Что общего имеют энгелевы и полугрупповые тождества?

О. МАЦЕДОНЬСКАЯ
Силезский политехнический университет,
Гливице, Польша
e-mail: o.macedonska@polsl.pl

УДК 512.543.22+512.543.25+512.543.27

Ключевые слова: энгелевы тождества, положительные тождества, локально ступенчатые группы, почти нильпотентные группы.

Аннотация

Статья связана с вопросом Р. Бёрнса о том, что общее в энгелевых и полугрупповых тождествах обеспечивает то, что конечно порождённые локально ступенчатые группы, им удовлетворяющие, содержат нильпотентную подгруппу конечного индекса? Мы показываем, что энгелевы и полугрупповые тождества имеют одинаковую так называемую энгелеву конструкцию, а каждая конечно порождённая локально ступенчатая группа, удовлетворяющая тождеству с такой конструкцией, должна содержать нильпотентную подгруппу конечного индекса.

Abstract

O. Macedońska, What do the Engel laws and positive laws have in common?, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 175—183.

The work is inspired by a question of R. Burns: What do the Engel laws and positive laws have in common that forces finitely generated, locally graded groups satisfying them to be nilpotent-by-finite? The answer is that these laws have the same so-called Engel construction.

Введение

Пусть $F = \langle x, y \rangle$ — это свободная группа ранга 2, u — слово, а S — подмножество в F.

Определение 1. Будем говорить, что тождество $w \equiv 1$ имеет конструкцию $u \mathrel{\widetilde{\in}} S$, если оно эквивалентно тождеству $u \equiv s$ для некоторого $s \in S$.

Слова с одинаковой конструкцией обладают некоторыми общими свойствами. Например, группы, удовлетворяющие тождествам с конструкцией $[x, y] \mathrel{\widetilde{\in}} F''$, обязательно имеют совершенный коммутант.

Будем использовать обозначения $x^{y^i} = y^{-i}xy^i$, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $[x, {}_iy]$ — это энгелев коммутатор $\bigl[\dots\bigl[[x, y], y\bigr], \dots, y\bigr]$, где y повторяется i раз, $[x, {}_0y] = x$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 7, с. 175—183.
© 2008 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

Через E_n обозначим следующую подгруппу, порождённую энгелевыми коммутаторами:

$$E_n = \big\langle [x, {}_i y],\ 0 \leqslant i \leqslant n \big\rangle.$$

Мы покажем, что каждое бинарное коммутаторное тождество эквивалентно тождеству со следующей так называемой *энгелевой конструкцией*:

$$[x, y]^{k_1}\, [x, {}_2 y]^{k_2} \ldots [x, {}_n y]^{k_n} \mathrel{\widetilde{\in}} E_n'.$$

Пусть $w \equiv 1$ — это бинарное тождество, $\mathfrak{V}$ — определяемое им многообразие. Мы докажем следующие утверждения.

1. Каждая конечно порождённая группа в $\mathfrak{V}$ имеет конечно порождённый коммутант тогда и только тогда, когда тождество $w \equiv 1$ влечёт тождество с энгелевой конструкцией
$$[x, {}_n y] \mathrel{\widetilde{\in}} E_{n-1}. \qquad (1)$$
2. Полугрупповые тождества и энгелевы тождества имеют энгелеву конструкцию типа (1). Тождество $x^k \equiv 1$ также влечёт тождество с энгелевой конструкцией (1).
3. Каждая конечно порождённая локально ступенчатая группа с тождеством, имеющим энгелеву конструкцию типа (1), является почти нильпотентной.

Энгелева конструкция тождеств

Покажем, что каждое бинарное коммутаторное тождество эквивалентно тождеству $w \equiv 1$, в котором для некоторого n слово w является произведением энгелевых коммутаторов $[x, {}_i y]$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Теорема 1. *Каждое бинарное коммутаторное тождество* $w \equiv 1$ *имеет следующую энгелеву конструкцию*:

