  $\leq$ -антицепью.

Случай 1:  $A_{(l)} \geq A_{(k)}$ ,  $k, l \neq r$ . Имеем  $A_{(l)} \geq A_k \geq \alpha A_{(k)}$ . Поэтому матрица  $A$  делится слева на элементарную матрицу  $\text{El}_n(k, l, \alpha)$  — противоречие.

Случай 2: строки  $A_{(l)}$  и  $\alpha A_{(r)}$ , где  $r \neq l$ , сравнимы по отношению  $\leq$ . Если  $A_{(l)} \geq \alpha A_{(r)}$ , то матрица  $A$  делится слева на элементарную матрицу  $\text{El}_n(r, l, \alpha)$  — противоречие. Если  $\alpha A_{(r)} \geq A_{(l)}$ , то  $A_{(r)} \geq \alpha A_{(r)} \geq \alpha A_{(l)}$ , и матрица  $A$  делится слева на элементарную матрицу  $\text{El}_n(l, r, \alpha)$  — противоречие.

Доказано, что семейство строк матрицы  $\text{El}_n(r, \alpha) \cdot A$  является  $\leq$ -антицепью для всех  $r = 1, \dots, n$ .

Докажем импликацию  $2 \implies 1$ . Предположим, что матрица  $A$  делится слева на некоторую элементарную матрицу  $\text{El}_n(k, l, \alpha)$ , где  $1 \leq k, l \leq n$ ,  $k \neq l$ . Тогда  $A_{(l)} \geq \alpha A_{(k)}$ , и семейство строк матрицы  $\text{El}_n(k, l, \alpha) \cdot A$  не является  $\leq$ -антицепью — противоречие.  $\square$

## 7. Существование простых матриц над дистрибутивными решётками

Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $A \in P^{n \times n}$ ,  $L(A) = \text{Lattice}(A)$  — решётка, порождённая элементами матрицы  $A$ .

**Теорема 12.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ . Тогда над решёткой  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  не существует простых  $(2 \times 2)$ -решёточных матриц.

**Доказательство.** Предположим, что существует простая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in P^{2 \times 2}.$$

Из теоремы 1 (см. пункт 1) следует, что  $a \vee c = b \vee d = \tilde{1}$ . Справедливы равенства

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{1} & a \wedge b \\ \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} \\ c \wedge d & \tilde{1} \end{pmatrix} \cdot A.$$

Так как  $A$  — простая матрица, то матрицы

$$\begin{pmatrix} \tilde{1} & a \wedge b \\ \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} \\ c \wedge d & \tilde{1} \end{pmatrix}$$

обратимы. Из теоремы Гивеона—Скорнякова получаем, что  $a \wedge b = c \wedge d = \tilde{0}$ . Имеем

$${}^t A \cdot A = \begin{pmatrix} a \vee c & (a \wedge b) \vee (c \wedge d) \\ (a \wedge b) \vee (c \wedge d) & b \vee d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица  $A$  обратима — противоречие.  $\square$

Рассмотрим достаточные условия существования левого (правого) простого делителя данной матрицы.

**Лемма 6.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ , необратимая матрица  $A \in P^{n \times n}$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $\|A_{(r)}\| = \tilde{1}$  ( $\|A^{(r)}\| = \tilde{1}$ ) для всех  $r = 1, \dots, n$ ;
- 2) семейство строк матрицы  $\text{El}_n(r, \alpha) \cdot A$  (столбцов матрицы  $A \cdot \text{El}_n(r, \alpha)$ ) является  $\leq$ -антицепью для всех  $r = 1, \dots, n$  и любых атомов  $\alpha$  решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ .

Если каждое пространство из множества  $\text{Space}_{n \times n}(P)$ , отличное от пространства  $P^{n \times 1}$ , содержится в некоторых коатомах частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ , то матрица  $A$  имеет левый (правый) простой делитель.

**Доказательство.** Пространство  $\text{Column}(A)$  содержится в одном из коатомов, который определён теоремой 7 (см. пункт 3). Из свойств матрицы  $A$  следует, что пространство  $\text{Column}(A)$  не содержится в коатомах  $V = \text{Column}(\text{El}_n(k, l, \alpha))$ , где  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq l$ , элемент  $\alpha$  — некоторый атом решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ , и  $V = \text{Column}(\text{El}_n(k, \eta))$ , где  $k = 1, \dots, n$ , элемент  $\eta$  — некоторый коатом решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ . Поэтому пространство  $\text{Column}(A)$  содержится в одном из коатомов  $V = \text{Column}(B)$ , где  $B \in P^{n \times n}$  — простая матрица. Простая матрица  $B$  — левый делитель матрицы  $A$ .  $\square$

Универсальная матрица  $J_{n \times n}$  не обладает свойством 2), но имеет и левые и правые простые делители. Рассмотрим критерий существования простых матриц.

**Теорема 13.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$  и каждое пространство, принадлежащее множеству  $\text{Space}_{n \times n}(P)$  и отличное от пространства  $P^{n \times 1}$ , содержится в некоторых коатомах частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ . Тогда над решёткой  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  существуют простые  $(n \times n)$ -матрицы для всех  $n \geq 3$ .

**Доказательство.** Рассмотрим матрицу дополнений  $A = \overline{E_{n \times n}} \in P^{n \times n}$ . Матрица  $A$  не является обратимой и обладает свойствами 1) и 2) леммы 6. Из леммы 6 получаем нужное утверждение.  $\square$

Матрица  $\overline{E_{n \times n}}$ , использованная при доказательстве теоремы 13, может быть как простой, так и факторизуемой.

Для конечных дистрибутивных решёток теорема 13 даёт критерий существования простых матриц.

