Простые и псевдопростые алгебры с операторами

В. Л. УСОЛЬЦЕВ
Волгоградский государственный педагогический университет
e-mail: usl2004@mail.ru

УДК 512.572

Ключевые слова: универсальная алгебра с оператором, унарный редукт, псевдопростая алгебра, унар с тернарной мальцевской операцией.

Аннотация

В работе рассматриваются алгебры с операторами, т. е. алгебры с дополнительной системой унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций. Найдены необходимые условия конгруэнц-простоты и псевдопростоты произвольной универсальной алгебры с фиксированным оператором, а также описаны некоторые связи между строением её унарного редукта и свойствами её конгруэнций. Для алгебр с одной тернарной мальцевской операцией, заданной стандартным образом, и одним оператором (унаров с тернарной мальцевской операцией) получены необходимые и достаточные условия конгруэнц-простоты и псевдопростоты.

Abstract

V. L. Usoltsev, Simple and pseudosimple algebras with operators, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 189—207.

In this work, algebras with operators, i.e., algebras with an additional system of unary operations acting as endomorphisms with respect to the basic operations, are considered. We find necessary conditions for the simplicity and pseudosimplicity of an arbitrary universal algebra with a fixed operator and explore how several properties of congruences of this algebra depend on the structure of the unary reduct of a given algebra. For algebras with one ternary operation, defined in the standard way and satisfying Mal'cev's identities, and one operator (i.e., unars with Mal'cev's operation), necessary and sufficient conditions for their simplicity and pseudosimplicity are obtained.

Прогнозируя развитие алгебры в последние десятилетия XX века, А. Г. Курош в [5] отмечал, что между теорией универсальных алгебр и классическими разделами общей алгебры имеется достаточно большое слабоизученное пространство. А. Г. Курош обращает внимание на необходимость изучения *универсальных алгебр с операторами* [5, § 13], т. е. алгебр с дополнительной системой унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций. Эти операции называются *перестановочными* с основными операциями. К алгебрам с операторами близки дистрибутивные Ω-кольцоиды [5, § 15], которые изучались в [6, 10].

Унарные алгебры и, в частности, *унары* (алгебры с одной унарной операцией) образуют важный класс универсальных алгебр. Заметим, что каждая унарная

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 7, с. 189—207.

алгебра является полигоном над свободным моноидом, порождённым множеством унарных операций. Теория полигонов над моноидами активно развивается благодаря работам Л. А. Скорнякова [8], А. В. Михалёва [11], У. Кнауэра, М. Кильпа, И. Б. Кожухова [4] и других авторов.

Если f — унарная операция из сигнатуры Ω, то *унарным редуктом* алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ называется унар $\langle A, f\rangle$. Рядом авторов [9, 12] изучались свойства алгебр $\langle A, \Omega\rangle$ в терминах их унарных редуктов $\langle A, f\rangle$. Этот подход перекликается с проблемой, поставленной Л. А. Скорняковым в [13]: для данного унара $\langle A, f\rangle$ определить на множестве A операции таким образом, чтобы полученная алгебра принадлежала к заданному классу и операция f была её эндоморфизмом.

В настоящей работе изучаются свойства конгруэнций произвольных универсальных алгебр $\langle A, \Omega\rangle$ с фиксированным оператором $f \in \Omega$. Для таких алгебр построено семейство конгруэнций, определённых в терминах унарной операции f, найдены связи между строением унарного редукта алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ и свойствами этих конгруэнций, а также найдены необходимые условия конгруэнц-простоты и псевдопростоты алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ в терминах её унарных редуктов. *Псевдопростой* называется такая неодноэлементная алгебра A, что для любой её неединичной конгруэнции θ выполнено условие $A/\theta \cong A$.

Приведём определения и обозначения, необходимые для формулировки основных результатов. Через $\mathbb{N}$ обозначается множество натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Через $\operatorname{Con} A$ обозначается решётка конгруэнций алгебры A, через $\operatorname{End} A$ — полугруппа её эндоморфизмов. Через $\bigtriangledown_A$ и $\bigtriangleup_A$ обозначаются соответственно единичная и нулевая конгруэнции алгебры A. В тех случаях, когда ясно, о какой алгебре идёт речь, будем обозначать эти конгруэнции через $\bigtriangledown$ и $\bigtriangleup$. Класс конгруэнции θ, порождённый элементом x, будем обозначать через $x\theta$. Если из контекста понятно, о какой конгруэнции идёт речь, то вместо $x\theta$ будем писать просто $\bar{x}$.

Для любого элемента x унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x, при этом $f^0(x) = x$. Для любых чисел $n > 0$, $m \geqslant 0$ положим

$$C_n^m = \langle a \mid f^m(a) = f^{n+m}(a)\rangle.$$

Унар C_n^0 называется *циклом длины* n. Элемент a унара называется *циклическим*, если подунар, порождённый этим элементом, является циклом. Через C_n^∞ обозначается объединение возрастающей последовательности унаров $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \ldots$, $t_i \geqslant 0$, $t_1 < t_2 < \ldots$. Элемент a унара называется *периодическим*, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$. Через $\mathrm{T}(A)$ обозначается множество периодических элементов унара A. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geqslant 1$, называется *глубиной элемента* a и обозначается через $t(a)$. *Глубиной* $t(A)$ *унара* A считается наибольшая из глубин его периодических элементов, если $\mathrm{T}(A) \neq \varnothing$, и нуль, если $\mathrm{T}(A) = \varnothing$. Если множество $\{t(a) \mid a \in \mathrm{T}(A)\}$ не является ограниченным, глубина унара принимается равной бесконечности. Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их *суммой* и обозначается через $B + C$. Унар $\langle A, f\rangle$ называется *связным*, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n, m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется *компонентой связности* унара A.

Элемент x унара $\langle A, f\rangle$ называется *минимальным*, если не существует такого $y \in A$, что $f(y) = x$, т. е. $x \notin f(A)$. Элемент a унара называется *узловым*, если найдутся такие различные элементы b и c, отличные от a, что $f(b) = a = f(c)$. Понятие узлового элемента трактуется несколько шире, чем в [2]: среди элементов b и c могут быть циклические. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется *неподвижным*, если $f(a) = a$. Элемент x унара называется *предшествующим* элементу y, если x нециклический и $f(x) = y$.

Связный унар с неподвижным элементом называется *корнем*. Будем называть *корнем специального вида* корень, который либо не имеет узловых элементов, либо имеет единственный узловой элемент, являющийся неподвижным.

Пусть B — подунар произвольного унара $\langle A, f\rangle$. Через θ_B обозначается конгруэнция унара $\langle A, f\rangle$, определённая по следующему правилу [14]: условие $x\ \theta_B\ y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in B$.

Другие определения и обозначения, связанные с унарами, можно найти в [2].

Далее через $\langle A, \Omega\rangle$ будем обозначать произвольную универсальную алгебру, сигнатура которой содержит фиксированный оператор f, т. е. унарную операцию, перестановочную с любой операцией из сигнатуры Ω. Таким образом, f является эндоморфизмом алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.

Определение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Определим на унаре $\langle A, f\rangle$ бинарное отношение σ_n по следующему правилу: $x\ \sigma_n\ y$ для $x, y \in A$ выполнено тогда и только тогда, когда $f^n(x) = f^n(y)$. Положим также $\sigma_0 = \triangle$.

Нетрудно убедиться, что отношение σ_n является ядром отображения f^n и что при любом $n \in \mathbb{N}_0$ оно будет конгруэнцией унара $\langle A, f\rangle$.

Лемма 1. *Пусть $n > 0$. Условие $\sigma_n = \bigtriangledown$ выполняется на унаре $\langle A, f\rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle A, f\rangle$ является корнем, глубина которого не превосходит n.*

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ — корень с неподвижным элементом a и $x, y \in A$. По условию $t(x), t(y) \leqslant n$. Отсюда следует, что $f^n(x) = a = f^n(y)$ и $x\ \sigma_n\ y$.

Необходимость. Пусть $n > 0$ и $\sigma_n = \bigtriangledown$. Из условия следует, что $f^n(x) = f^n(y)$ для всех $x, y \in A$. Отсюда вытекает связность унара $\langle A, f\rangle$. Пусть $a = f^n(x)$ для некоторого $x \in A$. Тогда $f(a) = f\big(f^n(x)\big) = f^n\big(f(x)\big)$. Если $a \neq f(a)$, то $f^n(x) \neq f^n\big(f(x)\big)$, что противоречит условию. Таким образом, a — неподвижный элемент и $\langle A, f\rangle$ — корень.

Предположим теперь, что глубина $\langle A, f\rangle$ превосходит n. Тогда найдётся такой элемент $x_0 \in A$, что $t(x_0) > n$. Предполагая, что $x_0\ \sigma_n\ a$, получаем, что $f^n(x_0) = f^n(a) = a$, что противоречит выбору x_0. Таким образом, $(a, x_0) \notin \sigma_n$ и $\sigma_n \neq \bigtriangledown$, что противоречит условию. $\square$

Замечание 1. Пусть $\langle A,\Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором f. Тогда отношение σ_n является конгруэнцией алгебры $\langle A,\Omega\rangle$ при всех $n\in\mathbb{N}_0$.

Доказательство. Так как f — эндоморфизм алгебры $\langle A,\Omega\rangle$, то отображение f^n также является её эндоморфизмом. Учитывая, что $\sigma_n=\operatorname{Ker} f^n$, имеем $\sigma_n\in\operatorname{Con}\langle A,\Omega\rangle$. □

Для любых $k,m\in\mathbb{N}_0$ из $k\leqslant m$ следует, что $\sigma_k\subseteq\sigma_m$. Получаем следующее утверждение.

