Длина расщепления смешанной абелевой группы ранга без кручения 1

ФАМ ТХИ ТХУ ТХЮИ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ptthuthuy@yahoo.com

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, группа ранга без кручения 1, высотная матрица, длина расщепления.

Аннотация

Длиной расщепления смешанной абелевой группы G называется наименьшее целое положительное число n, такое что $\overset{n}{\bigotimes} G$ расщепляется. Задача определения длины расщепления смешанной абелевой группы была сформулирована Ирвином, Хаббазом и Райной. В настоящей работе получен критерий того, что $\overset{n}{\bigotimes} G$ расщепляется, для счётной смешанной абелевой группы G ранга без кручения 1.

Abstract

Pham Thi Thu Thuy, Splitting length of Abelian mixed groups of torsion-free rank 1, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 7, pp. 209—221.

Splitting length of a mixed Abelian group G is defined as the smallest positive integer n such that $\overset{n}{\bigotimes} G$ splits. The task of determining the splitting length of mixed Abelian groups was formulated by Irwin, Khabbaz, and Rayna. In this paper, a criterion for determining whether $\overset{n}{\bigotimes} G$ splits for countable mixed Abelian groups G of torsion-free rank 1 is found.

Длиной расщепления смешанной абелевой группы G называется наименьшее целое положительное число n, такое что $\overset{n}{\bigotimes} G$ расщепляется. Задача определения длины расщепления смешанной абелевой группы была сформулирована Ирвином, Хаббазом и Райной [4]. В настоящей работе получен критерий того, что $\overset{n}{\bigotimes} G$ расщепляется, для счётной смешанной абелевой группы G ранга без кручения 1.

Все группы, рассматриваемые в данной работе, коммутативны, под группой всегда понимается аддитивная абелева группа.

Через $\mathbb{N}$ обозначается множество всех натуральных чисел, через $\mathbb{N}_0$ — множество всех неотрицательных целых чисел, через ω — наименьшее бесконечное

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 7, с. 209—221.

порядковое число, p всегда обозначает простое число, а p_k ($k \in \mathbb{N}$) — k-е простое число.

Пусть G — группы. Через $\mathrm{T}(G)$ обозначается её периодическая часть, через $\mathrm{T}_p(G)$ — её p-компонента. Если Γ — некоторая совокупность простых чисел, то $\mathrm{T}_\Gamma(G)$ — прямая сумма $\bigoplus\limits_{p\in\Gamma} \mathrm{T}_p(G)$. $\bigotimes\limits^{n} G$ — тензорное произведение групп $G\otimes\ldots\otimes G$, содержащее n множителей, $\bigotimes\limits^{n} g$ — тензорное произведение $g\otimes\ldots\otimes g$, содержащее n множителей, $\mathrm{h}_p^*(g)$ — обобщённая высота элемента g группы G, т. е. наибольшее порядковое число σ, такое что $g \in p^\sigma G$. Если $g \in p^\sigma G$ для любого порядкового числа σ, то считаем, что $\mathrm{h}_p^*(g) = \infty$.

Для каждого элемента g группы G определяем высотную матрицу $\mathbb{H}(g)$ размера $\omega \times \omega$ следующим образом. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ — последовательность всех простых чисел в порядке возрастания. Тогда

$$\mathbb{H}(g) = \begin{pmatrix} \mathrm{h}^*_{p_1}(g) & \mathrm{h}^*_{p_1}(p_1 g) & \ldots & \mathrm{h}^*_{p_1}(p_1^i g) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{h}^*_{p_k}(g) & \mathrm{h}^*_{p_k}(p_k g) & \ldots & \mathrm{h}^*_{p_k}(p_k^i g) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = (\sigma_{ki}).$$

Строку, соответствующую p, будем называть p-строкой. Если речь идёт только об одном конкретном p, то элементы p-строки будем нумеровать только вторыми индексами σ_i.

Две $(\omega\times\omega)$-матрицы (σ_{ki}) и (ρ_{ki}) называются эквивалентными, если p_k-строки обеих матриц совпадают для почти всех k, а для каждого из оставшихся k найдутся такие неотрицательные целые числа l, m (зависящие от k), что выполняется условие $\sigma_{k,i+l} = \rho_{k,i+s}$ для всех $i \in \mathbb{N}_0$. Из [6] имеем, что каждой группе G ранга без кручения 1 можно поставить в соответствие однозначно определённый класс эквивалентности матриц, который мы обозначим через $\mathbb{H}(G)$.

Пусть $\mathbb{M}$ — $(\omega\times\omega)$-матрица. Будем обозначать через $\mathbb{P}_\infty(\mathbb{M})$ множество всех таких простых чисел p, что на p-строке $\mathbb{M}$ имеются бесконечно много скачков или бесконечный элемент, и через $\mathbb{P}_\mathbb{Z}(\mathbb{M})$ множество всех таких простых чисел p, что на p-строке $\mathbb{M}$ имеются только целые числа и конечное количество скачков (скачков может не быть вообще). Для удобства, если речь идёт только об одной конкретной матрице $\mathbb{M}$, будем обозначать эти множества просто $\mathbb{P}_\infty$ и $\mathbb{P}_\mathbb{Z}$.

Определение. Пусть $\mathbb{M}$ — $(\omega\times\omega)$-матрица, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Для $p_k \in \mathbb{P}_\mathbb{Z}$ пусть $i_0^{(k)} = 0$, и пусть $i_1^{(k)}, \ldots, i_{m_k}^{(k)}$ — все места в p_k-строке, на которых имеются скачки (если они существуют). Будем говорить, что $\mathbb{M}$ удовлетворяет условию $(*_\mathbb{Z})$ для n, если для почти всех $p_k \in \mathbb{P}_\mathbb{Z}$ выполняются неравенства $\sigma_{k,i_{s-1}^{(k)}} \geqslant i_{s-1}^{(k)} + \frac{1}{n-1}\, i_s^{(k)}$ для всех $s = \overline{1, m_k}$.

Определение. Пусть $\mathbb{M}$ — $(\omega\times\omega)$-матрица, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Будем говорить, что $\mathbb{M}$ удовлетворяет условию $(*_\infty)$ для n, если

1) для почти всех $p_k \in \mathbb{P}_\infty$ выполняется неравенство $\sigma_{ki} - \frac{n}{n-1}\, i > 0$ при всех $i \in \mathbb{N}_0$;
2) $\lim\limits_{i\to\infty}\bigl(\sigma_{ki} - \frac{n}{n-1}\, i\bigr) = \infty$ для всех $p_k \in \mathbb{P}_\infty$ (т. е. $(\forall\, n_0 \in N)(\exists\, i_0 \in \mathbb{N}_0)(\forall\, i \geqslant i_0)$ $\sigma_{ki} - \frac{n}{n-1}\, i > n_0$).

Замечание. Множества $\mathbb{P}_\infty$ и $\mathbb{P}_\mathbb{Z}$ для эквивалентных матриц одинаковы. Кроме того, если $\mathbb{H}$ удовлетворяет условиям $(*_\mathbb{Z})$, $(*_\infty)$ для n, то любые матрицы, эквивалентные $\mathbb{H}$, также удовлетворяют условиям $(*_\mathbb{Z})$, $(*_\infty)$ для n. Поэтому имеет смысл говорить о множествах $\mathbb{P}_\infty$ и $\mathbb{P}_\mathbb{Z}$ и выполнимости условий $(*_\mathbb{Z})$, $(*_\infty)$ для класса эквивалентности матриц, т. е. для высотной матрицы группы ранга без кручения 1.