$$[x, y]^{k_1}\, [x, {}_2 y]^{k_2} \ldots [x, {}_n y]^{k_n} \mathrel{\widetilde{\in}} E_n', \quad k \geqslant 0, \quad k_i \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Пусть $w \equiv 1$ — коммутаторное тождество. Заметим, что F' лежит в нормальном замыкании элемента x в F, свободно порождённом всеми элементами вида x^{y^i}, $i \in \mathbb{Z}$. Таким образом, w является произведением некоторых x^{y^i}, где $-m \leqslant i \leqslant -m + n$. Сопряжение при помощи y^m даёт нам эквивалентное тождество, в котором $w \in \langle x^{y^i},\ 0 \leqslant i \leqslant n \rangle$. В этой подгруппе мы можем заменить свободные образующие x^{y^i} на $x^{-1} x^{y^i} = [x, y^i]$, тогда получим, что

$$w \in \langle x^{y^i},\ 0 \leqslant i \leqslant n \rangle = \langle x,\ [x, y^i],\ 1 \leqslant i \leqslant n \rangle. \qquad (2)$$

Докажем по индукции, что $\langle x,\ [x, y^i],\ 1 \leqslant i \leqslant n \rangle \subseteq E_n$, показывая для всех $k > 0$, что $[x, y^k] \in E_{k-1}[x, {}_k y]$. Для $k = 1$ это очевидно. Предположим теперь, что $[x, y^k] \in E_{k-1}[x, {}_k y]$. Если произвести замену $x \to [x, y]$, получим, что

$$\big[[x, y], y^k\big] \in E_k[x, {}_{k+1} y].$$

Теперь, применяя индуктивное предположение и его следствие к коммутаторному тождеству

$$[x, y^{k+1}] = [x, y^k]\,[x, y]\,\bigl[[x, y], y^k\bigr],$$

мы получим для $k \geqslant 0$, что

$$[x, y^{k+1}] \in E_k[x, {}_{k+1}y]. \tag{3}$$

На основании (2) получаем, что

$$w \in \langle x,\, [x, y^i],\ 1 \leqslant i \leqslant n\rangle \subseteq E_n.$$

Следовательно, каждое коммутаторное тождество эквивалентно тождеству $w \equiv 1$, в котором для некоторого n слово w является произведением энгелевых коммутаторов $[x, {}_iy]$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Упорядочивая эти коммутаторы по модулю E_n', мы получаем тождество с конструкцией

$$[x, y]^{k_1}\,[x, {}_2y]^{k_2} \ldots [x, {}_ny]^{k_n} \mathrel{\widetilde{\in}} E_n', \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad n \geqslant 0. \qquad \square$$

Свойство Милнора и $\mathfrak{R}$-тождества

Для рассмотрения тождеств специального вида напомним определение свойства Милнора для групп (название было предложено в [11]).

Определение 2. Группа G обладает свойством Милнора, если для любых элементов $g, h \in G$ подгруппа $\langle h^{-i}gh^i,\ i \in \mathbb{Z}\rangle$ является конечно порождённой.

Заметим, что группа $\langle h^{-i}gh^i,\ i \in \mathbb{Z}\rangle$ инвариантна относительно сопряжения при помощи h, поэтому если она конечно порождённая, то равна $\langle h^{-i}gh^i,\ i \in \mathbb{N}\rangle$.

Название свойству дал результат Милнора [8, лемма 3] о том, что если конечно порождённая группа G обладает этим свойством, а A — абелева нормальная подгруппа в G, такая что группа G/A циклическая, то A является конечно порождённой. В 1976 г. С. Россет заметил, что предположение об абелевости A можно отбросить, и получил результаты, которые мы приводим в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть G — конечно порождённая группа со свойством Милнора. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Коммутант G' является конечно порождённым.*
2. *Если группа G/N циклическая, то подгруппа N является конечно порождённой.*
3. *Если группа G/N полициклическая, то подгруппа N является конечно порождённой.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 доказаны в [12, леммы 2, 3; 7, лемма 3, следствие 4]. Заметим, что в [7] группы со свойством Милнора называются ограниченными. Докажем утверждение 3. Если группа G/N полициклическая, то она имеет конечный нормальный ряд с циклическими факторами $G = N_0 \rhd N_1 \rhd \ldots \rhd N_m = N$. Последовательно применяя m раз утверждение 2, получаем что подгруппа N конечно порождённая. $\square$

Определим класс тождеств, называемых $\mathfrak{R}$-тождествами (от restraining — ограничивающий), и покажем, что каждая группа с $\mathfrak{R}$-тождеством обладает свойством Милнора.

