Сильно непрерывные полугруппы операторов, порождённые системами псевдодифференциальных операторов в L_p-пространствах с весом

К. Х. БОЙМАТОВ

И. Е. ЕГОРОВ
Институт математики
Якутского государственного университета им. М. К. Аммосова

М. Г. ГАДОЕВ
Мирнинский политехнический институт (филиал)
Якутского государственного университета им. М. К. Аммосова
e-mail: gadoev@rambler.ru

УДК 517.946

Ключевые слова: полугруппа, псевдодифференциальный оператор, компактное многообразие, интегральное представление, инфинитезимальный производящий оператор, асимптотика спектра.

Аннотация

В статье исследуются полугруппы операторов, порождённые псевдодифференциальными операторами в весовых L_p-пространствах вектор-функций, заданных в $\mathbb{R}^n$ (или на компактном многообразии без края). Получены достаточные условия сильной непрерывности и аналитичности полугруппы; найдены условия вполне непрерывности полугруппы и исследовано распределение собственных значений её инфинитезимального производящего оператора. Установлено интегральное представление, выделяющее главный член полугруппы при $t \to 0+$.

Abstract

K. Kh. Boimatov, I. E. Egorov, M. G. Gadoev, Strongly continuous semigroups of operators generated by systems of pseudodifferential operators in weighted L_p-spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 8, pp. 3—54.

The paper considers semigroups of operators generated by pseudodifferential operators in weighted L_p-spaces of vector functions on $\mathbb{R}^n$ (or on a compact manifold without boundary). Sufficient conditions for a semigroup to be strongly continuous and analytic are obtained, conditions for it to be completely continuous are found, and the distribution of the eigenvalues of its infinitesimal generator is examined. Also, an integral representation that singles out the principal term of the semigroup as $t \to 0+$ is established.

1. Введение

1. Пусть $k(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ — весовая функция в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}_{p,k}$, $1 \leqslant p < +\infty$, — пространство вектор-функций $u(x) = \big(u_1(x), \ldots, u_l(x)\big)'$ с конечной нормой

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 8, с. 3—54.

$$|u|_{\mathcal{H}_{p,k}} = \left(\sum_{j=1}^{l} \int\limits_{\mathbb{R}^n} k^p(x) |u_j(x)|^p_{C^l} \, dx \right)^{1/p}.$$

Для $p = +\infty$ пространство $\mathcal{H}_{p,k}$ определяется как пространство вектор-функций $u(x)$ с конечной нормой

$$|u|_{\mathcal{H}_{\infty,k}} = \max_{j=1,\dots,l} \Big\{ \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |k(x) u_j(x)| \Big\}.$$

При $k(x) \equiv 1$ знак k в этих обозначениях опускается.

Обозначим через $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, замыкание линейного многообразия $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$ в пространстве $\mathcal{H}_{p,k}$. Очевидно, что $\mathcal{H}_{p,k} = \mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, $1 \leqslant p < +\infty$. Пространство $\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}$ состоит из непрерывных вектор-функций $u(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, таких что $k(x)|u(x)| = o(1)$, $x \to \infty$.

Для удобства изложения мы будем пользоваться также обозначением $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$ вместо $\mathcal{H}_{p,k}$ в случае $1 \leqslant p < +\infty$.

В статье изучаются сильно непрерывные полугруппы в $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, порождённые оператором $-\mathcal{A}_{p,k}$, где $\mathcal{A}_{p,k}$ — замыкание в $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$ псевдодифференциального оператора с τ-символом

$$(A_0 u)(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)} a(\tau x + (1-\tau) y, s) u(y) \, dy \right) ds,$$
$$D(A_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

При выполнении условий (1.1), (1.2), сформулированных ниже, можно показать (см. [7, лемма 4.2]), что для $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$ справедлива оценка

$$|(A_0 u)(x)| \leqslant M_{u,N} (1 + |x|)^{-N} \quad \text{для всех} \quad N > 0.$$

Предположим, что

$$a(x, s) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \operatorname{End} \mathbf{C}^l)$$

и символ $a(x, s)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$(1 + |s|)^\varepsilon \leqslant M a'(x, s), \tag{1.1}$$

$$|D_s^\alpha D_x^\beta a(x, s)| \leqslant M_{\alpha\beta} a'(x, s)^{1-\theta|\alpha|}, \quad \alpha + \beta \neq 0, \tag{1.2}$$

где $a'(x, s)$ обозначает нижнюю грань матрицы $\operatorname{Re} a(x, s)$, $\varepsilon, \theta > 0$,

$$D_x = \left(\frac{\partial}{i\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{i\partial x_n} \right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

В [11] анонсирован результат, утверждающий, что при выполнении условий (1.1), (1.2) псевдодифференциальный оператор A_2 есть квази-m-аккретивный оператор в $\mathcal{H}_2$. В [11] также получено интегральное представление для e^{-tA_2}, $0 < t < T$, выделяющее главный член полугруппы, при $t \to 0+$. Подробное доказательство этих результатов приведено в данной работе в разделах 2—4.

Отметим, что в литературе подробно изучены условия полуограниченности и самосопряжённости дифференциальных и псевдодифференциальных операторов (см. [1, 4, 12, 26, 30] и приведённые в этих работах списки литературы). Вопросы исследования условий m-аккретивности дифференциальных и псевдодифференциальных операторов оставались как бы в стороне. Некоторые достаточные условия m-секториальности дифференциальных операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$ можно найти в [10].