Будем говорить, что на i-м месте p-строки высотной матрицы имеется скачок, если $\sigma_i > \sigma_{i-1} + 1$.

Лемма 1. *Пусть G — смешанная группа ранга без кручения 1. Если p-строка $\mathbb{H}(G)$ содержит скачки или такой элемент σ_i, что $\omega \leqslant \sigma_i < \infty$, то $\mathrm{T}_p(G) \neq 0$.*

Доказательство. Пусть g — элемент бесконечного порядка группы G и $\mathbb{H}(g) = (\sigma_{ki})$.

Пусть p-строка $\mathbb{H}(g)$ имеет скачок на $(i+1)$-м месте. Тогда $\mathrm{h}_p^*(p^{i+1}g) = \sigma_{i+1} > \sigma_i + 1$. Поэтому $p^{i+1}g \in p^{\sigma_i+2}G$. Следовательно, существует элемент $b \in p^{\sigma_i+1}G$, такой что $pb = p^{i+1}g$. Следовательно, $p(b - p^i g) = 0$ и $t = b - p^i g \in \mathrm{T}_p(G)$. С другой стороны, так как $\mathrm{h}_p^*(p^i g) = \sigma_i < \mathrm{h}_p^*(b)$, то $p^i g \neq b$. Поэтому $t \neq 0$. Следовательно, $\mathrm{T}_p(G) \neq 0$.

Пусть p-строка $\mathbb{H}(g)$ содержит такой элемент σ_i, что $\omega \leqslant \sigma_i < \infty$. Так как $\mathrm{h}_p^*(p^i g) = \sigma_i < \infty$, то существует такой элемент $b \in G$, что $\mathrm{h}_p^*(b) = 0$ и $p^l b = p^i g$ для некоторого натурального числа l. Так как $\mathrm{h}_p^*(p^i g) \geqslant \omega$, то существует такой элемент $c \in G$, что $p^{l+1}c = p^i g$. Поэтому $p^l(b - pc) = 0$. Так как $\mathrm{h}_p^*(b) = 0$, т. е. $p \nmid b$, то $t = b - pc \neq 0$. Таким образом, $\mathrm{T}_p(G) \neq 0$. $\square$

Следствие 2. *Пусть G — смешанная группа ранга без кручения 1. Если $\mathrm{T}_p(G) = 0$, то в p-строке $\mathbb{H}(G)$ нет скачков и имеются либо только целые числа, либо только знак ∞.*

Лемма 3. *Пусть G — смешанная группа ранга без кручения 1. Тогда число p принадлежит $\mathbb{P}_\infty$ тогда и только тогда, когда $G/\mathrm{T}(G)$ — p-делимая группа.*

Доказательство. Пусть g — элемент бесконечного порядка группы G и $\mathbb{H}(g) = (\sigma_{ki})$ — её высотная матрица.

Пусть $p \in \mathbb{P}_\infty$. Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Если p-строка содержит элемент $\sigma_i \geqslant \omega$, то $\sigma_i \geqslant n + i$. Если p-строка содержит бесконечно много скачков и n-й скачок находится на i-м месте, то $\sigma_i - i \geqslant \sigma_0 - 0 + n$, откуда следует, что $\sigma_i \geqslant \sigma_0 + n + i \geqslant n + i$. Таким образом, в общем случае всегда найдётся такое $i \in \mathbb{N}_0$, что $\sigma_i \geqslant n + i$. Тогда для некоторого $b \in G$ имеем $p^i g = p^{n+i} b$, т. е. $p^i(g - p^n b) = 0$. Тогда $t = g - p^n b \in \mathrm{T}(G)$. Следовательно, $g - t = p^n b$, откуда следует, что $\mathrm{h}_p^*\bigl(g + \mathrm{T}(G)\bigr) \geqslant n$.

Так как n — произвольное число из $\mathbb{N}$, то $\mathrm{h}_p^*\big(g + \mathrm{T}(G)\big) \geqslant \omega$. Так как $G/\mathrm{T}(G)$ — группа без кручения, то по следствию 2 $\mathrm{h}_p^*\big(g + \mathrm{T}(G)\big) = \infty$.

Пусть $p \notin \mathbb{P}_\infty$, т. е. $p \in \mathbb{P}_\mathbb{Z}$. Пусть последний скачок находится на m-м месте (если скачков нет, то считаем, что $m = 0$). Так как $\mathrm{h}_p(p^m g) = \sigma_m$, то существует такой элемент $b \in G$, что $p^{\sigma_m} b = p^m g$, т. е. $p^m(p^{\sigma_m - m} b - g) = 0$. Пусть $t = p^{\sigma_m - m} b - g$. Тогда $t \in \mathrm{T}(G)$ и $g + t = p^{\sigma_m - m} b$, откуда следует, что $\mathrm{h}_p^*\big(g + \mathrm{T}(G)\big) \geqslant \sigma_m - m$.

Допустим, что $\mathrm{h}_p\big(g + \mathrm{T}(G)\big) > \sigma_m - m$. Тогда $p^{\sigma_m - m + 1} \mid g + \mathrm{T}(G)$, т. е. существуют $t_1 \in \mathrm{T}(G)$ и $b_1 \in G$, такие что $g + t_1 = p^{\sigma_m - m + 1} b_1$. Не теряя общности, можно считать, что $\mathrm{o}(t_1) = p^l$ (если $\mathrm{o}(t_1) = p^l s$, $(s, p) = 1$, то вместо g и t_1 можно рассматривать элементы sg и st_1, так как p-строки $\mathbb{H}(g)$ и $\mathbb{H}(sg)$ одинаковы). Тогда $p^l g = p^{\sigma_m - m + 1 + l} b_1$. Следовательно, $\sigma_l \geqslant \sigma_m - m + 1 + l$, откуда следует, что $\sigma_l - l > \sigma_m - m$, что невозможно, так как из того, что на m-м месте находится последний скачок, имеем, что если $l > i$, то $\sigma_l - l = \sigma_m - m$; если $l \leqslant m$, то $\sigma_l - l \leqslant \sigma_m - m$. Следовательно, $\mathrm{h}_p^*\big(g + \mathrm{T}(G)\big) = \sigma_m - m$ конечна.

Таким образом, $p \in \mathbb{P}_\infty$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{h}_p^*\big(g + \mathrm{T}(G)\big) = \infty$ для любого элемента $g \in G$, т. е. группа $G/\mathrm{T}(G)$ p-делима. $\square$

Обозначим через $\mathbb{C}$ класс всех групп G, у которых группа $G/\mathrm{T}(G)$ является p-делимой для всех p, для которых $\mathrm{T}_p(G) \neq 0$. Будем использовать следующие определение и теорему из [8].

