О слабо специальном радикале полугрупп

А. Г. СОКОЛЬСКИЙ
Белгородский государственный университет
e-mail: sokolsky@bsu.edu.ru

УДК 512.552.7

Ключевые слова: радикалы полугрупп, первичный радикал.

Аннотация

Устанавливается совпадение слабо специального радикала полугрупп и радикала Бэра. Найдена характеристика полупростых в смысле радикала Бэра полугрупп.

Abstract

A. G. Sokolsky, On weakly special radical of semigroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 185—188.

The coincidence of the special radical of semigroups and the Baer radical is established. The characterization of semisimple semigroups in the sense of the Baer radical is found.

В заметке определено понятие слабо сепаративной полугруппы и показано, что полупростые в смысле (левого, правого) радикала Бэра полугруппы — это в точности слабо сепаративные (слева, справа) полугруппы. Отсюда выводится, что мультипликативные полугруппы полупервичных колец являются полупростыми в смысле радикала Бэра полугрупп.

Пусть $\mathcal{K}$ — класс полугрупп, замкнутый относительно гомоморфных образов и идеалов. Радикалом на классе $\mathcal{K}$ называется функция ρ, которая ставит в соответствие каждой полугруппе S из $\mathcal{K}$ некоторую её конгруэнцию ρS и для которой выполняются следующие условия:

1) $[\rho S = 0,\ T \cong S] \Longrightarrow \rho T = 0$;
2) $\rho(S/\theta) = 0 \Longrightarrow \rho S \subseteq \theta$;
3) $\rho(S/\rho S) = 0$.

Классы всех ρ-полупростых и всех ρ-радикальных полугрупп определяются следующим образом:

$$\mathcal{P}_\rho = \{S \in \mathcal{K} \mid \rho S = 0_S\}, \quad \mathcal{R}_\rho = \{S \in \mathcal{K} \mid \rho S = 1_S\}.$$

Класс полугрупп, замкнутый относительно изоморфизмов и содержащий одноэлементную полугруппу, называется типом (см. [1, 11.6]). На классе полугрупп, содержащем тип $\mathcal{B}$, можно определить радикал следующим образом:

$$\mathcal{B}\text{-}\operatorname{rad} S = \bigcap \{\beta \mid \beta \in S(S),\ S/\beta \in \mathcal{B}\}.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 7, с. 185—188.

Полугруппы, полупростые в смысле радикала $\mathcal{B}\text{-}\mathrm{rad}$, — это в точности полугруппы, изоморфные подпрямому произведению полугрупп из типа $\mathcal{B}$. Таким образом, радикал полугрупп однозначным образом определяется классом полупростых полугрупп. Например, класс сепаративных полугрупп определяет компрессивный радикал полугрупп.

Полугруппа S называется слабо праворегулярной (леворегулярной), если

$$(\forall s \in S^1)\,(asx = asy) \Longrightarrow a = 0 \vee x = y$$
$$((\forall s \in S^1)\,(xsa = ysa) \Longrightarrow a = 0 \vee x = y).$$

Если полугруппа является слабо праворегулярной и слабо леворегулярной, то назовём её первичной. Конгруэнция π на полугруппе S называется первичной, если S/π — первичная полугруппа.

Полугруппа S называется слабо сепаративной слева (справа), если

$$(\forall s \in S)\,(asa = asb \;\&\; bsb = bsa) \Longrightarrow a = b$$
$$((\forall s \in S)\,(asa = bsa \;\&\; bsb = asb) \Longrightarrow a = b).$$

Полугруппа называется слабо сепаративной, если она слабо сепаративна слева и справа.

Известно, что в полугруппах, как правило, левосторонний аналог радикала не совпадает с правосторонним аналогом. Например, правосторонний аналог радикала Бэра полугруппы определяется как пересечение всех слабо праворегулярных конгруэнций, а левосторонний аналог соответственно равен пересечению всех слабо леворегулярных конгруэнций.

Полугруппа S называется редуктивной слева (справа), если

$$(\forall s \in S)\,(sa = sb) \Longrightarrow a = b$$
$$((\forall s \in S)\,(as = bs) \Longrightarrow a = b).$$

Полугруппа называется наследственно редуктивной слева (справа), если любой её идеал является редуктивным слева (справа). Если полугруппа является одновременно наследственно редуктивной слева и справа, то она называется наследственно редуктивной.

Класс наследственно редуктивных слева (справа) полугрупп $\mathcal{Q}_{\mathrm{l}}$ ($\mathcal{Q}_{\mathrm{r}}$) определяет левосторонний (правосторонний) аналог радикала Бэра, а сами полугруппы являются полупростыми относительно соответствующих радикалов Бэра. Класс $\mathcal{Q}_{\mathrm{l}} \cap \mathcal{Q}_{\mathrm{r}}$ определяет радикал полугрупп, который впервые был рассмотрен А. В. Тищенко. Этот радикал l_0, как показано в [2], является одновременно наименьшим специальным радикалом и слабо специальным радикалом.