2. Пусть выполнено неравенство

$$|s|^{|\gamma|}|D_s^{\alpha+\gamma}D_x^{\beta}a(x,s)| \leqslant M_{\alpha,\beta}a'(x,s)^{1-\theta|\alpha|}, \quad 0<|\gamma|\leqslant n. \tag{1.3}$$

Для весовой функции $k(x)\in C(\mathbb{R}^n)$ всюду в дальнейшем предполагается выполнение условия

$$\frac{k(x)}{k(y)} \leqslant M(1+|x-y|^N), \quad x,y\in\mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

где $M, N>0$ — достаточно большие числа. Заметим, что если выполнено условие (1.4), то справедливы неравенства

$$c_1(1+|x|)^{-N}\leqslant k(x)\leqslant c_2(1+|x|)^N,$$
$$c_1'k(x)\leqslant k(y)\leqslant c_2'k(x) \quad \text{для} \quad |x-y|<1.$$

Произведение $k(x)$ функций $k_1,\ldots,k_\nu$, удовлетворяющих условию вида (1.4), также удовлетворяют условию вида (1.4). Если $k(x)$ удовлетворяет условию (1.4), то функция $k^\rho(x)$, $\rho\in\mathbb{R}$, также удовлетворяет условию вида (1.4). Наконец, отметим, что условие (1.4) выполняется для степенно-логарифмической функции

$$k(x)=\{\ln(3+|x|)\}^{\delta_1}(1+|x|)^{\delta_2}, \quad \delta_1,\delta_2\in\mathbb{R}.$$

Предположим, что выполнено следующее условие:

Если $p=1$ или $p=+\infty$, то семейство вектор-функций

$$\Omega_{\eta,t}(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{isx}e^{-ta(\eta,s)}\,ds, \quad 0<t<1, \quad \eta\in\mathbb{R}^n,$$

образует ограниченное множество в пространстве $\mathcal{H}_1$. (1.5)

Пусть B_η обозначает замыкание в $L_1(\mathbb{R}^n)^l$ псевдодифференциального оператора $\mathring{B}_\eta$ с «постоянным» символом:

$$\mathring{B}_\eta u=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)}a(\eta,s)u(y)\,dy\biggr)ds, \quad D(\mathring{B}_\eta)=C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l.$$

Тогда условие (1.5) эквивалентно тому, что оператор $-B_\eta$ порождает сильно непрерывную полугруппу операторов e^{-tB_η} в $\mathcal{H}_1$, равномерно ограниченную по $\eta\in\mathbb{R}^n$, $0<t<1$. Аналогичное утверждение имеет место для $0<p<+\infty$ и выводится из условий (1.1)—(1.3).

В теореме 3.1 доказано, что при выполнении условий (1.1)—(1.5) оператор $-\mathcal{A}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, порождает сильно непрерывную полугруппу операторов в пространстве $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$. При некоторых дополнительных условиях в теореме 3.2 установлена аналитичность полугруппы $e^{-z\mathcal{A}_{p,k}}$ в угле.

Отметим, что эти утверждения не обобщаются на пространство $\mathcal{H}_{\infty,k}$ (т. е. если заменить в них $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$ на $\mathcal{H}_{p,k}$, то соответствующие утверждения в случае $p = +\infty$ будут неверными). В этом нетрудно убедиться на примере уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad u|_{t=0} = g,$$

функция Грина которого вычисляется в явном виде:

$$J(t;x;y) = 4(\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}.$$

На этом же примере легко проверить, что теоремы 3.1, 3.2 не имеют места также и для пространства $\mathcal{H}'_{\infty,k}$ — замыкания $C^\infty(\mathbb{R}^n)^l \cap \mathcal{H}_{\infty,k}$ в $\mathcal{H}_{\infty,k}$.

3. Введём в рассмотрение так же, как в [7, п. 4.1], функции $\theta_i(t)$, $\psi_{ij}(x)$, $\varphi_{ij}(x)$, $i,j = 1,2,\ldots$, обладающие следующими свойствами. Функция θ_i принадлежит классу $C_0^\infty(2^{-i-1}, 2^{-i+1})$ и удовлетворяет неравенствам

$$\sup_{j=1,2,\ldots} t|\theta_i'(t)| \leqslant M, \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \theta_i(t) \equiv 1, \quad 0 < t < \frac{1}{2}.$$

Функции $\psi_{ij}(x), \varphi_{ij}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ неотрицательные, функция $\psi_{ij}(x)$ обращается в 1 в некоторой окрестности $\operatorname{supp}\varphi_{ij}$. Далее,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \varphi_{ij}(x) \equiv 1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1,2,\ldots,$$

и для некоторого фиксированного, наперёд заданного достаточно малого числа $\nu > 0$ выполняются неравенства

$$|\operatorname{diam}\operatorname{supp}\psi_{ij}| \leqslant M 2^{-\nu i}, \quad |D_x^\alpha \psi_{ij}(x)| \leqslant M_\alpha 2^{\nu|\alpha| i}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Обозначим через $J_{ij}(z)$, $\operatorname{Re} z > 0$, интегральный оператор в $\mathbb{R}^n$ с ядром

$$J_{ij}(z;x;y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)} e^{-za(x_{ij},s)}\, ds,$$

где $x_{ij} \in \operatorname{supp}\varphi_{ij}$ — фиксированные точки. Положим

$$J(z) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \theta_i(\operatorname{Re} z)\psi_{ij} J_{ij}(z)\varphi_{ij}, \quad 0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2},$$

где ψ_{ij}, φ_{ij} обозначают операторы умножения на функции $\psi_{ij}(x)$, $\varphi_{ij}(x)$ соответственно.

В теореме 3.1 при надлежащем выборе чисел $\nu, T > 0$ получена формула

$$e^{-t\mathcal{A}_{p,k}} = J(t) + (J * \Phi)(t), \tag{1.6}$$

выделяющая главный член полугруппы $e^{-t\mathcal{A}_{p,k}}$ при $t \to 0+$. Установлено, что операторная функция $\Phi(t)$ удовлетворяет оценке

$$\|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M|t|^{-\kappa}, \quad t \in S', \quad |t| < T, \tag{1.7}$$

где $\kappa \in (0,1)$. Аналогичное представление, выделяющее главный член $e^{-z\mathcal{A}_{p,k}}$ в виде $J(z)$ ($\operatorname{Re} z \to 0+$) при дополнительных ограничениях, получено в теореме 3.2 для комплекснозначных z, изменяющихся в угле.