Определение. Пусть α — действительное число, p — простое число, G — группа. Будем говорить, что элемент g из группы G удовлетворяет условию $(*)$ для α и p, если существует неубывающая неограниченная функция $f_p \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, такая что $\mathrm{h}_p(p^i g) > \alpha\big(i + f(i)\big)$ для всех $i \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 4 [8]. *Пусть G — редуцированная группа из класса $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{p \mid \mathrm{T}_p(G) \neq 0\}$, M — максимальное линейно независимое множество элементов бесконечного порядка группы G. Тогда для $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, следующие условия эквивалентны:*

1) $\overset{n}{\bigotimes} G$ *расщепляется;*
2) *для любого $g \in M$ существует число $k \in \mathbb{N}$, такое что kg удовлетворяет условию $(*)$ для $\frac{n}{n-1}$ и любого $p \in \Lambda$.*

Заметим, что если редуцированная группа $G \in \mathbb{C}$ имеет ранг без кручения 1, то любой элемент $g \in G$, $\mathrm{o}(g) = \infty$, образует максимальное линейно независимое множество элементов бесконечного порядка. Поэтому если в G найдётся элемент бесконечного порядка, который удовлетворяет условию $(*)$ для $\frac{n}{n-1}$ и любого $p \in \Lambda$, то по теореме 4 группа $\overset{n}{\bigotimes} G$ расщепляется. И обратно, если группа $\overset{n}{\bigotimes} G$ расщепляется, то выполняется условие 2), откуда вытекает существование в G элемента kg, который удовлетворяет условию $(*)$ для $\frac{n}{n-1}$ и любого $p \in \Lambda$. Таким образом, мы доказали следующее следствие.

Следствие 5. *Пусть* $G \in \mathbb{C}$ — *группа ранга без кручения* 1, $\Lambda = \{p \mid \mathrm{T}_p(G) \neq 0\}$. *Тогда для* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, *следующие условия эквивалентны*:

1) $\overset{n}{\bigotimes} G$ *расщепляется*;
2) *в* G *существует элемент* g *бесконечного порядка, который удовлетворяет условию* $(*)$ *для* $\frac{n}{n-1}$ *и любого* $p \in \Lambda$.

Теорема 6. *Пусть* G — *редуцированная смешанная группа ранга без кручения* 1 *из класса* $\mathbb{C}$. *Тогда* $\overset{n}{\bigotimes} G$ *расщепляется тогда и только тогда, когда* $\mathbb{H}(G)$ *удовлетворяет условию* $(*_\infty)$.

Доказательство. Пусть $\Lambda = \{p \mid \mathrm{T}_p(G) \neq 0\}$.

Пусть $\overset{n}{\bigotimes} G$ расщепляется. По следствию 5 существует элемент $g \in G$, который удовлетворяет условию $(*)$ для $\frac{n}{n-1}$ и любого $p \in \Lambda$, т. е. для любого $p \in \Lambda$ существует неограниченная неубывающая функция $f_p\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, такая что $\mathrm{h}_p(p^i g) > \frac{n}{n-1}\big(i + f_p(i)\big)$ для всех $i \in \mathbb{N}_0$. Пусть $\mathbb{H}(g) = (\sigma_{ki})$ и $p \in \mathbb{P}_\infty$.

Так как группа G редуцированная, то $\mathbb{H}(g)$ не содержит ∞. Следовательно, p-строка содержит бесконечно много скачков или такой элемент σ_i, что $\omega \leqslant \sigma_i < \infty$. Тогда по лемме 1 имеем, что $p \in \Lambda$. Следовательно, для всех $i \in \mathbb{N}_0$ имеем $\sigma_i > \frac{n}{n-1}\big(i + f_p(i)\big)$, т. е. $\sigma_i - \frac{n}{n-1}\,i > \frac{n}{n-1}\,f_p(i)$. Так как $\frac{n}{n-1}\,f_p(i) \geqslant 0$ и $\lim\limits_{i\to\infty} f_p(i) = \infty$, то $\sigma_i - \frac{n}{n-1}\,i \geqslant 0$ и $\lim\limits_{i\to\infty}\big(\sigma_i - \frac{n}{n-1}\,i\big) = \infty$.

Таким образом, $\mathbb{H}(g)$ удовлетворяет условию $(*_\infty)$ для n, т. е. $\mathbb{H}(G)$ удовлетворяет условию $(*_\infty)$ для n.

Пусть $\mathbb{H}(G)$ удовлетворяет условию $(*_\infty)$ для n. Пусть $a \in G$ и $\mathbb{H}(a) = (\sigma_{ki})$. Из условия $(*_\infty)$ следует, что количество элементов σ_{ki}, $p_k \in \mathbb{P}_\infty$, матрицы $\mathbb{H}(g)$, таких что $\sigma_{ki} - \frac{n}{n-1}\,i \leqslant 0$, конечно. Поэтому в группе G существует элемент g, для которого $\mathbb{H}(g) = (\sigma'_{ki})$, такой что $\sigma'_{ki} - \frac{n}{n-1}\,i \leqslant 0$ для любого $p_k \in \mathbb{P}_\infty$.

Пусть $p \in \Lambda$. Тогда $\sigma'_i - \frac{n}{n-1}\,i > 0$ для всех элементов σ'_i, $i \in \mathbb{N}_0$. Так как группа $G/\mathrm{T}(G)$ p-делима, по лемме 3 имеем, что $p \in \Lambda_\infty$. Тогда по условию $(*_\infty)$ имеем $\lim\limits_{i\to\infty}\big(\sigma'_i - \frac{n}{n-1}\,i\big) = \infty$. Поэтому можно определить неубывающую последовательность целых чисел $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_l, \ldots$ следующим образом. Положим $i_0 = -1$. Допустим, что построена неубывающая последовательность целых чисел $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_l$, таких что для всех $i > i_s$ $\sigma'_i - \frac{n}{n-1}\,i > \frac{n}{n-1}\,s$ для всех $s = \overline{1,l}$. Тогда существует такое $i_{l+1} > i_l$, что для всех $i > i_{l+1}$ $\sigma'_i - \frac{n}{n-1}\,i > \frac{n}{n-1}(l+1)$.

Построим функцию $f_p\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ следующим образом. Для любого $i \in \mathbb{N}_0$ существует единственный номер l, такой что $i_l < i \leqslant i_{l+1}$; положим $f_p(i) = l$. Тогда $\sigma'_i - \frac{n}{n-1}\,i > \frac{n}{n-1}\,l = \frac{n}{n-1}\,f_p(i)$. Следовательно, $\mathrm{h}_p(p^i g) > \frac{n}{n-1}\big(i + f_p(i)\big)$. Кроме того, по построению видно, что функция $f_p\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ неубывающая и неограниченная.

Таким образом, g удовлетворяет условию $(*)$ для $\frac{n}{n-1}$ и любого $p \in \Lambda$. По следствию 5 $\overset{n}{\bigotimes} G$ расщепляется. $\square$

Лемма 7. *Пусть* A, B — *смешанные группы,* $\mathrm{T}_p(A) = \mathrm{T}_p(B) = 0$. *Тогда* $\mathrm{T}_p(A \otimes B) = 0$. *Кроме того, если* $a \in A$, $b \in B$, *то* $\mathrm{h}_p(a \otimes b) = \mathrm{h}_p(a) + \mathrm{h}_p(b)$.