Замечание 2. Семейство конгруэнций $\{\sigma_n\mid n\in\mathbb{N}_0\}$ алгебры $\langle A,\Omega\rangle$ с оператором f образует возрастающую цепь в $\operatorname{Con}\langle A,\Omega\rangle$.

Определение 2. Определим на унаре $\langle A,f\rangle$ бинарное отношение σ по следующему правилу: $x\ \sigma\ y$ для $x,y\in A$ выполнено тогда и только тогда, когда $f^n(x)=f^n(y)$ для некоторого $n>0$.

Из определения вытекает, что отношение σ на A является объединением возрастающей цепи конгруэнций σ_n и, следовательно, конгруэнцией алгебры $\langle A,\Omega\rangle$.

Лемма 2. *Условие $\sigma=\bigtriangledown$ выполняется на унаре $\langle A,f\rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle A,f\rangle$ является корнем.*

Доказательство. Необходимость доказывается аналогично лемме 1.

Достаточность. Пусть $\langle A,f\rangle$ — корень с неподвижным элементом a, $x,y\in A$. По условию найдутся такие $n,m\geqslant 0$, что $f^n(x)=a$ и $f^m(y)=a$. Без ограничения общности можно считать, что $n\geqslant m$. Тогда $n=m+s$, $s\geqslant 0$. Отсюда получаем, что $f^n(y)=f^{m+s}(y)=f^s(a)=a=f^n(x)$, поэтому $x\ \sigma\ y$. □

Напомним, что конгруэнция θ алгебры A называется *вполне инвариантной* [7, с. 321], если для любых $x,y\in A$ и для любого эндоморфизма φ алгебры A из условия $x\ \theta\ y$ следует, что $\varphi(x)\ \theta\ \varphi(y)$.

Предложение 1. *Конгруэнции σ и σ_n алгебры $\langle A,\Omega\rangle$ с оператором f при любом $n\in\mathbb{N}_0$ являются вполне инвариантными.*

Доказательство. Пусть $\varphi\in\operatorname{End}\langle A,\Omega\rangle$, $x,y\in A$, $n\in\mathbb{N}_0$, $x\ \sigma_n\ y$. Тогда $f^n(x)=f^n(y)$. Отсюда получаем, что $\varphi\big(f^n(x)\big)=\varphi\big(f^n(y)\big)$ и $f^n\big(\varphi(x)\big)=$ $=f^n\big(\varphi(y)\big)$. Тогда $\varphi(x)\ \sigma_n\ \varphi(y)$. Для конгруэнции σ рассуждения аналогичны. □

Построенные выше конгруэнции позволяют получить необходимые условия конгруэнц-простоты для алгебры $\langle A,\Omega\rangle$ в терминах её унарного редукта.

Предложение 2. *Пусть $\langle A,\Omega\rangle$ — произвольная неодноэлементная алгебра с оператором f, т. е. унарная операция $f\in\Omega$ перестановочна со всеми операциями из Ω. Тогда если алгебра $\langle A,\Omega\rangle$ является конгруэнц-простой, то либо унар $\langle A,f\rangle$ является корнем глубины 1, либо операция f инъективна.*

Доказательство. По замечанию 1 $\sigma_1\in\operatorname{Con}\langle A,\Omega\rangle$. Так как по условию алгебра $\langle A,\Omega\rangle$ является простой, то либо $\sigma_1=\bigtriangleup$, либо $\sigma_1=\bigtriangledown$. В первом случае из определения 1 вытекает инъективность операции f. Во втором случае по лемме 1 унар $\langle A, f\rangle$ является корнем, глубина которого, с учётом неодноэлементности алгебры $\langle A, \Omega\rangle$, равна 1. $\square$

Поскольку любая конгруэнция алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ всегда является конгруэнцией её унарного редукта $\langle A, f\rangle$, представляют интерес условия, при которых каждая конгруэнция редукта $\langle A, f\rangle$ будет конгруэнцией алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.

Лемма 3. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен унару C_1^m, $m \in \mathbb{N}_0$. Тогда любая его конгруэнция имеет вид σ_n для некоторого $0 \leqslant n \leqslant m$.*

Доказательство. Для одноэлементного унара C_1^0 утверждение очевидно. Пусть $m > 0$. Очевидно, что каждый подунар унара C_1^m, $m \in \mathbb{N}$, однопорождён и имеет вид C_1^n для некоторого $0 \leqslant n \leqslant m$. Известно [1], что каждая конгруэнция такого унара определяется некоторым его подунаром B и имеет вид θ_B. Поэтому достаточно доказать, что для произвольного $a \in A$ из условия $t(a) = n$ следует, что $\theta_{\langle a\rangle} = \sigma_n$.

Пусть $(x, y) \in \theta_{\langle a\rangle}$ для различных $x, y \in A$. По определению конгруэнции $\theta_{\langle a\rangle}$ имеем, что $x, y \in \langle a\rangle$. Следовательно, $x = f^k(a)$, $y = f^s(a)$ для некоторых k, s, таких что $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant s \leqslant n$. Отсюда получаем, что $t(x) \leqslant n$, $t(y) \leqslant n$, откуда следует, что $f^n(x) = f^n(y)$, а значит, $x \,\sigma_n\, y$.

Пусть теперь $x \,\sigma_n\, y$. Тогда $f^n(x) = f^n(y)$. Поскольку $x \neq y$, то без нарушения общности $y = f^k(x)$ для некоторого $k > 0$, и следовательно, $f^n(x) = f^k\big(f^n(x)\big)$. Тогда $f^n(x)$ — циклический элемент. Таким образом, $t(x) \leqslant n$ и, так как $y = f^k(x)$, имеем $t(y) < n$. Учитывая условие $t(a) = n$, получаем, что $x, y \in \langle a\rangle$, откуда следует, что $(x, y) \in \theta_{\langle a\rangle}$. Таким образом, $\theta_{\langle a\rangle} = \sigma_n$. $\square$

Лемма 4. *Пусть $\langle A, f\rangle \cong C_1^\infty$. Тогда $\triangledown_A = \sigma$, а любая неединичная конгруэнция унара $\langle A, f\rangle$ имеет вид σ_n для некоторого $0 \leqslant n < \infty$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3 (нужно учесть определение 2).

Из определения 2, замечания 1 и лемм 3, 4 вытекает следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором f, т. е. унарная операция $f \in \Omega$ перестановочна со всеми операциями из Ω. Если унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен унару C_1^t, $t \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, то любая его конгруэнция является конгруэнцией алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.*

Следствие 1. *Решётка конгруэнций алгебры $\langle A, \Omega\rangle$, удовлетворяющей условиям предложения 3, является цепью длины $t + 1$.*

Изучим теперь условия псевдопростоты для алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.

Предложение 4. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором f. Если $\langle A, f\rangle \cong C_1^\infty$, то алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ является псевдопростой.*

Доказательство. По лемме 4 и предложению 3 любая неединичная конгруэнция $\langle A, \Omega\rangle$ имеет вид σ_n для некоторого $n \geqslant 0$. Поскольку отображение

$f^n\colon A \to A$ сюръективно, то f^n — эпиморфизм $\langle A, \Omega\rangle$. Тогда, учитывая, что $\operatorname{Ker} f^n = \sigma_n$, по теореме о гомоморфизме имеем $A \cong A/\sigma_n$. Таким образом, алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ псевдопроста. □

Лемма 5. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная неодноэлементная алгебра с оператором f и унар $\langle A, f\rangle$ содержит хотя бы один узловой элемент. Если алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ псевдопроста, то унар $\langle A, f\rangle$ является либо корнем бесконечной глубины, в котором неподвижный элемент будет узловым, либо корнем глубины* 1.

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ содержит узловой элемент и алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ псевдопроста. Предположим, что $\langle A, f\rangle$ не является корнем. Из условия следует, что на $\langle A, \Omega\rangle$ выполняется формула

$$\Phi_1 \equiv \exists\, a, b, c\ (f(b) = a)\ \&\ (f(c) = a)\ \&\ (b \neq c)\ \&\ (a \neq b)\ \&\ (a \neq c).$$

Из предположения, учитывая лемму 2, получаем, что конгруэнция σ алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ неединична. Допустим, что формула Φ_1 выполняется на фактор-алгебре A/σ. Тогда $f(\bar{b}) = \bar{a}$ и $f(\bar{c}) = \bar{a}$ для некоторых $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in A/\sigma$, где $\bar{b} \neq \bar{c}$. Отсюда получаем, что $f(\bar{b}) = f(\bar{c})$ и $f(\bar{b}) = f(\bar{c})$, следовательно, $f^n\bigl(f(b)\bigr) = f^n\bigl(f(c)\bigr)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f^{n+1}(b) = f^{n+1}(c)$, откуда получаем, что $b\ \sigma\ c$ и $\bar{b} = \bar{c}$, что противоречит выбору $\bar{b}$, $\bar{c}$. Таким образом, $A \ncong A/\sigma$, поэтому $\langle A, f\rangle$ — корень.

Если унар $\langle A, f\rangle$ конечен, то утверждение леммы вытекает из предложения 2 с учётом того, что любая конечная алгебра является псевдопростой тогда и только тогда, когда она является простой.