Таким образом, нами получена конструкция матрицы Грина указанной параболической задачи

$$u'(t,x) = -\mathcal{A}u(t,x), \tag{1.8}$$

$$u(0,x) = g(x).. \tag{1.8$'$}$$

Исследованию матрицы Грина параболической задачи (1.8), (1.8$'$), где $\mathcal{A}$ — эллиптический дифференциальный оператор с ограниченными коэффициентами, посвящено довольно большое число работ. Литературу по данному вопросу можно найти в обзорных работах [14, 15, 28, 32—34].

Случай эллиптического оператора $\mathcal{A}$ с растущими коэффициентами изучался в докторской диссертации А. Г. Костюченко [22] и в его работах [19—21]. Затем в этом направлении были опубликованы работы [5, 6, 8, 9], в которых были рассмотрены самосопряжённые операторы $\mathcal{A}$.

Некоторые аспекты L_p-теории полугрупп, порождённых эллиптическими дифференциальными операторами второго порядка с вещественными коэффициентами, изучались в [17, 18, 27].

Отметим, что если опустить условие (1.3) в случае $p = 2$, утверждения теорем, установленных в данной статье, останутся справедливыми.

4. В разделе 4 изучены условия компактности полугруппы $e^{-t\mathcal{A}_{p,k}}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, и на основании формул (1.6), (1.7) выведена асимптотическая формула, выделяющая главный член функции $N(\lambda) > 0$, $\lambda > 0$, распределения собственных значений оператора $\mathcal{A}_{p,k}$, при $\lambda \to \infty$. В случае $p = 2$, $k(x) \equiv 1$ новизна этого результата заключается в том, что речь идёт о квази-m-аккретивных псевдодифференциальных операторах, тогда как исследования, проведённые в [7], соответствуют случаю самосопряжённого псевдодифференциального оператора с $\frac{1}{2}$-символом (т. е. с символом Вейля).

Для самосопряжённых псевдодифференциальных операторов в $\mathcal{H}_2$ в разделе 4 данной работы получена асимптотика взвешенного следа.

5. В разделе 5 исследованы псевдодифференциальные операторы на компактных многообразиях без края. Для них установлены такие же результаты, как в случае $\mathbb{R}^n$. Некоторые из результатов раздела 5 ранее были анонсированы в [13].

2. Оценки норм некоторых интегральных операторов

В этом разделе будут получены оценки норм некоторых вспомогательных операторов в пространстве $\mathcal{H}_p = L_p(\mathbb{R}^n)^l$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

1. Через $\mathbf{C}^l_p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, обозначим пространство $\mathbf{C}^l$ векторов-столбцов $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_l)'$, $\xi_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, \ldots, l$, с нормой

$$|\xi|_{(p)} = \left(\sum_{i=1}^{l} |\xi_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty;$$

при $p = +\infty$

$$|\xi|_{(p)} = \max_{i=1,\ldots,l} |\xi_i|.$$

Обозначим через $|a|_{(p)}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, где $a \in \operatorname{End} \mathbf{C}^l$, норму

$$|a|_p = \sup_{|\xi|_p = 1} |a\xi|_p.$$

Очевидно, что

$$|a|_{(p)} \leqslant c|a|_{(q)}, \quad |\xi|_{(p)} \leqslant c|\xi|_{(q)},$$

где число $c = c_l$ не зависит от $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$.

При оценке норм интегральных операторов мы иногда будем пользоваться следующей простой леммой.

Лемма 2.1. *Пусть T — интегральный оператор в $\mathcal{H}_p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, с ядром $T(x, y)$ и*

$$M_1 = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |T(x, y)|_{(p)}\, dx < +\infty,$$

$$M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |T(x, y)|_{(p)}\, dy < +\infty.$$

Тогда $T \colon \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_p$ — ограниченный оператор и его норма не превосходит величины $\frac{1}{p}M_1 + \frac{1}{q}M_2$.

Доказательство. Очевидно, что если $|u|_{\mathcal{H}_p} = |v|_{\mathcal{H}_p} = 1$, $1 < p < +\infty$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\langle T(x, y)u(y), v(x)\rangle_{\mathbf{C}^l}|\, dx\, dy \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |T(x, y)|_{(p)} |u(y)|_{(p)} |v(x)|_{(q)}\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |T(x, y)|_{(p)} \left(\frac{|u(y)|^p_{(p)}}{p} + \frac{|v(x)|^q_{(q)}}{q} \right) dx\, dy \leqslant \frac{1}{p}M_1 + \frac{1}{q}M_2.$$

Учитывая произвольность нормированных элементов $u \in \mathcal{H}_p$, $v \in \mathcal{H}_q$, находим, что

$$\|T\|_{\mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_p} \leqslant \frac{1}{p} M_1 + \frac{1}{q} M_2,$$

что и доказывает лемму. Случаи $p = 1$, $p = +\infty$ ещё проще. □

2. Для интегрального оператора T в $\mathcal{H}_p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, ядро которого удовлетворяет условиям леммы 2.1, введём следующее обозначение:

$$\|T\|_{\langle p \rangle} = \frac{1}{p} M_1 + \frac{1}{q} M_2.$$

Рассмотрим оператор T вида

$$T = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \tilde{\theta}_i(t) \chi_{ij} T_{ij} \chi_{ij}, \quad 0 < t < t_0,$$

где $T_{ij} = T_{ij}(t)$ — интегральные операторы, а $\tilde{\theta}_i(t)$, $\chi_{ij}(x)$ — характеристические функции множеств $\operatorname{supp} \theta_i$, $\operatorname{supp} \tilde{\psi}_{ij}$ соответственно.