Полупростые в смысле радикала l_0 полугруппы описываются следующей теоремой.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны*:

1) S — *слабо сепаративная полугруппа*;
2) S — *наследственно редуктивная полугруппа*;

3) *S — подпрямое произведение первичных полугрупп*;
4) *S — полугруппа, полупростая в смысле радикала l_0.*

Доказательство. Эквивалентность пунктов 2), 3), 4) доказана в [3, предложение 8] и [2, предложение 2].

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 4). Предположим, что S не является полупростой в смысле радикала l_0. Тогда S не содержится в $\mathcal{Q}_{\mathrm{l}} \cap \mathcal{Q}_{\mathrm{r}}$. Если S не принадлежит классу $\mathcal{Q}_{\mathrm{r}}$, то $V_{\mathrm{r}} \neq 0_S$, и поэтому существует пара различных элементов $a, b \in S$, для которых найдётся такое наименьшее натуральное число n, что для любых $s_1, s_2, \ldots, s_n$ из S выполняются равенства

$$as_1a \cdots as_na = as_1a \cdots as_nb, \quad bs_1b \cdots bs_nb = bs_1b \cdots bs_na.$$

Легко убедиться, что для элементов

$$a_1 = as_1a \cdots as_{n-1}a \neq b_1 = as_1a \cdots as_{n-1}b$$

имеют место равенства

$$a_1sa_1 = a_1sb_1, \quad b_1sb_1 = b_1sa_1$$

для каждого $s \in S$. Но в силу слабой сепаративности отсюда следует, что $a = b$. Аналогично рассматривается случай, когда S не содержится в $\mathcal{Q}_{\mathrm{l}}$.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть S — подпрямое произведение праворегулярных полугрупп S_α, $\alpha \in Y$, с нулём, возможно присоединённым. Предположим, что для $x, y \in S$ для каждого $s \in S$ выполнено $xsx = xsy$, $ysy = ysx$. Тогда для любого $\alpha \in Y$

$$x_\alpha s_\alpha x_\alpha = x_\alpha s_\alpha y_\alpha, \quad y_\alpha s_\alpha y_\alpha = y_\alpha s_\alpha y_\alpha$$

для каждого $s_\alpha \in S_\alpha$. Если S_α не имеет нуля, то из слабой праворегулярности следует, что $x_\alpha = y_\alpha$. Если же S_α обладает нулём 0, то x_α и y_α могут равняться или не равняться нулю только одновременно, в этом случае из правой регулярности S_α следует, что $x_\alpha = y_\alpha$. Таким образом, $x = y$, т. е. S — слабо сепаративная слева полугруппа. Аналогично можно показать, что S — слабо сепаративная справа полугруппа. □

Следствие 1. *Класс слабо сепаративных полугрупп замкнут относительно взятия идеалов.*

Это следует из того, что класс наследственно редуктивных полугрупп замкнут относительно взятия идеалов [2, следствие 6].

Следствие 2. *Радикал l_0 является наименьшей слабо сепаративной конгруэнцией.*

Утверждение следует из второго пункта определения радикала полугрупп и теоремы 1.

Очевидно, что справедливы левосторонний и правосторонний аналоги теоремы 1 для соответствующих односторонних радикалов Бэра полугрупп.

Рассмотрим конгруэнции V_{l}, V_{r} из [3]: $(a,b) \in V_{\mathrm{l}}$ ($(a,b) \in V_{\mathrm{r}}$), если существует такое натуральное число k, что для любых $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$

$$as_1a \cdots as_ka = bs_1a \cdots as_ka \quad (as_1a \cdots as_ka = as_1a \cdots as_kb)$$

и

$$bs_1b \cdots bs_kb = as_1b \cdots bs_kb \quad (bs_1b \cdots bs_kb = bs_1b \cdots bs_ka).$$

Каждой из конгруэнций V_{l} и V_{r} соответствует нижний радикал в смысле Хёнке. Для V_{l}-радикала β_{l} полупростым классом будет $\mathcal{Q}_{\mathrm{l}}$, а для V_{r}-радикала β_{r} — класс $\mathcal{Q}_{\mathrm{r}}$. Радикал l_0 определяется полупростым классом $\mathcal{Q}_{\mathrm{l}} \cap \mathcal{Q}_{\mathrm{r}}$. Поэтому $l_0 = \beta_{\mathrm{l}} \vee \beta_{\mathrm{r}}$. Это означает, что радикал l_0 является нижним $V_{\mathrm{l}} \vee V_{\mathrm{r}}$-радикалом, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Нижний $V_{\mathrm{l}} \vee V_{\mathrm{r}}$-радикал совпадает с наименьшим (слабо) специальным радикалом.*

Из этой теоремы следует, что радикал l_0 можно назвать первичным радикалом или радикалом Бэра полугрупп.

Литература

[1] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1972.

[2] Тищенко А. В. Слабо специальные и специальные радикалы в полугруппах // Мат. сб. — 1974. — Т. 94 (136), № 4 (8). — С. 551—566.

[3] Hoehnke H.-J. Über das untere und obere Radikal einer Halbgruppe // Math. Z. — 1965. — B. 89. — S. 300—311.