Предположим теперь, что глубина бесконечного корня $\langle A, f\rangle$ конечна и равна некоторому $n > 1$. По лемме 1 конгруэнция σ_{n-1} алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ неединична. Пусть $x \in A$ и a — неподвижный элемент унара A. Если $t(x) \leqslant n - 1$, то $f^{n-1}(x) = a = f^{n-1}(a)$, откуда получаем, что $\bar{x} = \bar{a}$ в A/σ_{n-1} и $f(\bar{x}) = \bar{a}$. Если же $t(x) = n$, то $f^n(x) = a$ и $f\bigl(f^{n-1}(x)\bigr) = a$, откуда снова получаем, что $f(\bar{x}) = \bar{a}$. Таким образом, унарный редукт алгебры A/σ_{n-1} является корнем глубины 1. Тогда на A/σ_{n-1} выполняется тождество $f(x) = f^2(x)$. Предполагая, что оно выполняется и на A, приходим к противоречию, так как по условию унар A содержит хотя бы один элемент x_0 глубины $n > 1$, а из $f(x_0) = f^2(x_0)$ следует, что $t(x_0) = 1$. Отсюда получаем, что $A \ncong A/\sigma_{n-1}$, что противоречит условию.

Пусть теперь $\langle A, f\rangle$ — корень бесконечной глубины с неподвижным элементом a, который не является узловым. По условию унар A содержит хотя бы один узловой элемент. Выберем среди всех узловых элементов унара элемент v с наименьшей глубиной. Так как неподвижный элемент не является узловым, то на алгебре A не выполняется формула

$$\Phi_2 \equiv \exists\, x, y\bigl(f(x) = f(y)\bigr)\ \&\ (x \neq y)\ \&\ (f(x) \neq x)\ \&\ (f(x) \neq y)\ \&\ \bigl(f^2(x) = f(x)\bigr).$$

Рассмотрим алгебру A/σ_k, где $k = t(v)$. Поскольку унар $\langle A, f\rangle$ бесконечен, то конгруэнция σ_k неединична. По определению узлового элемента найдутся такие элементы $b, c \in A$, не совпадающие с v, что $b \neq c$, $f(b) = f(c) = v$.

Так как $t(b) = t(c) > t(v)$, то $|\{\bar{b}, \bar{c}, \bar{v}\}| = 3$. При этом $f(\bar{v}) = \bar{v}$, поскольку $f^{t(v)}\big(f(v)\big) = f\big(f^{t(v)}(v)\big) = f(a) = a = f^{t(v)}(v)$. Тогда $f^2(\bar{b}) = f(\bar{b})$. Таким образом, формула Φ_2 выполняется на A/σ_k, следовательно, алгебры A и A/σ_k неизоморфны. □

Лемма 6. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная неодноэлементная алгебра с оператором f, и пусть унар $\langle A, f\rangle$ не содержит узловых элементов. Если алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ является псевдопростой, то либо $\langle A, f\rangle \cong C_1^{\infty}$, либо $\langle A, f\rangle \cong C_1^1$, либо операция f инъективна.*

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ не содержит узловых элементов, не изоморфен унарам C_1^{∞}, C_1^1 и операция f не инъективна.

Из последнего условия вытекает, что $f(a) = f(b)$ для некоторых различных $a, b \in A$, а поскольку унар не содержит узловых элементов, то $f(a) \in \{a, b\}$. Пусть для определённости $f(a) = a$. Таким образом, элемент a является неподвижным.

В случае когда унар $\langle A, f\rangle$ связный, он, в силу последнего утверждения, является корнем. Из условий вытекает, что $\langle A, f\rangle \cong C_1^t$, где $1 < t < \infty$. По предложению 3 любая конгруэнция такого унара является конгруэнцией алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. Учитывая, что в данном случае алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ конечна, получаем, что $A \not\cong A/\theta$ для любой неединичной конгруэнции $\theta \in \operatorname{Con} A$.

Пусть теперь $\langle A, f\rangle$ — несвязный унар. Поскольку он не содержит узловых элементов, то любая его компонента связности либо инъективна, либо имеет вид C_1^t, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. По лемме 2 конгруэнция σ на A неединична. Рассуждая как при доказательстве достаточности леммы 2, получаем, что в каждой неинъективной компоненте все элементы σ-эквивалентны между собой. В то же время каждый элемент инъективной компоненты образует одноэлементный класс. Следовательно, унарный редукт алгебры A/σ изоморфен сумме одноэлементных циклов и унаров, на которых операция f инъективна. Тогда, допуская, что $A \cong A/\sigma$, получаем противоречие с тем, что операция f не инъективна на A. □

Лемма 7. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная неодноэлементная алгебра с оператором f и унар $\langle A, f\rangle$ — корень бесконечной глубины. Если алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ является псевдопростой, то либо $\langle A, f\rangle$ не содержит минимальных элементов, либо множество глубин всех минимальных элементов $\langle A, f\rangle$ является неограниченным.*

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ — корень бесконечной глубины с неподвижным элементом a. Предположим, что он имеет хотя бы один минимальный элемент и множество глубин всех минимальных элементов $\langle A, f\rangle$ ограничено числом m. Из предположения следует, что на алгебре $\langle A, \Omega\rangle$ выполняется формула

$$\Phi_3 \equiv \exists\, y\ \forall\, x\ y \neq f(x).$$

Так как глубина $\langle A, f\rangle$ бесконечна, то по лемме 1 конгруэнция σ_m алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ неединична. Предположим, что A/σ_m содержит минимальный элемент $\bar{y}$.

Если $t(y) \leqslant m$, то $f^m(y) = a = f^m(a)$, откуда получаем, что $y \; \sigma_m \; a$ и $\bar{y} = \bar{a} = f(\bar{a})$, что противоречит минимальности $\bar{y}$. Тогда $t(y) > m$, и следовательно, элемент y не минимален, т. е. найдётся такой элемент $x_0 \in A$, что $y = f(x_0)$. Поэтому $\bar{y} = f(\bar{x_0})$, что противоречит выбору $\bar{y}$. Таким образом, Φ_3 не выполняется на A/σ_m, следовательно, $A \ncong A/\sigma_m$. □

Из лемм 5—7 вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — произвольная неодноэлементная универсальная алгебра с оператором f, т. е. унарная операция $f \in \Omega$ перестановочна со всеми операциями из Ω. Если алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ псевдопроста, то либо $\langle A, f \rangle$ является корнем глубины 1, либо операция f инъективна, либо $\langle A, f \rangle \cong C_1^\infty$, либо унар $\langle A, f \rangle$ является корнем бесконечной глубины, в котором неподвижный элемент будет узловым. В последнем случае либо унар $\langle A, f \rangle$ не содержит минимальных элементов, либо множество глубин всех минимальных элементов $\langle A, f \rangle$ является неограниченным.*

Полученные выше результаты могут найти применение при изучении алгебр с операторами, имеющих конкретные сигнатуры.

В частности, в [3] вводится понятие *унара с мальцевской операцией* как алгебры с одной тернарной операцией p, для которой выполняются тождества Мальцева $p(x, y, y) = p(y, y, x) = x$, и одной унарной операцией, перестановочной с p. Таким образом, унар с мальцевской операцией является алгеброй с оператором. На любом унаре можно задать тернарную мальцевскую операцию так, чтобы она была перестановочна с унарной операцией [3]. Конструкция [3] даёт широкий класс примеров унаров с мальцевской операцией.

Тернарная операция p определяется в [3] следующим образом. Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Положим

$$M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid f^n(x) = f^n(y)\},$$

а также

$$k(x, y) = \begin{cases} \min M_{x,y}, & \text{если} \quad M_{x,y} \neq \varnothing, \\ \infty, & \text{если} \quad M_{x,y} = \varnothing. \end{cases}$$

Положим

$$p(x, y, z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если} \quad k(x, y) \leqslant k(y, z), \\ x, & \text{если} \quad k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \tag{1}$$

Для краткости будем далее называть данный способ задания операции *стандартным* и через $\langle A, f, p \rangle$ обозначать унар со стандартной мальцевской операцией p.

Лемма 8. *Если унар $\langle A, f \rangle$ является корнем глубины 1, то алгебра $\langle A, f, p \rangle$ является конгруэнц-простой.*

Доказательство. Пусть a — неподвижный элемент унара $\langle A, f \rangle$ и $X = A \setminus \{a\}$. При $|X| = 1$ унар $\langle A, f \rangle$ двухэлементен, и утверждение очевидно.

Пусть $|X| > 1$, θ — произвольная нетривиальная конгруэнция унара $\langle A, f\rangle$, K — некоторый её неодноэлементный класс, $b, c \in K$ и $b \neq c$. В силу нетривиальности θ найдётся также такой элемент $d \in A$, что $d \notin K$.

Пусть $d = a$. Поскольку $f(a) = a = f(b)$ и $f(b) = a = f(c)$, то $k(a, b) = k(b, c) = 1$, откуда по определению (1) получаем, что $p(a, b, c) = c$. В то же время $p(a, b, b) = a$. Так как $b\ \theta\ c$, но при этом $(a, c) \notin \theta$, то отношение θ не является стабильным относительно операции p. Пусть теперь $d \neq a$. Так как $f(d) = a = f(b)$ и $f(b) = a = f(c)$, то $p(d, b, c) = c$. Учитывая, что $p(d, b, b) = d \notin K$, снова получаем, что отношение θ не является стабильным относительно операции p. □

Лемма 9. *Если операция f на неодноэлементном унаре $\langle A, f\rangle$ инъективна, то алгебра $\langle A, f, p\rangle$ является конгруэнц-простой.*

Доказательство. Пусть θ – нетривиальная конгруэнция унара $\langle A, f\rangle$, K — её неодноэлементный класс. Так как $\theta \neq \bigtriangledown$, то найдётся элемент $a \in A$, $a \notin K$. Возьмём $b, c \in K$, $b \neq c$. В силу инъективности операции f $k(a, b) = k(b, c) = \infty$, следовательно, по (1) имеем, что $p(a, b, c) = c$. Поскольку $p(a, b, b) = a$, то $\big(p(a, b, c), p(a, b, b)\big) \notin \theta$, т. е. отношение θ не является стабильным относительно операции p. □

Теорема 2. *Пусть $\langle A, f, p\rangle$ — неодноэлементный унар с мальцевской операцией p, определённой по правилу* (1). *Алгебра $\langle A, f, p\rangle$ является конгруэнц-простой тогда и только тогда, когда либо операция f инъективна, либо унар $\langle A, f\rangle$ является корнем глубины* 1.