Функция $\tilde{\psi}_{ij}(x)$ определяется формулой

$$\tilde{\psi}_{ij}(x) = \sum\nolimits' \varphi_{ik}(x),$$

где суммирование $\sum'$ происходит по тем k, для которых $\psi_{ij}(x)\psi_{ik}(x) \not\equiv 0$. Легко показать, что кратность покрытия

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \operatorname{supp} \tilde{\psi}_{ij}$$

является конечной и не зависит от i, справедлива оценка

$$|D_x^\alpha \tilde{\psi}_{ij}(x)| \leqslant M_\alpha 2^{i\nu|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

и функция $\tilde{\psi}_{ij}$ обращается в 1 в некоторой $c2^{-i\nu}$-окрестности множества $\operatorname{supp} \varphi_{ij}$, $c > 0$.

Лемма 2.2. *Имеет место оценка*

$$\|T\|_{\langle p \rangle} \leqslant c \sup_{i,j=1,2,\ldots} \tilde{\theta}_i(t) \|\chi_{ij} T_{ij} \chi_{ij}\|_{\langle p \rangle}, \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty,$$

если правая часть этого неравенства конечна. Число c зависит только от кратности Λ покрытия

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \operatorname{supp} \tilde{\psi}_{ij},$$

т. е. только от числа n. (*Число Λ от i не зависит.*)

Доказательство. Обозначив через $T(x,y)$, $T_{ij}(x,y)$ ядра операторов T, T_{ij} соответственно, находим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |T(x,y)|_{(p)}\,dy \leqslant \sum_{i,j=1}^{+\infty} \tilde{\theta}_i(t)\chi_{ij}(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} |T_{ij}(x,y)|_{(p)}\chi_{ij}(y)\,dy.$$

Для фиксированного t неравенство $\tilde{\theta}_i(t) \neq 0$ выполняется только для двух индексов i, а неравенство $\chi_{ij} \neq 0$ может иметь место только для не более Λ индексов j. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |T(x,y)|_{(p)}\,dy \leqslant 2\Lambda \sup_{i,j=1,2,\ldots} \tilde{\theta}_i(t)\chi_{ij}(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} |T_{ij}(x,y)\chi_{ij}(y)|_{(p)}\,dy.$$

Аналогичное неравенство получается также при интегрировании по $x \in \mathbb{R}^n$. Переходя в полученных неравенствах к их «верхним граням» по $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$ соответственно, получим утверждение леммы. □

3. Пусть $k(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ — весовая функция, удовлетворяющая условию (1.4). Для интегрального оператора T (с ядром $T(x,y)$) выполняется равенство

$$\|T\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} = \|kTk^{-1}\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p}.$$

Из (1.4) для $|x-y| < c$ следует неравенство

$$k(x) \leqslant M'k(y), \quad k(y) \leqslant M'k(x),$$

где $M' = M'(c) > 0$. Поэтому

$$\chi_{ij}(x)k(x)\chi_{ij}(y)k^{-1}(y) \leqslant M''.$$

Из лемм 2.1, 2.2 нетрудно вывести, что в условиях леммы 2.2 имеет место неравенство

$$\|T\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant c \sup_{i,j=1,2,\ldots} \tilde{\theta}_i(t)|\chi_{ij}T_{ij}\chi_{ij}|_{\langle p\rangle}, \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty, \tag{2.1}$$

если правая часть этого неравенства конечна.

Лемма 2.3. *Для оператора T вида*

$$T = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \tilde{\theta}_i(t)\chi_{ij}T_{ij}\chi_{ij}$$

верна оценка

$$\|T\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p} \leqslant M \sup_{i,j=1,2,\ldots} \|\chi_{ij}T_{ij}\chi_{ij}\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p},$$

где число M зависит только от n.

Доказательство такое же, как в [10, лемма 2.2].

4. Рассмотрим матричную функцию $\gamma(t,s) = e^{-ta(s)}$, $0 < t < t_0$, где $a(s) \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \operatorname{End}\mathbf{C}^l)$ — матричная функция, $\operatorname{Re} a(s) \geqslant c'I > -\infty$ $(s \in \mathbb{R}^n)$. Пусть

$\operatorname{Re} a(s) \geqslant a'(s)I \geqslant c'I$, где $a'(s)$ — скалярная функция. Согласно следствию из теоремы Хилле—Иосиды (см. [24, с. 487—488]) получим, что

$$|e^{-ta(s)}|_{(2)} \leqslant e^{-ta'(s)}.$$

В дальнейшем в обозначении $|b|_{(2)}$, где b — $(l \times l)$-матрица, нижний индекс будет опускаться. Отметим, что $c_1|b| < |b|_{(p)} \leqslant c_2|b|$, где числа $c_1, c_2 > 0$ зависят только от l.

Лемма 2.4. *Имеет место оценка*

$$|D_s^\beta e^{-ta(s)}| \leqslant Me^{-ta'(s)} \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_r=\beta} C_{\{\beta_1,\ldots,\beta_r\}}\{t|D_s^{\beta_1}a(s)|\}\cdots\{t|D_s^{\beta_r}a(s)|\}.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial s_i}e^{-ta(s)} = \int_0^t e^{-(t-\tau)a(s)}\,\frac{\partial a(s)}{\partial s_i}e^{-\tau a(s)}\,d\tau = \gamma * \left(\frac{\partial a(s)}{\partial s_i}\gamma\right).$$

Продолжая дифференцирование, находим, что $D_s^\beta a(s)$ есть линейная комбинация функций вида

$$Q_{\{\beta_1,\ldots,\beta_r\}}(s) = \gamma * (D_s^{\beta_1}a(s)\gamma) * \ldots * (D_s^{\beta_r}a(s)\gamma), \quad \beta_1+\ldots+\beta_r=\beta.$$