Определение 3. Тождество называется $\mathfrak{R}$-тождеством, если оно влечёт тождество с энгелевой конструкцией

$$[x, y]^{k_1}\, [x, {}_2y]^{k_2} \ldots [x, {}_{n-1}y]^{k_{n-1}}\, [x, {}_ny] \mathrel{\widetilde{\in}} E'_{n-1}, \tag{4}$$

где $k_i \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$.

Пример 1. Очевидно, n-энгелево тождество $[x, {}_ny] \equiv 1$ является $\mathfrak{R}$-тождеством.

Пример 2. Каждое тождество вида $x^k \equiv 1$ является $\mathfrak{R}$-тождеством, так как оно влечёт тождество $[x, y^k] \equiv 1$, из которого по (3) следует тождество вида (4).

Теорема 2. *Тождество является $\mathfrak{R}$-тождеством тогда и только тогда, когда каждая группа, ему удовлетворяющая, обладает свойством Милнора.*

Доказательство. Обозначим

$$P_k = \left\langle x,\, x^{y^i},\ 1 \leqslant i \leqslant k \right\rangle$$

и покажем, что $[x, {}_ky] \in P_{k-1}x^{y^k}$.

Для $k = 1$ это ясно. Предположим, что $[x, {}_ky] \in P_{k-1}x^{y^k}$. Тогда

$$[x, {}_{k+1}y] \in \left(P_{k-1}x^{y^k}\right)^{-1}\left(P_{k-1}x^{y^k}\right)^y \subseteq P_k x^{y^{k+1}}.$$

Отсюда следует для $k \geqslant 0$, что $E_k \subseteq P_k$. Это влечёт равенство $E_k = P_k$, потому что

$$E_k \subseteq P_k = \left\langle x,\, x^{y^i},\ 1 \leqslant i \leqslant k \right\rangle \overset{(2)}{=} \langle x,\, [x, y^i],\ 1 \leqslant i \leqslant k\rangle \overset{(3)}{\subseteq} E_k.$$

Следовательно, конструкция $[x, {}_ny] \mathrel{\widetilde{\in}} E_{n-1}$ эквивалентна $x^{y^n} \mathrel{\widetilde{\in}} P_{n-1}$, т. е.

$$x^{y^n} \mathrel{\widetilde{\in}} \left\langle x,\, x^y,\, x^{y^2}, \ldots, x^{y^{n-1}} \right\rangle. \tag{5}$$

Благодаря возможности сопряжения при помощи y^{-n} получаем, что каждое $\mathfrak{R}$-тождество также имеет конструкцию

$$x \mathrel{\widetilde{\in}} \left\langle x^{y^{-n}},\, x^{y^{-(n-1)}}, \ldots, x^{y^{-2}},\, x^{y^{-1}} \right\rangle, \tag{6}$$

и, если заменить $y \to y^{-1}$, то

$$x \mathrel{\widetilde{\in}} \left\langle x^y,\, x^{y^2}, \ldots, x^{y^{(n-1)}},\, x^{y^n} \right\rangle. \tag{7}$$

Пусть G — относительно свободная группа, свободно порождённая элементами $a, b, \ldots$ и удовлетворяющая $\mathfrak{R}$-тождеству. Тогда из (7) следует, что

$$a \in \left\langle a^b,\, a^{b^2}, \ldots, a^{b^{(n-1)}}, a^{b^n} \right\rangle. \tag{8}$$

Если мы сопряжём (8) при помощи b^{-1}, то получим, что

$$a^{b^{-1}} \in \left\langle a,\, a^b, \ldots, a^{b^{(n-2)}},\, a^{b^{(n-1)}} \right\rangle \overset{(8)}{\subseteq} \left\langle a^b,\, a^{b^2}, \ldots, a^{b^{(n-1)}},\, a^{b^n} \right\rangle.$$

Повторяя сопряжение при помощи b^{-1}, получим для каждого $i > 0$, что

$$a^{b^{-i}} \in \left\langle a^b,\, a^{b^2}, \dots, a^{b^{(n-1)}},\, a^{b^n} \right\rangle. \tag{9}$$

Подобным образом для (6) имеем

$$a \in \left\langle a^{b^{-n}},\, a^{b^{-(n-1)}}, \dots, a^{b^{-2}},\, a^{b^{-1}} \right\rangle. \tag{10}$$