Доказательство. Необходимость вытекает из предложения 2, поскольку $\langle A, f, p\rangle$ является алгеброй с оператором. Достаточность следует из лемм 8 и 9. □

Дадим теперь описание псевдопростых унаров $\langle A, f, p\rangle$ с мальцевской операцией p, определённой по правилу (1).

Лемма 10. *Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный корень, $x, y \in A$. Если $t(x) \neq t(y)$, то $k(x, y) = \max\{t(x), t(y)\}$, в противном случае $k(x, y) \leqslant t(x)$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in A$ и $t(x) \neq t(y)$. Обозначим $n = t(x)$, $m = t(y)$ и без потери общности предположим, что $n > m$. Тогда $f^n(x) = a = f^n(y)$, откуда получаем, что $k(x, y) \leqslant n$. Предположим, что $k(x, y) = s < n$. Тогда $f^s(x) = f^s(y)$. Если $s \geqslant m$, то $s = m + t$ для некоторого $t \geqslant 0$. Следовательно, $f^s(x) = f^s(y) = f^{t+m}(y) = f^t(a) = a$, что противоречит условию $t(x) = n$. Если же $s < m$, то из условия $f^s(x) = f^s(y)$ вытекает, что $f^m(x) = f^m(y) = a$, что противоречит условию $n > m$. Пусть теперь $t(x) = t(y) = n$. Тогда $f^n(x) = a = f^n(y)$, откуда получаем, что $k(x, y) \leqslant n$. □

Следствие 2. *Пусть $\langle A, f\rangle$ — корень специального вида, $x, y \in A$, $x \neq y$. Тогда $k(x, y) = \max\{t(x), t(y)\}$.*

Следствие 3. *Пусть $\langle A, f\rangle$ — корень специального вида, $x, y \in A$, $x \neq y$, $n > 0$. Условие $x\sigma_n y$ выполняется тогда и только тогда, когда $t(x) \leqslant n$, $t(y) \leqslant n$.*

Лемма 11. *Пусть $\langle A, f\rangle$ — корень специального вида, $\theta \in \mathrm{Con}\langle A, f, p\rangle$, $(b, c) \in \in \theta$, $b \neq c$ и $t(b) \leqslant t(c)$. Тогда для любых $x, y \in A$ из $t(x) \leqslant t(c)$ и $t(y) \leqslant t(c)$ следует, что $x\ \theta\ y$.*

Доказательство. Из условия $t(b) \leqslant t(c)$ по следствию 2 получаем, что $k(b, c) = t(c)$. Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$ и $t(x), t(y) \leqslant t(c)$. По следствию 2 имеем $k(x, b) = \max\{t(b), t(x)\}$. Отсюда по условию получаем, что $k(x, b) \leqslant t(c) = = k(b, c)$. Из (1) тогда следует, что $p(x, b, c) = c$. В то же время $p(x, c, c) = x$, поэтому $x\ \theta\ c$. Аналогично $y\ \theta\ c$, и окончательно $x\ \theta\ y$. □

Лемма 12. *Если $\langle A, f\rangle$ — корень специального вида, то любая неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, f, p\rangle$ имеет вид σ_n для некоторого $n \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть θ — неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, f, p\rangle$. Очевидно, $\triangle = \sigma_0$. Пусть $\theta \neq \triangle$. Допустим, что глубины всех элементов унара, входящих в нетривиальные пары конгруэнции θ, ограничены глубиной некоторого элемента c. Тогда $(b, c) \in \theta$ для некоторого $b \in A$, где $t(b) \leqslant t(c)$ и $b \neq c$. Поскольку для любых различных $x, y \in A$, таких что $(x, y) \in \theta$, выполняются условия $t(x) \leqslant t(c)$ и $t(y) \leqslant t(c)$, по следствию 3 имеем, что $(x, y) \in \sigma_{t(c)}$. Следовательно, $\theta \leqslant \sigma_{t(c)}$.

Допустим, что $x \neq y$ и $(x, y) \in \sigma_{t(c)}$. Тогда по следствию 3 имеем $t(x) \leqslant t(c)$, $t(y) \leqslant t(c)$. По лемме 11 имеем $(x, y) \in \theta$. Таким образом, $\sigma_{t(c)} \leqslant \theta$ и $\theta = \sigma_{t(c)}$.

Предположим теперь, что глубины элементов, принадлежащих нетривиальным парам конгруэнции θ, не являются ограниченными в совокупности. Так как $\theta \neq \triangledown$, то $(x, y) \notin \theta$ для некоторых $x, y \in A$. По предположению найдётся такой элемент c, входящий в некоторую пару $(b, c) \in \theta$, что $t(x) < t(c)$, $t(y) < t(c)$. В силу симметричности θ можно считать, что $t(b) \leqslant t(c)$. Тогда по лемме 11 имеем $x\ \theta\ y$, что противоречит выбору x, y. □

Лемма 13. *Пусть $\langle A, f, p\rangle$ — неодноэлементный унар с мальцевской операцией p, определённой по правилу* (1). *Если унар $\langle A, f\rangle$ является корнем специального вида, не содержащим минимальных элементов, то алгебра $\langle A, f, p\rangle$ будет псевдопростой.*

Доказательство. Поскольку $\langle A, f\rangle$ — корень специального вида, то по лемме 12 любая неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, f, p\rangle$ имеет вид σ_n для некоторого n. Таким образом, достаточно доказать, что $A \cong A/\sigma_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\sigma_n = \mathrm{Ker}\, f^n$. Поскольку отображение f^n является эндоморфизмом алгебры $\langle A, f, p\rangle$ и, кроме того, в силу отсутствия минимальных элементов в $\langle A, f\rangle$ оно сюръективно, то по теореме о гомоморфизме $A \cong A/\sigma_n$. □

Лемма 14. *Пусть $\langle A, f, p\rangle$ — неодноэлементный унар с мальцевской операцией p, определённой по правилу* (1), *и пусть унар $\langle A, f\rangle$ не содержит узловых элементов. Алгебра $\langle A, f, p\rangle$ является псевдопростой тогда и только тогда, когда либо $\langle A, f\rangle \cong C_1^\infty$, либо $\langle A, f\rangle \cong C_1^1$, либо операция f инъективна.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 6.

Докажем достаточность. Если унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен унару C_1^1 или операция f инъективна, то по теореме 2 алгебра $\langle A, f, p\rangle$ является простой, а следовательно, и псевдопростой. Если же $\langle A, f\rangle \cong C_1^\infty$, то $\langle A, f, p\rangle$ псевдопроста по предложению 4. □

Определение 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Определим на корне $\langle A, f\rangle$ бинарное отношение β_n по следующему правилу: $x\ \beta_n\ y$ для $x, y \in A$ выполнено тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $t(x) \leqslant n$, $t(y) \leqslant n$.

Лемма 15. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ — корень. Отношение β_n при любом $n > 0$ является конгруэнцией алгебры $\langle A, f, p\rangle$ с мальцевской операцией p, определённой по правилу* (1).

Доказательство. Пусть $n > 0$. Очевидно, что β_n — эквивалентность. Из того, что на корне для любого $x \in A$, кроме $x = a$, выполняется $t\big(f(x)\big) = t(x) - 1$, получаем, что $\beta_n \in \mathrm{Con}\langle A, f\rangle$.

Пусть $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in A$ и $x_1\ \beta_n\ y_1$, $x_2\ \beta_n\ y_2$, $x_3\ \beta_n\ y_3$. В случаях, когда $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ или $t(x_i) \leqslant n$, $t(y_i) \leqslant n$, $i = 1, 2, 3$, стабильность β_n относительно операции p вытекает из определения 3.

Рассмотрим случай, когда $t(x_i) \leqslant n$, $t(y_i) \leqslant n$, $i = 2, 3$, и $t(x_1) > n$ или $t(y_1) > n$. Тогда из определения 3 следует, что $x_1 = y_1$. По лемме 10 имеем $k(x_1, x_2) = \max\{t(x_1), t(x_2)\} = t(x_1) > n$ и $k(x_2, x_3) \leqslant n$. Учитывая (1), получаем, что $p(x_1, x_2, x_3) = x_1$. Аналогично получаем, что $p(y_1, y_2, y_3) = y_1$, следовательно, $p(x_1, x_2, x_3)\ \beta_n\ p(y_1, y_2, y_3)$.

Случай, когда $t(x_i) \leqslant n$, $t(y_i) \leqslant n$, $i = 1, 2$, и $t(x_3) > n$ или $t(y_3) > n$ аналогичен предыдущему.

Рассмотрим случай, когда $t(x_i) \leqslant n$, $t(y_i) \leqslant n$, $i = 1, 3$, и $t(x_2) > n$ или $t(y_2) > n$. Тогда из определения 3 следует, что $x_2 = y_2$. По лемме 10 получаем, что $k(x_1, x_2) = \max\{t(x_1), t(x_2)\} = t(x_2) = \max\{t(x_2), t(x_3)\} = k(x_2, x_3)$. Следовательно, $p(x_1, x_2, x_3) = x_3$. Аналогично $p(y_1, y_2, y_3) = y_3$, поэтому $p(x_1, x_2, x_3)\ \beta_n\ p(y_1, y_2, y_3)$.