Если эту функцию записать в виде многократного интеграла и затем заменить все $D_s^{\beta_\nu}a(s)$ на $|D_s^{\beta_\nu}a(s)|$ и вынести их из-под знаков интегралов, предварительно заменив в «элементах» $a(s)$ на $a'(s)$, приходим к неравенству

$$|Q_{\{\beta_1,\ldots,\beta_r\}}(s)| \leqslant \frac{1}{r!}t^r e^{-ta'(s)}\prod_{\nu=1}^r |D_s^{\beta_\nu}a(s)|,$$

которое доказывает лемму. □

5. Пусть A — псевдодифференциальный оператор, заданный по формуле

$$(Au)(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)}a\big((1-\tau)x+\tau y, s\big)u(y)\,dy\,ds, \qquad u \in S(\mathbb{R}^n)^l,\quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

Здесь и далее $S(\mathbb{R}^n)$ обозначает пространство Шварца функций $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих оценке

$$|D_x^\alpha u(x)| \leqslant M_{\alpha,u,N}(1+|x|)^{-N} \text{ для всех } \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\quad N > 0.$$

Приведённый выше интеграл регуляризуется с использованием формулы Тейлора:

$$a(\tau x+(1-\tau)y, s) = \sum_{|a|<N} C_\alpha \tau^{|\alpha|}(x-y)^\alpha a_\alpha(x,s) + \\ + \sum_{|\alpha|=N} C_\alpha (x-y)^\alpha \tau^{|\alpha|}\int_0^1 a_\alpha(x+z\tau(y-x), s)(1-z)^{N-1}\,dz.$$

Интеграл

$$\iint e^{is(x-y)}(x-y)^\alpha a_\alpha(x,s)u(y)\,dy\,ds$$

регуляризуется по стандартной схеме теории псевдодифференциальных операторов и равен

$$(-1)^{|\alpha|}\int e^{isx}a_\alpha^\alpha(x,s)\tilde{u}(s)\,ds,$$

где тильда обозначает преобразование Фурье,

$$a_\beta^\alpha(x,s)=D_x^\beta D_s^\alpha a(x,s).$$

Используя, что при достаточно большом $N>0$

$$|a_\alpha^\alpha(x+z\tau(y-x),s)|\leqslant M_\alpha(1+|s|)^{-2n},\quad |\alpha|=N,$$

устанавливаем абсолютную сходимость интеграла

$$\int_0^1\int_{\mathbb{R}_n}\int_{\mathbb{R}_n} e^{is(x-y)}a_\alpha^\alpha(x+z\tau(y-z),s)u(y)\,dy\,ds\,dz.$$

Через A_0 обозначим сужение оператора A на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$.

Рассмотрим символ $a(x,s)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n;\operatorname{End}\mathbf{C}^l)$. Предположим, что выполнены условия (1.1)—(1.5). Пусть θ_i, ψ_{ij}, $\tilde{\psi}_{ij}$, φ_{ij} — такие же функции, как в разделе 1, а $\tilde{\psi}_{ij}(x)$ — такая же функция, как в п. 2 раздела 2. Введём, как в разделе 1, оператор

$$J(t)=\sum_{i=1}^{+\infty}\theta_i(t)\psi_{ij}J_{ij}(t)\varphi_{ij},\quad 0<t<\frac{1}{2},$$

где $J_{ij}(t)$ — интегральный оператор в $\mathbb{R}^n$ с ядром

$$J_{ij}(t,x,y)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)}e^{-ta(x_{ij},s)}\,ds,\quad x,y\in\mathbb{R}^n,$$

а $x_{ij}\in\operatorname{supp}\varphi_{ij}$ — фиксированные точки.

Мы в дальнейшем часто без дополнительной оговорки будем пользоваться следующими неравенствами для $t\in\operatorname{supp}\theta_i$:

$$|D_x^\alpha\psi_{ij}(x)|+|D_x^\alpha\tilde{\psi}_{ij}(x)|+|D_x^\alpha\varphi_{ij}(x)|\leqslant Mt^{-\nu|\alpha|}\chi_{ij}(x),\quad |x-x_{ij}|\leqslant Mt^\nu.$$

Дальнейшая наша цель в этом разделе заключается в получении оценки нормы в $\mathcal{H}_{p,k}$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, оператора

$$K_0(t)=-\left(\frac{d}{dt}+A_0\right)J(t),\quad D\big(K_0(t)\big)=C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l,\quad 0<t<t_0,$$

при надлежащем выборе чисел ν, t_0.

Так же, как в [7, лемма 4.3], оператор $K_0(t)$ представляется в виде суммы

$$K_0(t) = -I_1(t) - I_2(t) - I_3(t) + I_4(t) + I_5(t),$$

где

$$I_1(t) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \theta_i(t)\psi_{ij}(A - A_{ij})J_{ij}(t)\varphi_{ij},$$

$$I_2(t) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \theta_i(t)[A, \psi_{ij}]J_{ij}(t)\varphi_{ij},$$

$$I_3(t) = \sum_{i,j,r,q=1}^{+\infty} \theta_r(t)\theta_i'(t)\psi_{ij}\psi_{rq}\big(J_{ij}(t) - J_{rq}(t)\big)\varphi_{ij}\varphi_{rq},$$

$$I_4(t) = \sum_{i,j,r,q=1}^{+\infty} \theta_r(t)\theta_i'(t)\psi_{ij}[\psi_{rq}, J_{ij}(t)]\varphi_{ij}\varphi_{rq},$$

$$I_5(t) = \sum_{i,j,r,q=1}^{+\infty} \theta_r(t)\theta_i'(t)\psi_{rq}[\psi_{ij}, J_{rq}(t)]\varphi_{ij}\varphi_{rq},$$

а A_{ij} — псевдодифференциальный оператор с символом $a(x_{ij}, s)$. Мы покажем, что операторы $I_j(t)$, $j = 1, \ldots, 5$, по непрерывности продолжаются с $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$ на всё пространство $\mathcal{H}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, и удовлетворяют оценке

$$\|I_j(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{-\kappa}, \quad 0 < t < t_0, \quad j = 1, \ldots, 5, \tag{2.1$'$}$$

где $t_0 > 0$ — достаточно малое число, а числа $\kappa \in (0, 1)$, $M > 0$ от p не зависят.