Сопряжение при помощи b даёт, что

$$a^b \in \left\langle a^{b^{-n+1}},\, a^{b^{-n}}, \dots, a^{b^{-1}},\, a \right\rangle \overset{(10)}{\subseteq} \left\langle a^{b^{-n}},\, a^{b^{-n+1}}, \dots, a^{b^{-1}} \right\rangle.$$

Повторяя сопряжение, мы получим для каждого $i > 0$, что

$$a^{b^i} \in \left\langle a^{b^{-n}},\, a^{b^{(-n+1)}}, \dots, a^{b^{-1}} \right\rangle,$$

что вместе с (9) даёт в итоге, что подгруппа

$$\langle b^{-i}ab^i,\ i \in \mathbb{Z} \rangle = \left\langle a^{b^{-n}},\, a^{b^{-(n-1)}}, \dots, a^{b^{-1}},\, a,\, a^b, \dots, a^{b^{n-1}},\, a^{b^n} \right\rangle \tag{11}$$

является конечно порождённой. Поскольку для каждых g, h в любой группе, удовлетворяющей $\mathfrak{R}$-тождеству, подгруппа $\langle h^{-i}gh^i,\ i \in \mathbb{Z} \rangle$ является образом $\langle b^{-i}a\,b^i,\ i \in \mathbb{Z} \rangle$, мы заключаем, что $\mathfrak{R}$-тождество влечёт свойство Милнора.

Обратно, пусть G — относительно свободная группа со свободными образующими a, b. Если подгруппа $\langle b^{-i}ab^i,\ i \in \mathbb{Z} \rangle$ является конечно порождённой, то существует n, для которого выполняется условие (11). Сопряжение при помощи b^n даёт, что

$$\langle b^{-i}ab^i,\ i \in \mathbb{Z} \rangle = \left\langle a,\, a^b,\, a^{b^2}, \dots, a^{b^{2n}} \right\rangle = \langle b^{-i}ab^i,\ i \in \mathbb{N} \rangle.$$

Отсюда получаем, что

$$a^{b^{2n+1}} \in \left\langle a,\, a^b,\, a^{b^2}, \dots, a^{b^{2n}} \right\rangle.$$

Поскольку каждое определяющее соотношение на свободных образующих является тождеством [9, 13.21], то G удовлетворяет тождеству с конструкцией типа (5), которая определяет $\mathfrak{R}$-тождество. □

Теорема 3. *Тождество является $\mathfrak{R}$-тождеством тогда и только тогда, когда в каждой конечно порождённой группе, ему удовлетворяющей, коммутант является конечно порождённым.*

Доказательство. Если G удовлетворяет $\mathfrak{R}$-тождеству, то по теореме 2 G обладает свойством Милнора, и по утверждению 1 леммы 1 коммутант G' является конечно порождённым.

Обратно, пусть G — относительно свободная группа, определённая тождеством $w \equiv 1$, со свободными образующими a, b и пусть коммутант G' является конечно порождённым. Тогда нормальное замыкание a равно

$$\langle b^{-i}ab^i,\ i \in \mathbb{Z} \rangle = \langle a \rangle [\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle G',$$

а значит, является конечно порождённым. Тогда для некоторого n выполняется условие (11). Отсюда следует, что G удовлетворяет свойству Милнора. Теперь по теореме 2 G удовлетворяет некоторому $\mathfrak{R}$-тождеству. □

Полугрупповые тождества — это тождества вида

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где u, v — разные слова в свободной группе $\langle x_1, x_2, \ldots\rangle$, в записи которых нет отрицательных степеней элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пример 3. Каждое полугрупповое тождество является $\mathfrak{R}$-тождеством.

Доказательство. Каждое полугрупповое тождество индуцирует бинарное полугрупповое тождество, если произвести подстановку $x_i \to xy^i$. Многими авторами было показано [6; 7; 11; 3, с. 520], что группа G, удовлетворяющая полугрупповому тождеству, обладает свойством Милнора. Тогда по теореме 2 полугрупповое тождество является $\mathfrak{R}$-тождеством. □

Пример 4. Ни для какого простого p многообразие $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — многообразие всех абелевых групп, а $\mathfrak{A}_p$ — многообразие всех абелевых групп периода p, не удовлетворяет никакому $\mathfrak{R}$-тождеству.