Доказательство. Согласно [3] имеем

$$\mathrm{T}(A \otimes B) \cong \mathrm{T}(A) \otimes \mathrm{T}(B) \oplus \mathrm{T}(A) \otimes B/\mathrm{T}(B) \oplus \mathrm{T}(B) \otimes A/\mathrm{T}(A).$$

Пусть, например, $t \in \mathrm{T}(A)$, $\mathrm{o}(t) = m$, $b \in B/\mathrm{T}(B)$. Тогда $m(t \otimes b) = (mt) \otimes b = 0$. Следовательно, $\mathrm{o}(t \otimes b) \mid m$. С другой стороны, так как $\mathrm{T}_p(A) = 0$, то $(m, p) = 1$. Поэтому $(\mathrm{o}(t \otimes b), p) = 1$. Следовательно, $\mathrm{T}(A) \otimes B/\mathrm{T}(B)$ имеет нулевую p-компоненту. Аналогично $\mathrm{T}(A) \otimes \mathrm{T}(B)$, $\mathrm{T}(B) \otimes \mathrm{T}(A)$ также имеют нулевые p-компоненты. Таким образом,

$$\mathrm{T}_p(A \otimes B) = 0. \tag{1}$$

Имеет место следующее утверждение [5, лемма 2.12]. Пусть G и C — группы, $g \in G$, $c \in C$. Тогда если $\mathrm{h}_p(g) = \mathrm{h}_p(c) = 0$, то

$$\mathrm{h}_p(g \otimes c) = 0 \tag{2}$$

в $G \otimes C$.

Пусть $a \in A$, $b \in B$ и $\mathrm{h}_p(a) = m$, $\mathrm{h}_p(b) = l$. Тогда существуют такие элементы $a_1 \in A$ и $b_1 \in B$, что $\mathrm{h}_p(a_1) = \mathrm{h}_p(b_1) = 0$ и $a = p^m a_1$, $b = p^l b_1$. Из (2) следует, что $\mathrm{h}_p(a_1 \otimes b_1) = 0$. Кроме того, из (1) и следствия 2 следует, что p-строка матрицы $\mathbb{H}(a \otimes b)$ не имеет скачков. Следовательно, $\mathrm{h}_p(a \otimes b) = \mathrm{h}_p\big(p^{m+l}(a_1 \otimes b_1)\big) = m + l$. □

Следствие 8. *Если $\mathrm{T}_p(A) = 0$ и $a \in A$, то $\mathrm{T}_p\big(\overset{n}{\bigotimes} A\big) = 0$ и $\mathrm{h}_p\big(\overset{n}{\bigotimes} a\big) = n \cdot \mathrm{h}_p(a)$.*

Лемма 9. *Пусть $t \in \mathbb{Z}(p^m)$. Тогда если $n \cdot \mathrm{h}_p(t) < m$, то $\overset{n}{\bigotimes} t \neq 0$ и $\mathrm{h}_p\big(\overset{n}{\bigotimes} t\big) = n \cdot \mathrm{h}_p(t)$, а если $n \cdot \mathrm{h}_p(t) \geqslant m$, то $\overset{n}{\bigotimes} t = 0$.*

Доказательство. В [2] доказано, что $\mathbb{Z}(p^k) \otimes \mathbb{Z}(p^l) \cong \mathbb{Z}\big(p^{\min(k,l)}\big)$ для любых натуральных чисел k и l. Тогда группа $\overset{n}{\bigotimes} \mathbb{Z}(p^m)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}(p^m) = \langle e \rangle$, т. е. является циклической группой порядка p^m. Легко убедиться, что образующим этой группы является элемент $\overset{n}{\bigotimes} e$. Пусть $t \in \overset{n}{\bigotimes} G$, $\mathrm{h}_p(t) = r$. Не теряя общности, можно считать, что $t = p^r e$. Тогда $\overset{n}{\bigotimes} t = \overset{n}{\bigotimes} (p^r e) = p^{nr}\big(\overset{n}{\bigotimes} e\big)$. Поэтому если $nr < m$, то $\overset{n}{\bigotimes} t \neq 0$ и $\mathrm{h}_p\big(\overset{n}{\bigotimes} t\big) = nr$, а если $nr \geqslant m$, то $\overset{n}{\bigotimes} t = 0$. □

Лемма 10. *Пусть G — смешанная группа ранга без кручения 1. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}$. Тогда если для почти всех $p \in \Gamma$ p-строки $\mathbb{H}(G)$ не имеют скачков, то $\mathrm{T}_\Gamma(G)$ выделяется прямым слагаемым для G.*

Доказательство. Будем использовать следующую теорему (см. [6,7]): счётные смешанные группы A и C ранга без кручения 1 изоморфны тогда и только тогда, когда

1) их периодические части $\mathrm{T}(A)$ и $\mathrm{T}(C)$ изоморфны;
2) высотные матрицы $\mathbb{H}(A)$ и $\mathbb{H}(C)$ эквивалентны.

Из условия следует, что количество $p \in \Gamma$, для которых p-строки имеют скачки, конечно и число скачков в каждой из этих строк также конечно. Поэтому существует эквивалентная $\mathbb{H}(G)$ матрица $\mathbb{M}$, p-строки которой не содержат скачков при всех $p \in \Gamma$. Тогда выполняются все условия для матрицы высот счётной смешанной группы ранга без кручения 1. Поэтому существует группа A ранга без кручения 1, для которой $\mathbb{H}(A) = \mathbb{M}$ и $\mathrm{T}(A) = \mathrm{T}_{\Lambda\setminus\Gamma}(G)$, где $\Lambda = \{p \mid \mathrm{T}_p(G) \neq 0\}$.

Пусть $G' = A \oplus \mathrm{T}_\Gamma(G)$. Тогда

$$\mathrm{T}(G') = \mathrm{T}(A) \oplus \mathrm{T}_\Gamma(G) = \mathrm{T}_{\Lambda\setminus\Gamma}(G) \oplus \mathrm{T}_\Gamma(G) = \mathrm{T}(G).$$

Кроме того, $\mathbb{H}(A)$ и $\mathbb{H}(G)$ эквивалентны. Из условия 2) сформулированной выше теоремы следует, что $G' \cong G$. Так как $\mathrm{T}_\Gamma(G')$ выделяется в G' прямым слагаемым, то $\mathrm{T}_\Gamma(G)$ выделяется прямым слагаемым в G. $\square$

Лемма 11. *Пусть G — группа ранга без кручения 1, $g \in G \setminus \mathrm{T}(G)$, $p \in \mathbb{P}_\mathbb{Z}$. Тогда если p-строка матрицы $\mathbb{H}(g)$ не содержит скачков, то p-строка матрицы $\mathbb{H}\big(\overset{n}{\bigotimes} g\big)$ также не содержит скачков и $\mathrm{h}_p\big(\overset{n}{\bigotimes} g\big) = n \cdot \mathrm{h}_p(g)$.*

Доказательство. Так как $p \in \mathbb{P}_\mathbb{Z}$, то по лемме 10 $G = \mathrm{T}_p(G) \oplus A$ для некоторой группы A. Тогда $g = t+a$, где $t \in \mathrm{T}_p(G)$, $a \in A$. Так как $\mathrm{T}_p(A) = 0$, то по следствию 2 p-строка матрицы $\mathbb{H}(a)$ не имеет скачков. По условию p-строка матрицы $\mathbb{H}(g)$ также не имеет скачков. Кроме того, $p^l g = p^l a$, где $\mathrm{o}(t) = p^l$. Поэтому с l-го места p-строки $\mathbb{H}(g)$ и $\mathbb{H}(a)$ совпадают. Следовательно, p-строки $\mathbb{H}(g)$ и $\mathbb{H}(a)$ совпадают. В частности, $\mathrm{h}_p(g) = \mathrm{h}_p(a)$. С другой стороны, так как $\mathrm{T}_p(A) = 0$, $a \in \mathrm{T}_p(A)$, то по следствию 8 $\mathrm{T}_p\big(\overset{n}{\bigotimes} A\big) = 0$ и $\mathrm{h}_p\big(\overset{n}{\bigotimes} a\big) = n \cdot \mathrm{h}_p(a)$. Следовательно,

$$\mathrm{h}_p\Big(\bigotimes^n g\Big) \geqslant n \cdot \mathrm{h}_p(g) = n \cdot \mathrm{h}_p(a) = \mathrm{h}_p\Big(\bigotimes^n a\Big).$$