**Следствие 3.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — конечная дистрибутивная решётка,  $|P| \geq 2$ . Тогда над решёткой  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  существуют простые  $(n \times n)$ -матрицы, для всех  $n \geq 3$ .

**Доказательство.** Частично упорядоченное множество  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$  конечно. Поэтому каждое пространство, принадлежащее множеству  $\text{Space}_{n \times n}(P)$  и отличное от пространства  $P^{n \times 1}$ , содержится в некоторых коатомах частично упорядоченного множества  $(\text{Space}_{n \times n}(P), \subseteq)$ .  $\square$

Рассмотрим критерий существования простых матриц над дистрибутивными решётками.

**Теорема 14.** Пусть  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — дистрибутивная решётка с нулём  $\tilde{0}$  и единицей  $\tilde{1}$ ,  $A \in P^{n \times n}$ , решётка  $L(A) = \text{Lattice}(A)$  содержит  $\tilde{0}$  и  $\tilde{1}$ . Справедливы следующие утверждения.

1. Если матрица  $A$  проста над решёткой  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ , то матрица  $A$  проста над любой подрешёткой  $(Q, \wedge, \vee, \leq)$  решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ , содержащей подрешётку  $L(A)$ .
2. Если матрица  $A$  проста над любой конечной подрешёткой  $(Q, \wedge, \vee, \leq)$  решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ , содержащей подрешётку  $L(A)$ , то матрица  $A$  проста над решёткой  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ .
3. Матрица  $A$  проста над решёткой  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  тогда и только тогда, когда матрица  $A$  проста над любой конечной подрешёткой  $(Q, \wedge, \vee, \leq)$  решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ , содержащей подрешётку  $L(A)$ .

**Доказательство.** Пусть матрица  $A$  проста над решёткой  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ . Предположим противное: матрица  $A$  факторизуема над некоторой решёткой  $(Q, \wedge, \vee, \leq)$ . Пусть  $A = BC$ , где  $B, C \in Q^{n \times n}$  не являются обратимыми над решёткой  $(Q, \wedge, \vee, \leq)$ . Тогда матрицы  $B, C$  не являются обратимыми над решёткой  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ . Мы получили, что матрица  $A$  факторизуема над решёткой  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  — противоречие.

Пусть матрица  $A$  проста над любой конечной подрешёткой  $(Q, \wedge, \vee, \leq)$  решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ , содержащей подрешётку  $L(A)$ . Предположим противное: матрица  $A$  факторизуема над решёткой  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ . Тогда существуют необратимые над решёткой  $(P, \wedge, \vee, \leq)$  матрицы  $B, C \in P^{n \times n}$ , такие что  $A = BC$ .

Пусть  $(Q, \wedge, \vee, \leq)$  — конечная подрешётка решётки  $(P, \wedge, \vee, \leq)$ , порождённая элементами матриц  $A, B, C$ . Матрицы  $B, C$  не являются обратимыми над решёткой  $(Q, \wedge, \vee, \leq)$ . Получили, что матрица  $A$  факторизуема над решёткой  $(Q, \wedge, \vee, \leq)$  — противоречие.  $\square$

Работа осуществлена в соответствии с тематическим планом научно-исследовательских работ Рособразования (тема 1.3.07).

## Литература

- [1] Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Комбинаторика неотрицательных матриц. — М.: ТВП, 2000.
- [2] Скорняков Л. А. Обратимые матрицы над дистрибутивными структурами // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 2. — С. 182—185.
- [3] Borosh J., Hartfiel D. J., Maxson C. J. Answer to questions posed by Richman and Schneider // Linear and Multilinear Algebra. — 1976. — Vol. 3. — P. 255—258.
- [4] De Caen D. Prime Boolean Matrices: M. Sci. Thesis. — Queen's Univ., Kingston, Ontario, 1979.
- [5] De Caen D., Gregory D. A. Prime Boolean matrices // Combinatorial Mathematics VII. Proc. 7th Aust. Conf. Newcastle (Aust.), 1979. — Berlin: Springer, 1980. — (Lect. Notes Math.; Vol. 829). — P. 76—82.
- [6] De Caen D., Gregory D. A. Primes in the semigroup of Boolean matrices // Linear Algebra Appl. — 1981. — Vol. 37. — P. 119—134.
- [7] Cho H. H. Prime Boolean matrices and factorizations // Linear Algebra Appl. — 1993. — Vol. 190. — P. 87—98.
- [8] Cho H. H. Permanents of prime Boolean matrices // Bull. Korean Math. Soc. — 1998. — Vol. 35, no. 3. — P. 605—613.
- [9] Devadze H. M. Generating sets of semigroups of all binary relations in a finite set // Dokl. Akad. Nauk BSSR. — 1968. — Vol. 12. — P. 765—768.
- [10] Gregory D. A., Pullman N. J. Prime Boolean matrices, a graph theoretic approach // Ars Combinatoria. — 1981. — Vol. 12. — P. 81—110.
- [11] Gregory D. A., Pullman N. J. Semiring rank: Boolean rank and nonnegative rank factorization // J. Combin. Inform. System Sci. — 1983. — Vol. 8, no. 3. — P. 223—233.
- [12] Giveon Y. Lattice matrices // Inform. Control. — 1964. — Vol. 7. — P. 477—484.
- [13] Kim K. H. Boolean Matrix Theory and Its Applications. — New York: Marcel Dekker, 1982.
- [14] Richman D. J., Schneider H. Primes in the semigroup of nonnegative matrices // Linear and Multilinear Algebra. — 1974. — Vol. 2. — P. 135—140.
- [15] Tchuente M. On the Decomposition of Boolean Matrices. — Grenoble: Univ. of Grenoble, 1980.