Доказательство. Многообразие $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}$ содержит 2-порождённую группу $W := C_p \operatorname{wr} C$ — сплетение циклической группы $C_p = \langle a\rangle$ порядка p и бесконечной циклической группы $C = \langle b\rangle$. Коммутант W' этого сплетения содержит элементы $a^{-1}a^{b^i}$ для всех $i \in \mathbb{Z}$, следовательно, коммутант W' имеет бесконечный носитель, поэтому не может быть конечно порождённым. Теперь по теореме 2 получаем, что $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}$ не удовлетворяет никакому $\mathfrak{R}$-тождеству. □

Конечно порождённая конечно аппроксимируемая группа, удовлетворяющая энгелеву тождеству или полугрупповому тождеству, является почти нильпотентной. Это доказано для энгелевых тождеств в [14], а для полугрупповых тождеств — в [13]. Мы показали в примерах 1—3, что энгелевы тождества и полугрупповые тождества являются $\mathfrak{R}$-тождествами. Следующая лемма расширяет упомянутые выше результаты на все $\mathfrak{R}$-тождества.

Лемма 2. *Каждая конечно порождённая конечно аппроксимируемая группа, удовлетворяющая $\mathfrak{R}$-тождеству, является почти нильпотентной.*

Доказательство. В [4, теорема A] показано, что если каждая конечно порождённая метабелева группа, удовлетворяющая тождеству $w \equiv 1$, является почти нильпотентной, то то же самое верно для всех конечно аппроксимируемых групп. При этом параметры (нильпотентность и период) зависят только от тождества.

Таким образом, достаточно показать, что каждая конечно порождённая метабелева группа, удовлетворяющая $\mathfrak{R}$-тождеству, является почти нильпотентной. Пусть G — конечно порождённая разрешимая группа (например, метабелева), удовлетворяющая $\mathfrak{R}$-тождеству. Из [5, теорема C] следует, что либо G является почти нильпотентной, либо многообразие $\operatorname{var} G$ содержит подмногообразие $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}$. Так как последнее невозможно (согласно примеру 4), то лемма доказана. □

Следующее свойство $\mathfrak{R}$-тождеств связано с пересечением всех подгрупп конечного индекса в G (обозначаем его через R).

Теорема 4. *В каждой конечно порождённой группе G, удовлетворяющей $\mathfrak{R}$-тождеству, пересечение всех подгрупп конечного индекса R является конечно порождённым.*

Доказательство. По предположению группа G/R удовлетворяет $\mathfrak{R}$-тождеству. Тогда по теореме 2 она обладает свойством Милнора. По лемме 2 группа G/R является почти нильпотентной, т. е. G/R содержит нильпотентную подгруппу H/R конечного индекса. Поскольку $|G : H| = |(G/R) : (H/R)| < \infty$ и G конечно порождённая, то H и H/R — конечно порождённые группы. Будучи конечно порождённой нильпотентной группой, H/R является полициклической (см. [9, 31.12]). Поскольку H/R также обладает свойством Милнора, то по утверждению 3 леммы 1 R является конечно порождённым. □

$\mathfrak{R}$-тождества и локально ступенчатые группы

Как энгелевы, так и полугрупповые тождества являются $\mathfrak{R}$-тождествами. Это общее свойство необходимо и достаточно для ответа на вопрос, почему энгелевы и полугрупповые тождества заставляют конечно порождённые локально ступенчатые группы быть почти нильпотентными.

Напомним, что группа G называется *локально ступенчатой*, если каждая нетривиальная конечно порождённая подгруппа в G содержит собственную нормальную подгруппу конечного индекса. Класс локально ступенчатых групп замкнут относительно подгрупп и расширений, а также содержит все группы, локально аппроксимируемые группами из этого класса.

Понятие локально ступенчатой группы было введено С. Н. Черниковым в 1970 г. [2], чтобы отделить бесконечные группы Бернсайда и монстры Ольшанского—Тарского.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Каждая конечно порождённая локально ступенчатая группа, удовлетворяющая $\mathfrak{R}$-тождеству, почти нильпотентна.*

Доказательство. Пусть G — конечно порождённая локально ступенчатая группа. По теореме 4 пересечение всех подгрупп конечного индекса R является конечно порождённым. Поскольку группа G локально ступенчатая, R (если $R \neq 1$) содержит собственную нормальную подгруппу конечного индекса $T \subsetneq R$.