Кроме того, так как $\mathrm{T}_p\big(\overset{n}{\bigotimes} A\big) = 0$, то по следствию 2 p-строка $\mathbb{H}\big(\overset{n}{\bigotimes} a\big)$ не содержит скачков. Поэтому если p-строка $\mathbb{H}\big(\overset{n}{\bigotimes} g\big)$ содержит скачок или $\mathrm{h}_p\big(\overset{n}{\bigotimes} g\big) > \mathrm{h}_p\big(\overset{n}{\bigotimes} a\big)$, то начиная с некоторого места $\mathrm{h}_p\Big(p^r\big(\overset{n}{\bigotimes} g\big)\Big) > \mathrm{h}_p\Big(p^r\big(\overset{n}{\bigotimes} a\big)\Big)$, что противоречит тому, что $p^{nl}\big(\overset{n}{\bigotimes} g\big) = \overset{n}{\bigotimes}(p^l g) = \overset{n}{\bigotimes}(p^l a) = p^{nl}\big(\overset{n}{\bigotimes} a\big)$, т. е. с (nl)-го места p-строки $\mathbb{H}\big(\overset{n}{\bigotimes} g\big)$ и $\mathbb{H}\big(\overset{n}{\bigotimes} a\big)$ совпадают. Таким образом, p-строка матрицы $\mathbb{H}\big(\overset{n}{\bigotimes} g\big)$ не содержит скачков и $\mathrm{h}_p\big(\overset{n}{\bigotimes} g\big) = \mathrm{h}_p\big(\overset{n}{\bigotimes} a\big) = n \cdot \mathrm{h}_p(g)$. $\square$

Лемма 12. *Пусть G — смешанная группа ранга без кручения 1, $g \in G \setminus \mathrm{T}(G)$. Пусть $p \in \mathbb{P}_\mathbb{Z}$ и p-строка имеет первый скачок на i_1-м месте. Тогда $G = T_1 \oplus G_1$, где $T_1 \cong \mathbb{Z}\big(p^{\sigma_0 + i_1}\big)$ и $g = t_1 + g_1$ $(t_1 \in T_1,\ g_1 \in G_1)$, $\mathrm{h}_p(t_1) = \sigma_0$, $\mathrm{o}(t_1) = p^{i_1}$, $\mathrm{h}_p(g_1) = \sigma_{i_1} - i_1$.*

Доказательство. Так как $\mathrm{h}_p(p^{i_1}g) = \sigma_{i_1}$, то $p^{i_1}g = p^{\sigma_{i_1}}a$ для некоторого $a \in G$. Следовательно, $p^{i_1}\big(g - p^{\sigma_{i_1}-i_1}a\big) = 0$. Пусть $\tilde{t} = g - p^{\sigma_{i_1}-i_1}a$ и $\tilde{g} = p^{\sigma_{i_1}-i_1}a$. Тогда

$$g = \tilde{t} + \tilde{g}, \quad \mathrm{h}_p(\tilde{g}) \geqslant \sigma_{i_1} - i_1, \quad p^{i_1}\tilde{t} = 0. \tag{3}$$

Пусть $r < i_1$. Так как на i_1-м месте p-строки имеется первый скачок, то $\sigma_{i_1} - i_1 > \sigma_r - r = \sigma_0$, т. е. $\sigma_{i_1} - i_1 + r > \sigma_r$. Кроме того, из (3) следует, что $\mathrm{h}_p(p^r\tilde{g}) \geqslant \sigma_{i_1} - i_1 + r$. Следовательно, $\mathrm{h}_p(p^r g) = \sigma_r < \mathrm{h}_p(p^r\tilde{g})$. С другой стороны, из (3) имеем $p^r\tilde{t} = p^r g - p^r\tilde{g}$. Поэтому

$$\mathrm{h}_p(p^r\tilde{g}) > \mathrm{h}_p(p^r\tilde{t}) = \mathrm{h}_p(p^r g) = \sigma_r = \sigma_0 + r. \tag{4}$$

В частности,

$$\mathrm{h}_p(\tilde{t}) = \mathrm{h}_p(g) = \sigma_0 < \mathrm{h}_p(\tilde{g}). \tag{5}$$

Кроме того, из (4) следует, что $p^r\tilde{t} \neq 0$ для всех $r < i_1$, и из (3) имеем $p^{i_1}\tilde{t} = 0$. Следовательно, $\mathrm{o}(\tilde{t}) = p^{i_1}$. Пусть e_1 — такой элемент группы G, что $\mathrm{h}_p(e_1) = 0$ и $p^{\sigma_0}e_1 = \tilde{t}$, и пусть $T_1 = \langle e_1 \rangle$. Легко убедиться, что $\mathrm{o}(e_1) = p^{\sigma_0 + i_1}$. Поэтому группа $T_1 \cong \mathbb{Z}\big(p^{\sigma_0+i_1}\big)$ ограниченная. Пусть $p^s b = p^l e_1 \in T_1$ ($l \leqslant \sigma_0 + i_1 - 1$) для некоторого $b \in G$ и $s \in \mathbb{N}$. Тогда $p^{s+(\sigma_0+i_1-1-l)}b = p^{\sigma_0+i_1-1}e_1 = p^{i_1-1}\tilde{t}$. Используя (4), при $r = i_1 - 1$ имеем $\mathrm{h}_p(p^{i_1-1}\tilde{t}) = \sigma_0 + i_1 - 1$. Следовательно, $s + \sigma_0 + i_1 - 1 - l \leqslant \sigma_0 + i_1 - 1$, поэтому $s \leqslant l$. Следовательно, $p^s b = p^l e_1 = p^s(p^{l-s}e_1)$. Так как $p^{l-s}e_1 \in T_1$, то T_1 сервантна в G. Таким образом, по [2, теорема 27.5] T_1 выделяется прямым слагаемым в G,

$$G = T_1 \oplus G_1 \tag{6}$$

для некоторой подгруппы G_1 группы G.