Пусть теперь $t(x_3) \leqslant n$, $t(y_3) \leqslant n$ и $t(x_1) > n$ или $t(y_1) > n$, $t(x_2) > n$ или $t(y_2) > n$. Тогда по определению 3 имеем, что $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Предположим, что $t(x_1) > t(x_2)$. По лемме 10 $k(x_1, x_2) = t(x_1)$ и $k(x_2, x_3) = t(x_2)$. Тогда $p(x_1, x_2, x_3) = x_1$. Аналогично $p(y_1, y_2, y_3) = y_1$. Следовательно, $p(x_1, x_2, x_3)\ \beta_n\ p(y_1, y_2, y_3)$. Если $t(x_1) < t(x_2)$, то рассуждения аналогичны.

Пусть теперь $t(x_1) = t(x_2)$. По лемме 10 $k(x_1, x_2) \leqslant t(x_1) = t(x_2) = k(x_2, x_3)$. Следовательно, $p(x_1, x_2, x_3) = x_3$. Аналогично $p(y_1, y_2, y_3) = y_3$, что вновь приводит к $p(x_1, x_2, x_3)\ \beta_n\ p(y_1, y_2, y_3)$.

Случай, когда $t(x_1) \leqslant n$, $t(y_1) \leqslant n$ и $t(x_2) > n$ или $t(y_2) > n$, $t(x_3) > n$ или $t(y_3) > n$ аналогичен предыдущему.

Рассмотрим последний случай, когда $t(x_2) \leqslant n$, $t(y_2) \leqslant n$ и $t(x_1) > n$ или $t(y_1) > n$, $t(x_3) > n$ или $t(y_3) > n$. Из определения 3 имеем, что $x_1 = y_1$, $x_3 = y_3$. По лемме 10 $k(x_1, x_2) = t(x_1) = t(y_1) = k(y_1, y_2)$ и $k(x_2, x_3) = t(x_3) = t(y_3) = k(y_2, y_3)$. Если $t(x_1) \leqslant t(x_3)$, то и $t(y_1) \leqslant t(y_3)$. Следовательно,

$p(x_1,x_2,x_3) = x_3 \ \beta_n \ y_3 = p(y_1,y_2,y_3)$. Если же $t(x_1) > t(x_3)$, то $p(x_1,x_2,x_3) = x_1 \ \beta_n \ y_1 = p(y_1,y_2,y_3)$. □

Лемма 16. *Пусть $\langle A, f\rangle$ — корень, $n > 0$, $x \in A$. Тогда для любого элемента $\bar{x}$ алгебры $\langle A/\beta_n, f, p\rangle$ с мальцевской операцией p, определённой по правилу* (1), *из того, что $t(x) \geqslant n$, следует, что $t(\bar{x}) = t(x) - n$.*

Доказательство. Пусть $\langle A, f\rangle$ — корень с неподвижным элементом a, $x \in A$, $t(x) = m > 0$, $n \leqslant m$. Из предпоследнего условия имеем $f^m(x) = a$, поэтому $f^n(f^{m-n}(x)) = a$ и $t(f^{m-n}(x)) \leqslant n$. Тогда, учитывая, что $t(a) = 0 \leqslant n$, получаем, что $(f^{m-n}(x), a) \in \beta_n$, следовательно, $f^{m-n}(\bar{x}) = \bar{a}$.

Предположим, что найдётся такое число $k < m-n$, где $m-n = k+s$, $s > 0$, что $f^k(\bar{x}) = \bar{a}$. Тогда $(f^k(x), a) \in \beta_n$, откуда получаем, что либо $t(f^k(x)) \leqslant n$, $t(a) \leqslant n$, либо $f^k(x) = a$. Последнее противоречит выбору числа m, так как $k < m-n \leqslant m$. Из условия $t\big(f^k(x)\big) \leqslant n$ следует, что $f^n\big(f^k(x)\big) = f^{n+k}(x) = a$. Поэтому $f^{m-s}(x) = a$, что снова противоречит выбору числа m. Таким образом, $t(\bar{x}) = m - n$. □

Определение 4. Пусть $m > 0$. Определим на корне $\langle A, f\rangle$ бинарное отношение θ_m по следующему правилу: $x \ \theta_m \ y$ для $x, y \in A$ выполнено тогда и только тогда, когда либо $f(x) = f(y)$ и $t\big(f(x)\big) = m$, либо $x = y$.

Лемма 17. *Пусть $\langle A, f\rangle$ — корень. Отношение θ_m при любом $m > 0$ является конгруэнцией алгебры $\langle A, f, p\rangle$ с мальцевской операцией p, определённой по правилу* (1).

Доказательство. Пусть $m > 0$. Очевидно, что $\theta_m \in \mathrm{Con}\langle A, f\rangle$. Пусть $x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2 \in A$ и $x_1 \ \theta_m \ x_2$, $y_1 \ \theta_m \ y_2$, $z_1 \ \theta_m \ z_2$. Заметим, что $k(x, y) < \infty$ для всех $x, y \in A$, поскольку унар $\langle A, f\rangle$ является корнем.

Случай 1. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

Очевидно, что $p(x_1, y_1, z_1) \ \theta_m \ p(x_2, y_2, z_2)$.

Случай 2. $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$.

По определению 4 $f(x_1) = f(x_2)$, $t\big(f(x_1)\big) = m$, $f(y_1) = f(y_2)$, $t\big(f(y_1)\big) = m$, $f(z_1) = f(z_2)$, $t\big(f(z_1)\big) = m$. Предположим, что $k(x_1, y_1) \geqslant 1$ и $k(x_2, y_2) \geqslant 1$. Пусть $k(x_1, y_1) = s$. Тогда $f^s(x_1) = f^s(y_1)$. Поэтому $f^{s-1}\big(f(x_1)\big) = f^{s-1}\big(f(y_1)\big)$, откуда следует, что $f^{s-1}\big(f(x_2)\big) = f^{s-1}\big(f(y_2)\big)$ и $f^s(x_2) = f^s(y_2)$. Из последнего равенства вытекает, что $k(x_2, y_2) \leqslant s = k(x_1, y_1)$. Аналогично $k(x_1, y_1) \leqslant k(x_2, y_2)$. Следовательно, $k(x_1, y_1) = k(x_2, y_2)$.

Если $k(y_1, z_1) \geqslant 1$ и $k(y_2, z_2) \geqslant 1$, аналогичными рассуждениями получаем, что $k(y_1, z_1) = k(y_2, z_2)$. Тогда из определения (1) и условий $x_1 \ \theta_m \ x_2$, $z_1 \ \theta_m \ z_2$ имеем $p(x_1, y_1, z_1) \ \theta_m \ p(x_2, y_2, z_2)$.

Пусть $k(y_1, z_1) = 0$, т. е. $y_1 = z_1$. Тогда $p(x_1, y_1, z_1) = x_1$. Если $y_2 = z_2$, имеем $p(x_2, y_2, z_2) = x_2 \ \theta_m \ x_1 = p(x_1, y_1, z_1)$. Если же $y_2 \neq z_2$, то из того, что $f(y_2) = f(y_1) = f(z_1) = f(z_2)$, следует, что $k(y_2, z_2) = 1$. Если в этом случае $k(x_2, y_2) = 1$, то из определения (1) получаем, что $p(x_2, y_2, z_2) = z_2$. При этом $f(x_2) = f(y_2) = f(z_2)$, и по условию $t\big(f(x_2)\big) = m$. Тогда $x_2 \ \theta_m \ z_2$, откуда получаем, что $p(x_1,y_1,z_1)\ \theta_m\ p(x_2,y_2,z_2)$. Если же $k(x_2,y_2)>1$, то из определения (1) получаем, что $p(x_2,y_2,z_2)=x_2\ \theta_m\ x_1=p(x_1,y_1,z_1)$. Рассуждения для случая, когда $k(y_2,z_2)=0$, аналогичны случаю $k(y_1,z_1)=0$.

Пусть теперь $k(x_1,y_1)=0$, т. е. $x_1=y_1$. Имеем $p(x_1,y_1,z_1)=z_1$. При $k(x_2,y_2)=0$ получаем, что $p(x_2,y_2,z_2)=z_2\ \theta_m\ z_1=p(x_1,y_1,z_1)$. Пусть $k(x_2,y_2)\geqslant 1$. Учитывая условия, имеем, что $f(x_2)=f(x_1)=f(y_1)=f(y_2)$, следовательно, $k(x_2,y_2)=1$. Пусть $k(y_1,z_1)=0$. Тогда $z_1=y_1=x_1$. Если $y_2=z_2$, то $p(x_2,y_2,z_2)=x_2\ \theta_m\ x_1=z_1=p(x_1,y_1,z_1)$. Если же $y_2\neq z_2$, то из того, что $f(y_2)=f(y_1)=f(z_1)=f(z_2)$, получаем $k(y_2,z_2)=1$, следовательно, $p(x_2,y_2,z_2)=z_2\ \theta_m\ z_1=p(x_1,y_1,z_1)$. Пусть теперь $k(y_1,z_1)\geqslant 1$. Если $k(y_2,z_2)\geqslant 1$, то из последнего условия следует, что $k(y_2,z_2)=k(y_1,z_1)\geqslant 1$. Поскольку $k(x_2,y_2)=1$, то из определения (1) получаем, что $p(x_2,y_2,z_2)=$ $=z_2\ \theta_m\ z_1=p(x_1,y_1,z_1)$. Если же $k(y_2,z_2)=0$, т. е. $y_2=z_2$, то $p(x_2,y_2,z_2)=$ $=x_2$. При этом из $k(x_2,y_2)=1$ вытекает равенство $f(x_2)=f(y_2)=f(z_2)$. Поскольку по условию $t\big(f(x_2)\big)=m$, имеем $x_2\ \theta_m\ z_2$, откуда получаем, что $p(x_1,y_1,z_1)\ \theta_m\ p(x_2,y_2,z_2)$. В случае $k(x_2,y_2)=0$ рассуждения аналогичны.