6. Напомним, что

$$a_\beta^\alpha(x, s) = D_x^\beta D_s^\alpha a(x, s),$$
$$D_x = \left(\frac{\partial}{i\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{i\partial x_n}\right), \quad D_s = \left(\frac{\partial}{i\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial}{i\partial s_n}\right).$$

Ввиду условий (1.1), (1.2) найдётся число $m > 0$, такое что

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} a^\gamma(\eta, s)e^{is(x-y)}\, ds\right| \leqslant M_\gamma, \quad |\gamma| \geqslant m,$$

для всех $\eta, x, y \in \mathbb{R}^n$. Интегрированием по частям находим, что

$$(x - y)^\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} a^\gamma(\eta, s)e^{is(x-y)}\, ds = \int\limits_{\mathbb{R}^n} a^\gamma(\eta, s)D_s^\beta e^{is(x-y)}\, ds =$$
$$= (-1)^{|\beta|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} a^{\gamma+\beta}(\eta, s)e^{is(x-y)}\, ds.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} a^{\gamma}(\eta,s)e^{is(x-y)}\,ds\right| \leqslant M'_{\gamma}|x-y|^{-n\pm1}, \quad |\gamma|\geqslant m.$$

В дальнейшем число $\nu>0$ в определении $J(t)$ будет выбираться следующим образом:

$$\nu m<\frac{1}{4}, \quad \nu<\frac{\theta}{4}.$$

Мы неоднократно будем пользоваться известной формулой

$$(x-y)^{\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)}Q(x,y,s)\,ds=(-1)^{|\beta|}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)}D_s^{\beta}Q(x,y,s)\,ds, \quad |\beta|\leqslant N, \tag{2.2}$$

имеющей место для любой достаточно гладкой матричной функции $Q(x,y,s)$, для которой указанные интегралы абсолютно сходятся (при любом $|\beta|\leqslant N$).

Для любого целого $m>0$ по формуле Тейлора имеем

$$a\big((1-\tau)x+\tau y,s\big)=\sum_{|\alpha|<m}\frac{\tau^{|\alpha|}(y-x)^{\alpha}i^{|\alpha|}}{\alpha!}a_{\alpha}(x,s)+$$
$$+\sum_{|\alpha|=m}\frac{mi^m\tau^m}{\alpha!}(y-x)^{\alpha}\int\limits_0^1 a_{\alpha}(x+z\tau(y-x),s)(1-z)^{m-1}\,dz. \tag{2.3}$$

Согласно формуле (2.2) оператор

$$(Q_{\alpha}^{ij}u)(x)=\psi_{ij}(x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} a_{\alpha}(x,s)(y-x)^{\alpha}e^{is(x-y)}u(y)\,dy\,ds, \quad u\in S(\mathbb{R}^n)^l,$$

можно задавать также равенством

$$(Q_{\alpha}^{ij}u)(x)=\psi_{ij}(x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} a_{\alpha}^{\alpha}(x,s)e^{is(x-y)}u(y)\,dy\,ds.$$

В этом разделе мы оценим норму оператора $I_1(t)$. Согласно условиям (1.1), (1.2) для достаточно большого $m'>0$ имеет место оценка

$$|\psi_{ij}(x)a_{\alpha}^{\gamma}(x,s)|\leqslant M_{ij}(1+|s|)^{m'}, \quad \alpha\neq0, \quad |\gamma|\leqslant m'+m,$$

и поскольку преобразование Фурье элемента из $S(\mathbb{R}^n)^l$ принадлежит этому же классу, то тем самым сходимость соответствующих интегралов при применении формулы (2.2) обоснована.

Пусть $\mathring{T}_{ij}$ — интегральный оператор с ядром

$$\mathring{T}_{ij}(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\bigg(\int\limits_0^1 a_{\alpha}^{\alpha}(x+\tau z(y-x),s)(1-z)^{m-1}\,dz\bigg)e^{is(x-y)}\,ds.$$

Применяя формулу (2.2), получим

$$\overset{\circ}{T}_{ij}(x,y)(x-y)^{\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Bigg(\int\limits_0^1 D_s^{\beta} a_{\alpha}^{\alpha}(x+\tau z(y-x),s)(1-z)^{m-1}\,dz\Bigg)e^{is(x-y)}\,ds.$$

При достаточно большом m справедливо неравенство

$$|D_s^{\beta} a_{\alpha}^{\alpha}(x+\tau z(y-x),s)| \leqslant M(1+|s|)^{-2n}.$$

Следовательно,

$$|\overset{\circ}{T}_{ij}(x,y)(x-y)^{\beta}| \leqslant M_{\beta},$$

и в силу произвольности β имеем

$$|\overset{\circ}{T}_{ij}(x,y)| \leqslant M(1+|x-y|)^{-2n}.$$

Так как

$$k(x) \leqslant M'k(y), \quad x,y \in \operatorname{supp}\chi_{ij},$$

то, используя оценку (2.6), установленную ниже, для ядра $J_{ij}(t,x,y)$ оператора $J_{ij}(t)$, приходим к оценке

$$\|k\psi_{ij}\overset{\circ}{T}_{ij}\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p} \leqslant \|Mk(x_{ij})\overset{\circ}{T}_{ij}\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p} \leqslant Mk(x_{ij})\|\overset{\circ}{T}_{ij}\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p} \leqslant M_1k(x_{ij}).$$

Применяя лемму 2.3, находим, что

$$\Bigg\|\sum_{i,j=1}^{+\infty}\psi_{ij}k\overset{\circ}{T}_{ij}J_{ij}(t)\varphi_{ij}k^{-1}\Bigg\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p} \leqslant M't^{-\kappa},$$

т. е.

$$\Bigg\|\sum_{i,j=1}^{+\infty}\psi_{ij}\overset{\circ}{T}_{ij}J_{ij}(t)\varphi_{ij}\Bigg\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{-\kappa}. \tag{2.4}$$

Оператор $T_{ij} = Q_{\alpha}^{ij}J_{ij}(t)\varphi_{ij}$ есть интегральный оператор с ядром

$$T_{ij}(x,y) = (2\pi)^{-n}\psi_{ij}(x)\varphi_{ij}(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n} a_{\alpha}^{\alpha}(x,s)e^{-ta(x_{ij},s)}\,ds.$$

Для оценки его нормы как оператора из $\mathcal{H}_{p,k}$ в $\mathcal{H}_{p,k}$ используем лемму 2.1.