Имеем

$$g = \tilde{t} + \tilde{g}. \tag{7}$$

Пусть $\tilde{g} = t + g_1$, $t \in T_1$, $g_1 \in G_1$. Тогда $g = t_1 + g_1$, где $t_1 = \tilde{t} + t \in T_1$. Из соотношений (6), (7) и (5) имеем $\mathrm{h}_p(g_1) \geqslant \mathrm{h}_p(\tilde{g}) > \mathrm{h}_p(g)$. Следовательно, $\mathrm{h}_p(t_1) = \mathrm{h}_p(g) = \sigma_0$. Так как $t_1 \in T_1 \cong \mathbb{Z}\big(p^{\sigma_0+i_1}\big)$, то $\mathrm{o}(t_1) = p^{i_1}$, откуда следует, что $p^{i_1}g = p^{i_1}(t_1 + g_1) = p^{i_1}g_1$. Поэтому $\mathrm{h}_p(p^{i_1}g_1) = \mathrm{h}_p(p^{i_1}g) = \sigma_{i_1}$. Следовательно, $\mathrm{h}_p(g_1) \leqslant \sigma_{i_1} - i_1$. С другой стороны из соотношений (7) и (3) имеем, что $\mathrm{h}_p(g_1) \geqslant \mathrm{h}_p(\tilde{g}) \geqslant \sigma_{i_1} - i_1$. Поэтому $\mathrm{h}_p(g_1) = \sigma_{i_1} - i_1$. □

Замечание. Так как $p^{i_1}g_1 = p^{i_1}g = \sigma_{i_1}$ и $\mathrm{h}_p(g_1) = \sigma_{i_1} - i_1$, то начиная с i_1-го места p-строки $\mathbb{H}(g)$ и $\mathbb{H}(g_1)$ совпадают и первый скачок p-строки $\mathbb{H}(g_1)$ находится на i_2-м месте, на котором находится второй скачок p-строки $\mathbb{H}(g)$ (если существует). Другими словами, p-строка $\mathbb{H}(g_1)$ получена из p-строки $\mathbb{H}(g)$ «устранением» первого скачка.

Если $i_0 = 0$ и $i_1, i_2, \ldots, i_m$ — все места p-строки $\mathbb{H}(g)$, на которых находятся скачки, то можно таким же образом «устранить» все её скачки, рассмотрев прямое разложение

$$G = T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_m \oplus A,$$

где

$$T_1 \cong \mathbb{Z}\bigl(p^{\sigma_{i_0}-i_0+i_1}\bigr),\ T_2 \cong \mathbb{Z}\bigl(p^{\sigma_1-i_1+i_2}\bigr),\ldots,\ T_m \cong \mathbb{Z}\bigl(p^{\sigma_{m-1}-i_{m-1}+i_m}\bigr).$$

В этом разложении $g = t_1+t_2+\ldots+t_m+a$, где $\mathrm{h}_p(t_s) = \sigma_{i_{s-1}} - i_{s-1}$, $\mathrm{o}(t_s) = p^{i_s}$ $(s = \overline{1,m})$ и $\mathrm{h}_p(a) = \sigma_{i_m} - i_m$. Кроме того, p-строка матрицы $\mathbb{H}(a)$ получается из p-строки матрицы $\mathbb{H}(g)$ «устранением» всех скачков.

Лемма 13. *Пусть G — смешанная группа ранга без кручения 1, $g \in G\setminus \mathrm{T}(G)$. Пусть $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}$ и $i_0 = 0$. Пусть $i_1,\ldots,i_m$ — все места p-строки матрицы $\mathbb{H}(g)$, на которых имеются скачки. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *p-строка $\mathbb{H}\bigl(\overset{n}{\bigotimes} g\bigr)$ содержит только целые числа и не имеет скачков*;
2) *$\sigma_{i_{s-1}} \geqslant i_{s-1} + \frac{1}{n-1}\, i_s$ для $s = \overline{1,m}$.*

Доказательство. По предыдущему замечанию существует прямое разложение $G = T_1 \oplus \mathrm{T}_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{T}_m \oplus A$, в котором $g = t_1+t_2+\ldots+t_m+a$, где $\mathrm{T}_s \cong \mathbb{Z}\bigl(p^{\sigma_{i_{s-1}}-i_{s-1}+i_s}\bigr)$ и $\mathrm{h}_p(t_s) = \sigma_{i_{s-1}} - i_{s-1}$, $\mathrm{o}(t_s) = p^{i_s}$ для любого $s = \overline{1,m}$, $\mathrm{h}_p(a) = \sigma_{i_m} - i_m$. Так как на местах $i_1,\ldots,i_m$ p-строки матрицы $\mathbb{H}(g)$ находятся скачки, то

$$\mathrm{h}_p(t_1) < \mathrm{h}_p(t_2) < \ldots < \mathrm{h}_p(t_m) < \mathrm{h}_p(a). \tag{8}$$

Имеем также, что p-строка матрицы $\mathbb{H}(a)$ не содержит скачков. Тогда по лемме 11 p-строка $\mathbb{H}\bigl(\overset{n}{\bigotimes} a\bigr)$ не имеет скачков и

$$\mathrm{h}_p\Bigl(\bigotimes^n a\Bigr) = n\cdot \mathrm{h}_p(a). \tag{9}$$

Так как разложение группы G прямое, то $\overset{n}{\bigotimes} G = \bigoplus (X_1\otimes\ldots\otimes X_n)$, где $X_i \in \{T_1,\ldots,\mathrm{T}_m,A\}$, и при этом $\overset{n}{\bigotimes} g = \sum (x_1\otimes\ldots\otimes x_n)$, где $x_i \in \{t_1,\ldots,t_m,a\}$. Поэтому

$$\mathrm{h}_p\Bigl(\bigotimes^n g\Bigr) = \min_{x_i\in\{t_1,\ldots,t_m,a\}} \mathrm{h}_p(x_1\otimes\ldots\otimes x_n). \tag{10}$$

Пусть $\mathbb{H}\bigl(\overset{n}{\bigotimes} g\bigr)$ не имеют скачков и содержит только целые числа. Пусть $s \in \overline{1,m}$. Допустим, что $\sigma_{i_{s-1}} < i_{s-1} + \frac{1}{n-1}\, i_s$. Тогда $n(\sigma_{i_{s-1}} - i_{s-1}) <$ $< \sigma_{i_{s-1}} - i_{s-1} + i_s$. Так как $t_s \in \mathrm{T}_s \cong \mathbb{Z}\bigl(p^{\sigma_{i_{s-1}}-i_{s-1}+i_s}\bigr)$, то по лемме 9 имеем

$$\mathrm{h}_p\Bigl(\bigotimes^n t_s\Bigr) = n\cdot \mathrm{h}_p(t_s) \tag{11}$$

Из (8), (9), (11) следует, что $\mathrm{h}_p\bigl(\overset{n}{\bigotimes} t_s\bigr) < \mathrm{h}_p\bigl(\overset{n}{\bigotimes} a\bigr)$. Тогда из (10) следует, что $\mathrm{h}_p\bigl(\overset{n}{\bigotimes} g\bigr) < \mathrm{h}_p\bigl(\overset{n}{\bigotimes} a\bigr)$. Но $p^{i_m} g = p^{i_m} a$. Следовательно, $p^{n\, i_m}\bigl(\overset{n}{\bigotimes} g\bigr) =$ $= p^{n\, i_m}\bigl(\overset{n}{\bigotimes} a\bigr)$, и поэтому $\mathrm{h}_p\Bigl(p^{n\, i_m}\bigl(\overset{n}{\bigotimes} g\bigr)\Bigr) = \mathrm{h}_p\Bigl(p^{n\, i_m}\bigl(\overset{n}{\bigotimes} a\bigr)\Bigr)$. Следовательно, p-строка $\mathbb{H}\bigl(\overset{n}{\bigotimes} g\bigr)$ содержит скачки, что противоречит условию. Следовательно, $\sigma_{i_{s-1}} \geqslant i_{s-1} + \frac{1}{n-1}\, i_s$.