Случай 3. $x_1=x_2$, $y_1\neq y_2$, $z_1\neq z_2$.

По определению 4 $f(y_1)=f(y_2)$, $t(f(y_1))=m$, $f(z_1)=f(z_2)$, $t(f(z_1))=m$. В случае, когда $k(x_1,y_1)\geqslant 1$ и $k(x_2,y_2)\geqslant 1$, аналогично случаю 2 имеем $k(x_1,y_1)=k(x_2,y_2)$. Если при этом $k(y_1,z_1)\geqslant 1$ и $k(y_2,z_2)\geqslant 1$, то, как в случае 2, получаем, что $p(x_1,y_1,z_1)\ \theta_m\ p(x_2,y_2,z_2)$.

Пусть $k(y_1,z_1)=0$, т. е. $y_1=z_1$. Тогда $p(x_1,y_1,z_1)=x_1$. Если $y_2=z_2$, имеем $p(x_2,y_2,z_2)=x_2\ \theta_m\ x_1=p(x_1,y_1,z_1)$. Если же $y_2\neq z_2$, то с учётом равенства $y_1=z_1$ из $f(y_2)=f(y_1)=f(z_1)=f(z_2)$ выводим, что $k(y_2,z_2)=1$. Если в этом случае $k(x_2,y_2)=1$, то из определения (1) получаем, что $p(x_2,y_2,z_2)=z_2$. По доказанному выше $k(x_1,y_1)=k(x_2,y_2)=1$, поэтому $f(x_1)=f(y_1)$. Также из $y_1=z_1$ имеем $f(y_2)=f(y_1)=f(z_1)=$ $=f(z_2)$. Таким образом, $f(x_1)=f(z_2)$. Поскольку по условию $f(z_1)=f(z_2)$ и $t\big(f(z_1)\big)=m$, то $t\big(f(x_1)\big)=m$. Отсюда по определению 4 получаем, что $x_1\ \theta_m\ z_2$, следовательно, $p(x_1,y_1,z_1)\ \theta_m\ p(x_2,y_2,z_2)$. Если же $k(x_2,y_2)>1$, то по определению (1) имеем $p(x_2,y_2,z_2)=x_2\ \theta_m\ x_1=p(x_1,y_1,z_1)$. Для случая $k(y_2,z_2)=0$ рассуждения аналогичны случаю $k(y_1,z_1)=0$.

Пусть теперь $k(x_1,y_1)=0$, т. е. $x_1=y_1$. Тогда $p(x_1,y_1,z_1)=z_1$. Так как $y_1\neq y_2$ и $x_1=x_2$, то $y_2\neq x_2$, следовательно, $k(x_2,y_2)\geqslant 1$. Учитывая условия и равенство $x_1=y_1$, получаем, что $f(x_2)=f(y_2)$, поэтому $k(x_2,y_2)=1$. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю 2.

Случай 4. $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1\neq z_2$.

По определению 4 имеем, что $f(z_1)=f(z_2)$, $t\big(f(z_1)\big)=m$. Если $k(x_1,y_1)\geqslant 1$ и $k(x_2,y_2)\geqslant 1$, то аналогично случаю 2 имеем $k(x_1,y_1)=k(x_2,y_2)$. Если при этом $k(y_1,z_1)\geqslant 1$ и $k(y_2,z_2)\geqslant 1$, то, как в случае 2, получаем $p(x_1,y_1,z_1)\ \theta_m\ p(x_2,y_2,z_2)$.

Пусть $k(y_1,z_1)=0$, т. е. $y_1=z_1$. Тогда $p(x_1,y_1,z_1)=x_1$. Из $y_1=y_2$ и $z_1\neq z_2$ следует, что $y_2\neq z_2$. Тогда из $f(y_2)=f(y_1)=f(z_1)=f(z_2)$ вытекает

$k(y_2, z_2) = 1$. Если в этом случае $k(x_2, y_2) = 1$, то из определения (1) получаем, что $p(x_2, y_2, z_2) = z_2$. Учитывая условия и равенства $f(x_2) = f(y_2)$, $y_1 = z_1$, получаем, что $f(x_1) = f(z_2)$, а поскольку $t\big(f(x_1)\big) = t\big(f(z_2)\big) = t\big(f(z_1)\big) = m$, то $x_1 \ \theta_m \ z_2$, следовательно, $p(x_1, y_1, z_1) \ \theta_m \ p(x_2, y_2, z_2)$. Если же $k(x_2, y_2) > 1$, то из определения (1) получаем, что $p(x_2, y_2, z_2) = x_2 \ \theta_m \ x_1 = p(x_1, y_1, z_1)$. Для случая $k(y_2, z_2) = 0$ рассуждения аналогичны случаю $k(y_1, z_1) = 0$.

Пусть теперь $k(x_1, y_1) = 0$. Учитывая условия, имеем $x_2 = x_1 = y_1 = y_2$, следовательно, $p(x_2, y_2, z_2) = z_2 \ \theta_m \ z_1 = p(x_1, y_1, z_1)$. Для случая $k(x_2, y_2) = 0$ рассуждения аналогичны.

В остальных случаях рассуждения аналогичны одному из случаев, рассмотренных выше. □

Лемма 18. *Пусть $\langle A, f\rangle$ — корень. Для любого $x \in A$ и любого $m > 0$ справедливо равенство $t(x) = t(x\theta_m)$.*

Доказательство. Пусть $m > 0$, $x \in A$ и $t(x) = s$. Поскольку $f^s(x\theta_m) = f^s(x)\theta_m = a\theta_m$, то $t(x\theta_m) \leqslant s$. Предположим, что $f^k(x\theta_m) = a\theta_m$ для некоторого $k < s$. Тогда $f^k(x) \ \theta_m \ a$, и по определению 4 либо $f^k(x) = a$, либо $f^{k+1}(x) = f(a)$ и $t\big(f^{k+1}(x)\big) = m$. В первом случае получаем противоречие с выбором s. Во втором случае $f^{k+1}(x) = f(a) = a$, поэтому $s = t(x) \leqslant k+1$. При $k+1 < s$ получаем противоречие, так как тогда $f^{k+1}(x) \neq a$. При $k+1 = s$ имеем $m = t\big(f^{k+1}(x)\big) = t\big(f^s(x)\big) = t(a) = 0$, что противоречит выбору m. □

Лемма 19. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ — корень, содержащий хотя бы один узловой элемент. Если алгебра $\langle A, f, p\rangle$ с мальцевской операцией p, определённой по правилу* (1)*, псевдопроста, то унар $\langle A, f\rangle$ не содержит других узловых элементов, кроме неподвижного.*

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ содержит узловой элемент глубины $m > 0$. Тогда на алгебре A выполняется формула

$$\Phi_4 \equiv \exists\, x, y \ \big(f(x) = f(y)\big) \ \& \ (x \neq y) \ \& \ (f(x) \neq x) \ \& \ (f(x) \neq y) \ \& \\ \& \ \Big(f\Big(f^m\big(f(x)\big)\Big) = f^m\big(f(x)\big)\Big) \ \& \ \Big(\forall\, k < m \ f\Big(f^k\big(f(x)\big)\Big) \neq f^k\big(f(x)\big)\Big).$$

Предположим, что найдётся узловой элемент $\bar{v} \in A/\theta_m$, имеющий глубину m. Тогда найдутся такие элементы $\bar{x}, \bar{y} \in A/\theta_m$, не совпадающие с $\bar{v}$, что $\bar{x} \neq \bar{y}$ и $f(\bar{x}) = \bar{v} = f(\bar{y})$.

По лемме 18 $t(v) = t(\bar{v}) = m$, следовательно, $t\big(\overline{f(x)}\big) = m$, поэтому $t\big(f(x)\big) = m$. Из равенства $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$ следует, что $f(x) \ \theta_m \ f(y)$, откуда по определению 4 получаем, что либо $f(x) = f(y)$, либо $f^2(x) = f^2(y)$ и $t\big(f^2(x)\big) = m$. Последнее противоречит условию $t\big(f(x)\big) = m$, следовательно, $f(x) = f(y)$. Учитывая, что $t\big(f(x)\big) = m$, отсюда получаем, что $x \ \theta_m \ y$, поэтому $\bar{x} = \bar{y}$, что противоречит предположению.

Таким образом, алгебра A/θ_m не содержит узловых элементов глубины m, т. е. формула Φ_4 на ней не выполняется, поэтому $A/\theta_m \ncong A$. □

Лемма 20. *Пусть $\langle A, f, p\rangle$ — неодноэлементный унар с мальцевской операцией p, определённой по правилу* (1), *а унар $\langle A, f\rangle$ — корень бесконечной глубины, содержащий хотя бы один минимальный элемент. Если алгебра $\langle A, f, p\rangle$ является псевдопростой, то для любого наперёд заданного числа $m > 0$ в унаре $\langle A, f\rangle$ существуют минимальные элементы глубины m.*

Доказательство. Пусть $m > 0$, унар $\langle A, f\rangle$ — корень бесконечной глубины с неподвижным элементом a. Предположим, что $\langle A, f\rangle$ не имеет минимальных элементов глубины m. Тогда на алгебре $\langle A, f, p\rangle$ не выполняется формула

$$\Phi_5 \equiv \exists\, y\ \forall\, x\ \big(y \neq f(x)\big)\ \&\ \big(f\big(f^m(y)\big) = f^m(y)\big)\ \&\ \big(\forall\, k < m\ f\big(f^k(y)\big) \neq f^k(y)\big).$$

По лемме 7 множество глубин всех минимальных элементов унара $\langle A, f\rangle$ является неограниченным. Тогда найдётся минимальный элемент $b \in A$ глубины $t > m$. Рассмотрим элемент $\bar{b} \in A/\beta_{t-m}$ и докажем, что он является минимальным элементом глубины m.