Применяя формулу (2.2) для $|\beta| = n-1, n$, $\alpha \neq 0$, находим оценку

$$|(x-y)^{\beta}T_{ij}(x,y)| \leqslant \psi_{ij}(x)\varphi_{ij}(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n}|D_s^{\beta}\{a_{\alpha}^{\alpha}(x,s)e^{-ta(x_{ij},s)}\}|\,ds. \tag{2.4$'$}$$

Согласно условиям (1.2), (1.3)

$$(1+|s|)^{|\gamma'|}|D_s^{\gamma'}a(x_{ij},s)| \leqslant Ma'(x_{ij},s), \quad \gamma'\neq 0, \quad |\gamma'|\leqslant n.$$

Учитывая, что $e^{-x} \leqslant c_{\mu}x^{-\mu}$, $0<x<+\infty$, для всех $\mu>0$, и применяя лемму 2.4, получим

$$|D_s^{\gamma'}e^{-ta(x_{ij},s)}| \leqslant M(1+|s|)^{-|\gamma'|}e^{-\frac{t}{2}a'(x_{ij},s)}. \tag{2.5}$$

Аналогично получим, что

$$(1+|s|)^{|\gamma''|}|D_s^{\gamma''}a_\alpha^\alpha(x,s)| \leqslant M\big(a'(x,s)\big)^{1-\theta|\alpha|} \leqslant Mt^{\theta-1}e^{-\frac{t}{4}a'(x_{ij},s)}, \qquad 0\neq\gamma'',\quad |\gamma''|\leqslant n.$$

Подытоживая эти выкладки, приходим к оценке

$$|T_{ij}(x,y)| \leqslant M\chi_{ij}(x)\chi_{ij}(y)t^{\theta-1}|x-y|^{-|\beta|}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{t}{2}a'(x_{ij},s)}(1+|s|)^{-|\beta|}ds,\ \ 0\neq|\beta|\leqslant n.$$

Так как $a'(x,s)\geqslant c|s|^\varepsilon$, то

$$|T_{ij}(x,y)| \leqslant M\chi_{ij}(x)\chi_{ij}(y)t^{\theta-1}|x-y|^{-\mu}t^{-\frac{n-\mu}{\varepsilon}},\quad \mu=n-1,n.$$

Поскольку это неравенство верно для $\mu=n-1,n$, то оно справедливо и для произвольного $\mu\in(n-1,n)$.

Аналогично доказывается оценка вида

$$|J_{ij}(t,x,y)| \leqslant M|x-y|^{-n+\delta'}t^{-\delta''},\quad \delta'>0,\quad \delta''\in(0,1). \tag{2.6}$$

Учитывая, что $|\operatorname{diam}\operatorname{supp}\chi_{ij}|\leqslant Mt^\nu$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\chi_{ij}(x)|x-y|^{-\mu}\,dx \leqslant M_\mu t^{\nu(n-\mu)},\quad \mu\in(n-1,n),$$

получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|T_{ij}(x,y)|\,dy+\int\limits_{\mathbb{R}^n}|T_{ij}(x,y)|\,dx \leqslant M_\mu t^{\theta-1-\frac{n-\mu}{\varepsilon}+\nu(n-\mu)}.$$

Число μ можно выбрать сколь угодно близким к n, поэтому

$$\theta-1-\frac{n-\mu}{\varepsilon}+\nu(n-\mu)<\frac{\theta}{2}-1.$$

Следовательно, по лемме 2.1 при $|\alpha|\neq 0$ имеют место оценки

$$\|T_{ij}\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{\frac{\theta}{2}-1},\quad \Big\|\sum_{i,j=1}^{+\infty}T_{ij}\Big\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{\frac{\theta}{2}-1},\ \ 0<t<\frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

Докажем оценку

$$\|J_{ij}(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M_p,\quad 1\leqslant p\leqslant+\infty,\quad t>0. \tag{2.8}$$

Из оценки (2.5) следует, что элементы $y_{rk}(s,t)$, $r,s=1,\dots,l$, матрицы $e^{-ta(x_{ij},s)}$ удовлетворяют оценке

$$|s|^{|\gamma|}|D_s^\gamma y_{rk}(s,t)| \leqslant M_1,\quad |\gamma|\leqslant n.$$

Применяя [29, гл. IV, п. 3.2, теорема 3], находим, что при $1<p<+\infty$ функция $y_{rk}(s,t)$ является мультипликатором для L_p и справедлива оценка

$$\|J_{ij}(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M',$$

где M' зависит только от n, p, M_1. При $p = 1, +\infty$ согласно условию (1.5) функции $y_{rk}(s)$ будут мультипликаторами для L_1, L_∞, и неравенство (2.8) доказывается непосредственной проверкой.