Пусть $\sigma_{i_{s-1}} \geqslant i_{s-1}+\frac{1}{n-1}\, i_s$ для любого $s=\overline{1,m}$. Тогда $(n-1)(\sigma_{i_{s-1}}-i_{s-1}) \geqslant i_s$, т. е. $(n-1)\mathrm{h}_p(t_s) \geqslant i_s$ для любого $s=\overline{1,m}$.

Рассмотрим компоненту $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ из разложения $\bigotimes\limits^{n} g$, где $x_j \in \{t_1,\ldots,t_m,a\}$, $j=\overline{1,n}$. Допустим, что среди x_j, $j=\overline{1,n}$, есть хотя бы один множитель из $\{t_1,\ldots,t_m\}$, и пусть r — наименьший среди их индексов. Не теряя общности, можно считать, что $x_1=t_r$. Так как $\mathrm{h}_p(t_r) < \mathrm{h}_p(t_{r+1}) < \ldots < \mathrm{h}_p(t_m) < \mathrm{h}_p(a)$, то $\mathrm{h}_p(x_2 \otimes \ldots \otimes x_n) \geqslant (n-1)\mathrm{h}_p(t_r) \geqslant i_r$. С другой стороны, $\mathrm{o}(t_r)=p^{i_r}$. Поэтому $t_r \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n = 0$. Следовательно, $\bigotimes\limits^{n} g = \bigotimes\limits^{n} a$. Поэтому $\mathbb{H}\big(\bigotimes\limits^{n} g\big)$ и $\mathbb{H}\big(\bigotimes\limits^{n} a\big)$ совпадают. Тогда из (8) следует, что p-строка $\mathbb{H}\big(\bigotimes\limits^{n} g\big)$ не содержит скачков и содержит только целые числа. □

Лемма 14. *Пусть A, B — смешанные группы, Γ — произвольное подмножество множества простых чисел. Тогда*

$$A/\mathrm{T}_\Gamma(A) \otimes B/\mathrm{T}_\Gamma(B) \cong (A \otimes B)/\mathrm{T}_\Gamma(A \otimes B).$$

Доказательство. В [2, теорема 60.3] доказано, что если

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0, \quad A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C' \to 0 \text{ —}$$

точные последовательности, то существует такой гомоморфизм ξ, что последовательность

$$(A \otimes B') \oplus (B \otimes A') \xrightarrow{\xi} B \otimes B' \xrightarrow{\beta\otimes\beta'} C \otimes C' \to 0$$

также точна.

Так как последовательности

$$\mathrm{T}_\Gamma(A) \to A \to A/\mathrm{T}_\Gamma(A) \to 0, \quad \mathrm{T}_\Gamma(B) \to B \to B/\mathrm{T}_\Gamma(B) \to 0$$

точные, то существует такой гомоморфизм ξ, что последовательность

$$A \otimes \mathrm{T}_\Gamma(B) \oplus B \otimes \mathrm{T}_\Gamma(A) \xrightarrow{\xi} A \otimes B \to A/\mathrm{T}_\Gamma(A) \otimes B/\mathrm{T}_\Gamma(B) \to 0$$

точна. Следовательно,

$$(A \otimes B)/\operatorname{Im}\xi \cong A/\mathrm{T}_\Gamma(A) \otimes B/\mathrm{T}_\Gamma(B).$$

Тогда $\mathrm{T}_p\big((A \otimes B)/\operatorname{Im}\xi\big) = 0$ для любого $p \in \Gamma$. С другой стороны, пусть $\Lambda = \{p \mid \mathrm{T}_p(\operatorname{Im}\xi) \neq 0\}$. Тогда $\mathrm{T}_p\big(A \otimes \mathrm{T}_\Gamma(B) \oplus B \otimes \mathrm{T}_\Gamma(A)\big) \neq 0$. Поэтому $p \in \Gamma$. Следовательно, $\Lambda \subset \Gamma$.

Таким образом,

$$\operatorname{Im}\xi \cong (A \otimes B)/\mathrm{T}_\Gamma(A \otimes B),$$

и поэтому

$$A/\mathrm{T}_\Gamma(A) \otimes B/\mathrm{T}_\Gamma(B) \cong (A \otimes B)/\mathrm{T}_\Gamma(A \otimes B). \qquad \square$$

Следствие 15. *Пусть A — смешанная группа, $n \in \mathbb{N}$, Γ — некоторая совокупность простых чисел. Тогда*

$$\bigotimes^{n}(A/\mathrm{T}_\Gamma(A)) \cong \Big(\bigotimes^{n} A\Big)/\,\mathrm{T}_\Gamma\Big(\bigotimes^{n} A\Big).$$

Будем использовать следующую теорему.

Теорема 16 [6]. *Пусть G — счётная редуцированная смешанная группа ранга без кручения 1. Тогда группа G расщепляется тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) *почти каждая строка $\mathbb{H}(G)$ не имеет скачков*;
2) *никакая строка $\mathbb{H}(G)$ не имеет бесконечно много скачков*;
3) *строка $\mathbb{H}(G)$, содержащая не только целые числа, обязательно содержит и знак ∞.*

Теорема 17. *Пусть G — счётная редуцированная смешанная группа ранга без кручения 1, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) $\overset{n}{\bigotimes} G$ *расщепляется*;
2) $\mathbb{H}(G)$ *удовлетворяет условиям* $(*_\mathbb{Z})$ *и* $(*_\infty)$ *для* n.

Доказательство. 1. Если условие $(*_\mathbb{Z})$ не выполняется для n, то из леммы 13 следует, что $\overset{n}{\bigotimes} G$ имеет бесконечно много строк, содержащих скачки. Так как тензорные степени группы ранга без кручения 1 также является группами ранга без кручения 1, то по теореме 16 $\overset{n}{\bigotimes} G$ не расщепляется.

2. Если условие $(*_\mathbb{Z})$ выполняется для n, то из леммы 13 следует, что для почти всех $p \in \mathbb{P}_\mathbb{Z}$ p-строки матрицы $\mathbb{H}(\overset{n}{\bigotimes} G)$ не содержат скачков и содержат только целые числа.

По лемме 10 $\mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}(\overset{n}{\bigotimes} G)$ выделяется прямым слагаемым в $\overset{n}{\bigotimes} G$, т. е.

$$\overset{n}{\bigotimes} G \cong \mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}\Big(\overset{n}{\bigotimes} G\Big) \oplus \Big(\overset{n}{\bigotimes} G\Big) / \,\mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}\Big(\overset{n}{\bigotimes} G\Big).$$

По следствию 15 имеем

$$\overset{n}{\bigotimes} G \cong \mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}\Big(\overset{n}{\bigotimes} G\Big) \oplus \Big(\overset{n}{\bigotimes}(G/\mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}(G))\Big) = \mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}\Big(\overset{n}{\bigotimes} G\Big) \oplus \Big(\overset{n}{\bigotimes} \bar{G}\Big),$$