Из условия $t(b) = t$ следует, что $f^t(b) = a$ и $f^{t-m}\big(f^m(b)\big) = a$, поэтому $t\big(f^m(b)\big) \leqslant t - m$. Учитывая, что $t(a) = 0 \leqslant t - m$, по определению 3 получаем, что $(f^m(b), a) \in \beta_{t-m}$, откуда вытекает, что $f^m(\bar{b}) = \bar{a}$. Предположим теперь, что найдётся такое число $k < m$, где $m = k + s$, $s > 0$, что $f^k(\bar{b}) = \bar{a}$. Тогда $(f^k(b), a) \in \beta_{t-m}$, откуда получаем, что либо $t(f^k(b)) \leqslant t-m$, $t(a) \leqslant t-m$, либо $f^k(b) = a$. Последнее противоречит выбору числа t, так как $k < m < t$. Из соотношения $t\big(f^k(b)\big) \leqslant t - m$ следует, что $f^{t-m}\big(f^k(b)\big) = a$. Тогда $f^{t-k-s+k}(b) = a$ и $f^{t-s}(b) = a$, что снова противоречит выбору числа t. Таким образом, $t(\bar{b}) = m$.

Предположим, что найдётся такой элемент $\bar{c} \in A/\beta_{t-m}$, что $f(\bar{c}) = \bar{b}$. Тогда $(f(c), b) \in \beta_{t-m}$, откуда следует, что либо $t\big(f(c)\big) \leqslant t - m$, $t(b) \leqslant t - m$, либо $f(c) = b$. В первом случае неравенство $t(b) \leqslant t - m$ приводит к противоречию с условием $t(b) = t$. Второй случай противоречит минимальности элемента b.

Таким образом, элемент $\bar{b}$ минимален, следовательно, на алгебре $\langle A, f, p\rangle$ выполняется формула Φ_5, поэтому $A \ncong A/\beta_{t-m}$. □

Лемма 21. *Пусть $\langle A, f\rangle$ — корень специального вида. Тогда для любого $n > 0$ унар $\langle A/\beta_n, f\rangle$ также является корнем специального вида.*

Доказательство. Пусть $\langle A, f\rangle$ — корень специального вида с неподвижным элементом a, $n > 0$. Предположим, что найдутся такие элементы $\bar{x}, \bar{y} \in A/\beta_n$, что $\bar{x} \neq \bar{y}$, $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$, $f(\bar{x}) \neq \bar{a}$. Из условия $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$ следует, что $f(x)\ \beta_n\ f(y)$, откуда получаем, что либо $f(x) = f(y)$, либо $t\big(f(x)\big) \leqslant n$ и $t\big(f(y)\big) \leqslant n$. В последнем случае имеем $f(\bar{x}) = \bar{a} = f(\bar{y})$, что противоречит предположению. Пусть $t\big(f(x)\big) > n$. Тогда из условия $f(x)\ \beta_n\ f(y)$ имеем, что $f(x) = f(y)$, откуда получаем, что $f(x) \neq a$. Из $\bar{x} \neq \bar{y}$ следует, что $x \neq y$. Таким образом, $f(x)$ — узловой элемент, не совпадающий с неподвижным, что противоречит условию леммы. □

Лемма 22. *Пусть $\langle A, f, p\rangle$ — неодноэлементный унар с мальцевской операцией p, определённой по правилу* (1), *и пусть унар $\langle A, f\rangle$ содержит хотя бы один узловой элемент. Алгебра $\langle A, f, p\rangle$ является псевдопростой тогда и только тогда,* *когда унар $\langle A, f\rangle$ является либо корнем глубины 1, либо корнем специального вида, имеющим для всех $m > 0$ равномощные друг другу* (*возможно, пустые*) *множества минимальных элементов глубины m.*

Доказательство. Необходимость. Пусть алгебра $\langle A, f, p\rangle$ псевдопроста. Так как она удовлетворяет условиям леммы 5, то унар $\langle A, f\rangle$ является либо корнем бесконечной глубины, в котором неподвижный элемент будет узловым, либо корнем глубины 1. Во втором случае унар удовлетворяет заключению доказываемой леммы.

Рассмотрим первый случай. Из леммы 19 следует, что унар $\langle A, f\rangle$ является корнем специального вида. Так как алгебра $\langle A, f, p\rangle$ удовлетворяет условиям леммы 7, то либо $\langle A, f\rangle$ не содержит минимальных элементов, либо множество глубин всех минимальных элементов $\langle A, f\rangle$ является неограниченным. В первом из этих случаев унар $\langle A, f\rangle$ снова удовлетворяет заключению леммы.

Пусть число элементов унара, предшествующих неподвижному элементу, конечно. Тогда $\langle A, f\rangle$ не содержит минимальных элементов, так как в противном случае получаем противоречие с неограниченностью множества глубин всех минимальных элементов.

Пусть теперь число элементов унара, предшествующих неподвижному элементу, бесконечно. Пусть также $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$. Поскольку глубина унара $\langle A, f\rangle$ бесконечна, то конгруэнция β_{n-m} алгебры $\langle A, f, p\rangle$ неединична, следовательно, $A \cong A/\beta_{n-m}$. Отсюда, учитывая лемму 16, получаем, что мощности множеств минимальных элементов глубины n и глубины m совпадают.

Достаточность. Если унар $\langle A, f\rangle$ является корнем глубины 1, то по теореме 2 алгебра $\langle A, f, p\rangle$ является простой, а следовательно, и псевдопростой. Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ является корнем специального вида, имеющим бесконечную глубину, и a — его неподвижный элемент. Если унар не содержит минимальных элементов, то утверждение следует из леммы 13.

Допустим, что $\langle A, f\rangle$ содержит минимальные элементы. Поскольку $\langle A, f\rangle$ — корень специального вида, то по лемме 12 любая неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, f, p\rangle$ имеет вид σ_n для некоторого n. Таким образом, достаточно доказать, что $A \cong A/\sigma_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку отображение f^n является эндоморфизмом алгебры $\langle A, f, p\rangle$, а $\sigma_n = \operatorname{Ker} f^n$, то по теореме о гомоморфизме $\operatorname{Im} f^n \cong A/\sigma_n$.

Докажем, что алгебра $\langle A, f, p\rangle$ изоморфна $\operatorname{Im} f^n$.

Зафиксируем число $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что для всех $x \in A$ из $t(x) \leqslant n$ следует $f^n(x) = a$. Заметим также, что на множестве всех $x \in A$, для которых верно $t(x) > n$, отображение f^n является инъективным. Действительно, пусть $x, y \in A$, $t(x), t(y) > n$ и $f^n(x) = f^n(y)$. Из предположения о том, что $x \neq y$, вытекает существование узлового элемента, равного $f^k(x)$ для некоторого $k \leqslant n$, а поскольку $\langle A, f\rangle$ — корень специального вида, то $f^k(x) = a$, что противоречит выбору x.

Пусть b — минимальный элемент унара $\langle A, f\rangle$ и $t(b) = m$ для некоторого $m > 0$. Докажем, что если $m > n$, то $f^n(b)$ является минимальным элементом в $\operatorname{Im} f^n$. Предположим, что он не минимален. Тогда найдётся такой $x_0 \in \operatorname{Im} f^n$, что $f^n(b) = f(x_0)$. Также из того, что $x_0 \in \operatorname{Im} f^n$, вытекает существование такого $z_0 \in A$, что $x_0 = f^n(z_0)$. Тогда $f^n(b) = f^{n+1}(z_0)$. Из условия $m > n$ следует, что $f^n(b)$ не является циклическим элементом. Так как в $A \setminus \{a\}$ отсутствуют узловые элементы, отсюда получаем, что $b = f(z_0)$, что противоречит выбору элемента b. Таким образом, $f^n(b)$ — минимальный элемент $\operatorname{Im} f^n$, причём $t\bigl(f^n(b)\bigr) = m - n$. По условию унар $\langle A, f\rangle$ имеет для всех $m > 0$ равномощные друг другу множества минимальных элементов глубины m. Тогда по доказанному выше получаем, что и унарный редукт алгебры $\operatorname{Im} f^n$ обладает тем же свойством.

Обозначим через A_k множество минимальных элементов унара $\langle A, f\rangle$, имеющих глубину k, а через B_k — множество минимальных элементов глубины k унарного редукта $\operatorname{Im} f^n$. По доказанному выше $|A_k| = |B_k|$ для всех $k > 0$. Тогда существует биекция $\alpha_k \colon A_k \to B_k$. Обозначим через D подунар унара $\langle A, f\rangle$, порождённый всеми его минимальными элементами.

Определим соответствие $\gamma\colon A \to \operatorname{Im} f^n$ следующим образом. Для всех $x \in (A \setminus D) \cup \{a\}$ положим $\gamma(x) = x$. Если же $x \in D$ и $x \neq a$, то, учитывая, что для x существует такой минимальный элемент $b \in A$ глубины k, что $x = f^m(b)$ для некоторого $0 \leqslant m < k$, положим $\gamma(x) = f^m\bigl(\alpha_k(b)\bigr)$. Однозначность соответствия γ вытекает из однозначности отображений α_k и операции f; таким образом, γ — отображение.