Тогда (см. [9, 41.43]) T содержит подгруппу K конечного индекса в R, вполне характеристическую в R, $K \subseteq T \subsetneq R$. Следовательно, K нормальна в G. Поскольку R/K конечна и G/R почти нильпотентна, ввиду $(G/K)/(R/K) \cong G/R$ имеем, что G/K является расширением конечной группы при помощи почти нильпотентной. Поскольку расширение конечной группы при помощи нильпотентной почти нильпотентно, то G/K почти нильпотентна и, следовательно, конечно аппроксимируема. Следовательно, $R \subseteq K$, что противоречит условию $K \subseteq T \subsetneq R$.

Значит, $R = 1$ и G конечно аппроксимируема. Тогда по лемме 2 G почти нильпотентна. $\square$

Более того, пусть $\mathfrak{N}_c$ обозначает многообразие всех нильпотентных групп класса $\leqslant c$, $\mathfrak{B}_e$ — многообразие, состоящее из всех локально конечных групп периодов, делящих e (тот факт, что класс $\mathfrak{B}_e$ является многообразием, следует из решения Е. И. Зельмановым ограниченной проблемы Бернсайда). На основании результата из работы [4], упомянутого в доказательстве леммы 2, получаем следствие 1.

Следствие 1. *Для каждого $\mathfrak{R}$-тождества существуют положительные целые числа c и e, зависящие только от этого тождества, такие что каждая локально ступенчатая группа, удовлетворяющая этому тождеству, лежит в произведении многообразий $\mathfrak{N}_c\mathfrak{B}_e$.*

Замечание. Вне класса локально ступенчатых групп существуют конечно порождённые группы, удовлетворяющие $\mathfrak{R}$-тождеству, которые не являются почти нильпотентными. Например, свободные группы Бернсайда $B(r,n)$, $r > 1$, удовлетворяют $\mathfrak{R}$-тождеству $x^n \equiv 1$. Если n достаточно большое, то группы бесконечны (результат П. С. Новикова и С. И. Адяна [1]), а следовательно, не являются почти нильпотентными. Заметим также, что конечно порождённые группы, удовлетворяющие $\mathfrak{R}$-тождеству $xy^n = y^n x$, не являются почти нильпотентными для достаточно большого n. Другой пример дают группы А. Ю. Ольшанского и А. Сторожева из [10].

Вопрос. Как выглядят $\mathfrak{R}$-тождества, которые не влекут ни энгелевых, ни полугрупповых тождеств?

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания.

Литература

[1] Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. — М.: Наука, 1975.

[2] Черников С. Н. Бесконечные неабелевы подгруппы с условием инвариантности для бесконечных неабелевых подгрупп // ДАН СССР. — 1970. — Т. 194. — С. 1280—1283.

[3] Burns R. G., Macedońska O., Medvedev Yu. Groups satisfying semigroup laws, and nilpotent-by-Burnside varieties // J. Algebra. — 1997. — Vol. 195. — P. 510—525.

[4] Burns R. G., Medvedev Yu. Group laws implying virtual nilpotence // J. Austral. Math. Soc. — 2003. — Vol. 74. — P. 295—312.

[5] Groves J. R. J. Varieties of soluble groups and a dichotomy of P. Hall // Bull. Austral. Math. Soc. — 1971. — Vol. 5. — P. 391—410.

[6] Gruenberg K. W. Two theorems on Engel groups // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1953. — Vol. 49. — P. 377—380.

[7] Kim Y. K., Rhemtulla A. H. Weak maximality conditions and polycyclic groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1995. — Vol. 123. — P. 711—714.

[8] Milnor J. Growth of finitely generated solvable groups // J. Differential Geom. — 1968. — Vol. 2. — P. 447—449.

[9] Neumann H. Varieties of Groups. — Berlin: Springer, 1967.

[10] Ol'shanskii A. Yu., Storozhev A. A group variety defined by a semigroup law // J. Austral. Math. Soc. (Ser. A). — 1996. — Vol. 60. —

[11] Point F. Milnor identities // Commun. Algebra. — 1996. — Vol. 24, no. 12. — P. 3725—3744.

[12] Rosset S. A property of groups of non-exponential growth // Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 54. — P. 24—26.

[13] Semple J. F., Shalev A. Combinatorial conditions in residually finite groups. I // J. Algebra. — 1993. — Vol. 157. — P. 43—50.

[14] Wilson J. S. Two-generator conditions for residually finite groups // Bull. London Math. Soc. — 1991. — Vol. 23. — P. 239—248.