где $\bar{G} = G/\mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}(G)$. Легко убедиться, что $G/\mathrm{T}(G) \cong \bar{G}/\mathrm{T}(\bar{G})$. Тогда по следствию 15 имеем

$$\Big(\overset{n}{\bigotimes} \bar{G}\Big) / \,\mathrm{T}\Big(\overset{n}{\bigotimes} \bar{G}\Big) \cong \overset{n}{\bigotimes}(\bar{G}/\mathrm{T}(\bar{G})) \cong \overset{n}{\bigotimes}(G/\mathrm{T}(G)) \cong \Big(\overset{n}{\bigotimes} G\Big) / \,\mathrm{T}\Big(\overset{n}{\bigotimes} G\Big)$$

и

$$\mathrm{T}\Big(\overset{n}{\bigotimes} \bar{G}\Big) \cong \mathrm{T}\Big(\overset{n}{\bigotimes}(G/\mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}(G))\Big) \cong \mathrm{T}\Big(\Big(\overset{n}{\bigotimes} G\Big) / \,\mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}\Big(\overset{n}{\bigotimes} G\Big)\Big) \cong \mathrm{T}_{\mathbb{P}_\infty}\Big(\overset{n}{\bigotimes} G\Big).$$

Если $\overset{n}{\bigotimes} \bar{G}$ расщепляется, то

$$\overset{n}{\bigotimes} \bar{G} \cong \mathrm{T}\Big(\overset{n}{\bigotimes} \bar{G}\Big) \oplus \Big(\overset{n}{\bigotimes} \bar{G}\Big) / \,\mathrm{T}\Big(\overset{n}{\bigotimes} \bar{G}\Big) \cong \mathrm{T}_{\mathbb{P}_\infty}\Big(\overset{n}{\bigotimes} G\Big) \oplus \Big(\overset{n}{\bigotimes} G\Big) / \,\mathrm{T}\Big(\overset{n}{\bigotimes} G\Big).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\bigotimes^n G &\cong \mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}\Big(\bigotimes^n G\Big) \oplus \Big(\bigotimes^n \bar{G}\Big) \cong \\ &\cong \mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}\Big(\bigotimes^n G\Big) \oplus \mathrm{T}_{\mathbb{P}_\infty}\Big(\bigotimes^n G\Big) \oplus \Big(\bigotimes^n G\Big)\Big/\,\mathrm{T}\Big(\bigotimes^n G\Big) \cong \\ &\cong \mathrm{T}\Big(\bigotimes^n G\Big) \oplus \Big(\bigotimes^n G\Big)\Big/\,\mathrm{T}\Big(\bigotimes^n G\Big),\end{aligned}$$

т. е. $\bigotimes^n G$ расщепляется.

Если $\bigotimes^n G$ расщепляется, то

$$\begin{aligned}\bigotimes^n G &\cong \mathrm{T}\Big(\bigotimes^n G\Big) \oplus \Big(\bigotimes^n G\Big)\Big/\,\mathrm{T}\Big(\bigotimes^n G\Big) \cong \\ &\cong \mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}\Big(\bigotimes^n G\Big) \oplus \mathrm{T}_{\mathbb{P}_\infty}\Big(\bigotimes^n G\Big) \oplus \Big(\bigotimes^n G\Big)\Big/\,\mathrm{T}\Big(\bigotimes^n G\Big) \cong \\ &\cong \mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}\Big(\bigotimes^n G\Big) \oplus \mathrm{T}\Big(\bigotimes^n \bar{G}\Big) \oplus \Big(\bigotimes^n \bar{G}\Big)\Big/\,\mathrm{T}\Big(\bigotimes^n \bar{G}\Big).\end{aligned}$$

С другой стороны, если

$$\bigotimes^n G \cong \mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}\Big(\bigotimes^n G\Big) \oplus \Big(\bigotimes^n \bar{G}\Big),$$

то

$$\bigotimes^n \bar{G} \cong \mathrm{T}\Big(\bigotimes^n \bar{G}\Big) \oplus \Big(\bigotimes^n \bar{G}\Big)\Big/\,\mathrm{T}\Big(\bigotimes^n \bar{G}\Big).$$

Таким образом, $\bigotimes^n G$ расщепляется тогда и только тогда, когда расщепляется $\bigotimes^n \bar{G}$.

Так как $\bar{G} = G/\mathrm{T}_{\mathbb{P}_\mathbb{Z}}(G)$, то все p-строки, $p \in \mathbb{P}_\infty$, матриц $\mathbb{H}(G)$ и $\mathbb{H}(\bar{G})$ одинаковы, т. е. $\mathbb{H}(G)$ и $\mathbb{H}(\bar{G})$ удовлетворяют или не удовлетворяют условию $(*_\infty)$ одновременно. Кроме того, ясно, что все простые числа p, для которых $\mathrm{T}_p(\bar{G}) \neq 0$, принадлежат $\mathbb{P}_\infty$. Поэтому по лемме 3 фактор-группа $\bar{G}/\mathrm{T}(\bar{G})$ является p-делимой для всех таких p. Следовательно, $\bar{G} \in \mathbb{C}$. Эти рассуждения и теорема 6 дают, что

$$\begin{aligned}\bigotimes^n G \text{ расщепляется } &\Longleftrightarrow \bigotimes^n \bar{G} \text{ расщепляется } \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \mathbb{H}(\bar{G}) \text{ удовлетворяет условию } (*_\infty) \text{ для } n \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \mathbb{H}(G) \text{ удовлетворяет условию } (*_\infty) \text{ для } n.\end{aligned}$$

□

Теорема 18. *Пусть G — счётная редуцированная смешанная группа ранга без кручения 1, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) $l(G) \leqslant n$;
2) $\mathbb{H}(G)$ *удовлетворяет условиям* $(*_\mathbb{Z})$ *и* $(*_\infty)$ *для* n.

Доказательство. Легко убедиться, что если $\mathbb{H}(G)$ удовлетворяет условиям $(*_{\mathbb{Z}})$ и $(*_{\infty})$ для n, то $\mathbb{H}(G)$ также удовлетворяет условиям $(*_{\mathbb{Z}})$ и $(*_{\infty})$ для любого целого положительного числа m, большего n, т. е. если $\overset{n}{\bigotimes} G$ расщепляется, то $\overset{m}{\bigotimes} G$ расщепляется для всякого $m \geqslant n$. Следовательно, условие $l(G) \leqslant n$ эквивалентно тому, что $\overset{n}{\bigotimes} G$ расщепляется. Доказательство завершает применение теоремы 17. □

Литература

[1] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Мат. сб. — 1941. — Т. 9. — С. 165—182.

[2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974.

[3] Fuchs L. Notes on Abelian groups. I, II. — Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. — 1959. — Vol. 2. — P. 5—23; Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1960. — Vol. 11. — P. 117—125.

[4] Irwin J. M., Khabbaz S. A., Rayna G. The role of the tensor product in the splitting of Abelian groups // J. Algebra. — 1970. — Vol. 14. — P. 423—422.

[5] Lawver D. A., Toubassi E. H. Tensor products and the splitting of Abelian groups // Can. J. Math. — 1971. — Vol. 23, no. 5. — P. 764—770.

[6] Megibben C. On mixed groups of torsion-free rank one // Illinois J. Math. — 1967. — Vol. 11. — P. 134—144.

[7] Rotman J. Torsion-free and mixed Abelian groups // Illinois J. Math. — 1961. — Vol. 5. — P. 131—143.

[8] Toubassi E. H., Lawver D. A. Height-slope and splitting length of Abelian groups // Publ. Math. Debrecen. — 1973. — Vol. 20. — P. 63—71.