Пусть $y \in \operatorname{Im} f^n$. Если $y = a$, то $y = \gamma(a)$. Пусть теперь $y \neq a$. Тогда найдётся такой $z \in A$, что $y = f^n(z)$, причём $t(z) > n$. Если $z \in A \setminus D$, то и $y \in A \setminus D$, следовательно, $y = \gamma(y)$.

Пусть $z \in D$, $z \neq a$. Тогда найдётся такой минимальный элемент $b \in A$ глубины k, что $z = f^m(b)$ для некоторого $0 \leqslant m < k$. Как было доказано выше, $f^n(b)$ — минимальный элемент $\operatorname{Im} f^n$, причём $t\bigl(f^n(b)\bigr) = k - n$. Тогда $f^n(b) \in B_{k-n}$. В силу сюръективности отображения α_{k-n} найдётся такой минимальный элемент $c \in A$, что $\alpha_{k-n}(c) = f^n(b)$. Тогда
$$y = f^n(z) = f^n\bigl(f^m(b)\bigr) = f^m\bigl(f^n(b)\bigr) = f^m\bigl(\alpha_{k-n}(c)\bigr) = \gamma\bigl(f^m(c)\bigr).$$
Таким образом, отображение γ сюръективно.

Пусть $x_1, x_2 \in A$ и $\gamma(x_1) = \gamma(x_2)$. Если $x_1, x_2 \in (A \setminus D) \cup \{a\}$, то $x_1 = \gamma(x_1) = \gamma(x_2) = x_2$.

Пусть $x_1 \in (A \setminus D) \cup \{a\}$ и $x_2 \in D$, $x_2 \neq a$. Тогда $\gamma(x_1) = x_1$ и найдётся такой минимальный элемент $b \in A$ глубины k, что $x_2 = f^m(b)$ для некоторого $0 \leqslant m < k$. Поэтому $\gamma(x_2) = f^m\bigl(\alpha_k(b)\bigr)$, и значит, $x_1 = f^m\bigl(\alpha_k(b)\bigr)$. Если $x_1 \in A \setminus D$, то получаем противоречие с выбором x_1, так как $f^m\bigl(\alpha_k(b)\bigr) \in D$. Тогда $x_1 = a$, и значит, $a = f^m\bigl(\alpha_k(b)\bigr)$. С другой стороны, $\alpha_k(b) \in B_k$, т. е. $t\bigl(\alpha_k(b)\bigr) = k$, а поскольку $m < k$, то $f^m\bigl(\alpha_k(b)\bigr) \neq a$ — противоречие.

Случай, когда $x_2 \in (A \setminus D) \cup \{a\}$ и $x_1 \in D$, $x_1 \neq a$, приводится к противоречию аналогично.

Пусть теперь $x_1, x_2 \in D$ и $x_1, x_2 \neq a$. Тогда найдутся такие минимальные элементы $b_1, b_2 \in A$ глубин k и l соответственно, что $x_1 = f^m(b_1)$, $x_2 = f^s(b_2)$ для некоторых $0 \leqslant m < k$, $0 \leqslant s < l$. Тогда $\gamma(x_1) = f^m\big(\alpha_k(b_1)\big)$, $\gamma(x_2) = f^s\big(\alpha_l(b_2)\big)$, и следовательно, $f^m\big(\alpha_k(b_1)\big) = f^s\big(\alpha_l(b_2)\big)$. Без ограничения общности можно считать, что $m \leqslant s$.

Рассмотрим случай, когда $m, s \geqslant 1$. Предположим, что $m < s$. Предположение о том, что $\alpha_k(b_1) \neq f^{s-m}\big(\alpha_l(b_2)\big)$, влечёт существование в унарном редукте алгебры $\operatorname{Im} f^n$ узлового элемента, не совпадающего с a (так как $m < k$ и $s < l$). Это означает, что унарный редукт $\operatorname{Im} f^n$ не является корнем специального вида. С другой стороны, унар $\langle A, f\rangle$ — корень специального вида, а значит, по следствию 3 для него при всех $n \geqslant 0$ выполняется равенство $\sigma_n = \beta_n$. Тогда по лемме 21 унарный редукт A/σ_n также является корнем специального вида. Учитывая, что $\operatorname{Im} f^n \cong A/\sigma_n$, получаем противоречие. Поэтому $\alpha_k(b_1) = f^{s-m}\big(\alpha_l(b_2)\big)$, что противоречит минимальности элемента $\alpha_k(b_1)$. Таким образом, $m = s$. Поскольку $m < k$, $s < l$, то $f^m\big(\alpha_k(b_1)\big) = f^m\big(\alpha_l(b_2)\big)$ влечёт $\alpha_k(b_1) = \alpha_l(b_2)$. Тогда $k = l$, и, учитывая инъективность α_k, имеем $b_1 = b_2$, откуда следует, что $x_1 = x_2$.

Случай, когда $m = 0$ или $s = 0$, противоречит минимальности элементов $\alpha_k(b_1)$ или $\alpha_l(b_2)$ соответственно. Таким образом, отображение γ инъективно.

Пусть $x \in A$. Докажем, что отображение γ сохраняет операцию f. Для $x \in (A \setminus D) \cup \{a\}$ это очевидно. Пусть $x \in D$, $x \neq a$. Тогда найдётся такой минимальный элемент $b \in A$ глубины k, что $x = f^m(b)$ для некоторого $0 \leqslant m < k$. Имеем

$$\gamma\big(f(x)\big) = \gamma\big(f^{m+1}(b)\big) = f^{m+1}\big(\alpha_k(b)\big) = f\Big(f^m\big(\alpha_k(b)\big)\Big) = f\big(\gamma(x)\big).$$

Докажем, что $t(x) = t\big(\gamma(x)\big)$ для любого $x \in A$. Если $x \in (A \setminus D) \cup \{a\}$, то утверждение очевидно. Пусть $x \in D$, $x \neq a$. Тогда найдётся такой минимальный элемент $b \in A$ глубины k, что $x = f^m(b)$ для некоторого $0 \leqslant m < k$, откуда получаем, что $t(x) = k - m$ и $\gamma(x) = f^m\big(\alpha_k(b)\big)$. Поскольку $t\big(\alpha_k(b)\big) = k$, то

$$t\big(\gamma(x)\big) = t\big(\alpha_k(b)\big) - m = k - m = t(x).$$

Отсюда для любых двух различных $x, y \in A$, учитывая следствие 2, выводим, что

$$k(x, y) = \max\{t(x), t(y)\} = \max\big\{t\big(\gamma(x)\big), t\big(\gamma(y)\big)\big\} = k\big(\gamma(x), \gamma(y)\big).$$

Отсюда с учётом определения (1) получаем, что для любых $x, y, z \in A$ справедливо соотношение $\gamma\big(p(x, y, z)\big) = p\big(\gamma(x), \gamma(y), \gamma(z)\big)$.

Таким образом, $\gamma\colon A \to \operatorname{Im} f^n$ изоморфно отображает $\langle A, f, p\rangle$ на $\operatorname{Im} f^n$. Учитывая, что $\operatorname{Im} f^n \cong A/\sigma_n$, отсюда получаем, что алгебра $\langle A, f, p\rangle$ псевдопроста. $\square$

Из лемм 14 и 22 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Неодноэлементный унар $\langle A, f, p\rangle$ с мальцевской операцией p, определённой по правилу* (1), *является псевдопростой алгеброй тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

1) *операция f инъективна*;

2) *унар* $\langle A, f\rangle$ *является корнем глубины* 1;
3) *унар* $\langle A, f\rangle$ *является корнем специального вида, имеющим для всех* $m > 0$ *равномощные друг другу* (*возможно, пустые*) *множества минимальных элементов глубины* m.

Автор выражает искреннюю благодарность В. А. Артамонову и В. К. Карташову за плодотворное обсуждение задач и постоянное внимание к работе.

Литература

[1] Егорова Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры // Упорядоченные множества и решётки: Межвуз. науч. сб. Вып. 5. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1978. — С. 11—44.

[2] Карташов В. К. О решётках квазимногообразий унаров // Сиб. мат. журн. — 1985. — Т. 26, № 3. — С. 49—62.

[3] Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Междунар. семинар «Универсальная алгебра и её приложения»: Тез. сообщ. — Волгоград, 1999. — С. 32.

[4] Кожухов И. Б. Полугруппы, над которыми все полигоны резидуально конечны // Фундамент. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1335—1344.

[5] Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969/1970 учебного года. — М.: Наука, 1974.

[6] Либер С. А. Упорядоченные n-кольцоиды над мультиоператорными группами // Мат. исследования. — 1972. — Т. 7, № 1. — С. 83—97.

[7] Общая алгебра. Т. 2 / Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. — М.: Наука, 1991.

[8] Скорняков Л. А. Обобщения модулей // Модули. III: Препринт. — Новосибирск, 1973. — С. 22—27.

[9] Усольцев В. Л. Минимальные унарные алгебры с двумя коммутирующими операциями. — Деп. в ВИНИТИ 31.12.96; № 3857-В96.

[10] Хион Я. В. Ω-кольцоиды, Ω-кольца и их представления // Тр. ММО. — 1965. — Т. 14. — С. 3—47.

[11] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. — Berlin: Walter de Gruyter, 2000.

[12] Loi N. V., Wiegandt R. Subdirect irreducibility of algebras and acts with an additional unary operation // Miskolc Math. Notes. — 2005. — Vol. 6, no. 2. — P. 217—224.

[13] Skornyakov L. A. Unars // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. — 1982. — Vol. 29. — P. 735—743.

[14] Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$ // Arch. Math. (Basel). — 1970. — Vol. 21. — P. 256—264.