Согласно лемме 2.1 с учётом (2.8) имеем

$$\|J_{ij}(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M, \quad 0 < t < \frac{1}{2}. \tag{2.9}$$

Оценим теперь норму интегрального оператора T'_{ij} с ядром

$$T'_{ij}(x,y) = (2\pi)^{-n}\psi_{ij}(x)\varphi_{ij}(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big(a(x,y) - a(x_{ij},s)\big)e^{i(x-y)}\,ds.$$

Если доказать оценку

$$|s|^{|\beta|}\chi_{ij}(x)\big|D_s^\beta\big(a(x,s) - a(x_{ij},s)\big)\big| \leqslant Mt^\nu a'(x_{ij},s), \quad |\beta| = n-1, n, \quad 0 < t < t_0, \tag{2.10}$$

то, поступая так же, как при оценке нормы оператора T_{ij}, нетрудно получить неравенство

$$\|T'_{ij}\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{\frac{\nu}{2}-1}, \quad 0 < t < t_0,$$

поэтому по лемме 2.1

$$\Big\|\sum_{i,j=1}^{+\infty} T'_{ij}\Big\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{\frac{\nu}{2}-1}, \quad 0 < t < t_0. \tag{2.11}$$

Докажем теперь оценку (2.10). Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.5. *Пусть a, b — две матрицы порядка l, $a, b\colon C^l \to C^l$, $a', b' \geqslant 0$ — их наименьшие собственные значения, т. е. нижние грани вещественных частей. Тогда имеет место неравенство*

$$|a' - b'| \leqslant |a - b|.$$

Доказательство. По определению имеем

$$a' = \operatorname{Re}(ah,h), \quad b' = \operatorname{Re}(bg,g),$$

где h, g — соответствующие нормированные собственные векторы матриц $\operatorname{Re} a$, $\operatorname{Re} b$.

Очевидно, что $a' = \operatorname{Re}(ah,h) \leqslant \operatorname{Re}(ag,g)$ как нижняя грань матрицы $\operatorname{Re} b$. Поэтому

$$\begin{aligned} a' - b' = \operatorname{Re}(ah,h) - \operatorname{Re}(bg,g) \leqslant \operatorname{Re}(ag,g) - \operatorname{Re}(bg,g) = \\ = \operatorname{Re}\big((a-b)g,g\big) \leqslant \big|\big((a-b)g,g\big)\big| \leqslant |a-b|\,|g|\,|g| = |a-b|. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается неравенство

$$b' - a' \leqslant |a - b|.$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

На основании этой леммы для $x, y \in \operatorname{supp}\chi_{ij}$ имеем

$$|a'(x,s) - a'(y,s)| \leqslant |a(x,s) - a(y,s)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \left|\frac{d}{d\mu} a(x+\mu(x-y),s)\right| d\mu \leqslant \int_0^1 |\nabla_x a(x+\mu(x-y),s)|x-y|\,|\,d\mu \leqslant$$
$$\leqslant Mt^\nu \int_0^1 a'(x+\mu(x-y),s)\,d\mu \leqslant Mt^\nu \sup_{\xi\in[x,y]} a'(\xi,s) \leqslant Mt^\nu \sup_{\xi\in\operatorname{supp}\chi_{ij}} a'(\xi,s).$$

Выберем $t_0 > 0$ так, чтобы $Mt_0^\nu < 1/4$, а точку $y \in \operatorname{supp}\chi_{ij}$ выберем так, чтобы в ней функция $a'(\xi,s)$, $\xi \in \operatorname{supp}\chi_{ij}$, достигала своего максимального значения. Тогда

$$|a'(x,s) - a'(y,s)| \leqslant \frac{1}{4} a'(y,s),$$

и значит,

$$|a'(x,s) - a'(\eta,s)| \leqslant |a(x,s) - a(\eta,s)| < \frac{3}{4} a'(\eta,s)$$

для любых $\eta, x \in \operatorname{supp}\chi_{ij}$.

Аналогично при $0 < t < t_0$ согласно условию (1.3)

$$|s|^{|\beta|}|a^\beta(x,s) - a^\beta(y,s)| \leqslant c_1 t^\nu |s|^\beta \int_0^1 |\nabla a^\beta(x+\mu(x-y),s)|\,d\mu \leqslant$$
$$\leqslant c_2 t^\nu a'(y,s), \quad x,y \in \operatorname{supp}\chi_{ij}, \quad 0 < t < t_0,$$

что доказывает (2.10).

Сопоставляя оценки (2.4), (2.5), (2.7) с формулой (2.3) и определением операторной функции $I_1(t)$, мы получим оценку (2.1′) для $j = 1$.

7. Оценим норму оператора $I_3(t)$. Заметим, что если $\theta_i(t)\theta_r(t) \neq 0$ при некотором $t \in (0, 1/2)$, то это означает, что $|i-r| \leqslant 1$. Для каждой точки $t \in (0,1/2)$ существует не более двух индексов i, таких что $\theta_i(t) \neq 0$. Поэтому для оператора вида

$$T(t) = \sum_{i,j,r,q=1}^{+\infty} \tilde\theta_i(t)\tilde\theta_r(t)\chi_{ij}\chi_{rq}T_{ijrq}\chi_{ij}\chi_{rq}$$

имеет место оценка

$$\|T(t)\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p} \leqslant M \sup_{i,j,r,q} \left\| \sum_{j,q=1}^{+\infty} \chi_{ij}\chi_{rq}T_{ijrq}\chi_{ij}\chi_{rq} \right\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}}.$$

Применяя два раза лемму 2.3, получим

$$\|T(t)\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p} \leqslant M' \sup_{i,j,r,q}\left\|\sum_{j=1}^{+\infty}\chi_{ij}\left(\sum_{q=1}^{+\infty}\chi_{rq}T_{ijrq}\chi_{rq}\right)\chi_{ij}\right\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p} \leqslant$$

$$\leqslant M_1\sup_j\left\|\sum_{q=1}^{+\infty}\chi_{rq}(\chi_{ij}T_{ijrq}\chi_{ij})\chi_{rq}\right\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p} \leqslant M_2\sup_{j,q}\|\chi_{ij}\chi_{rq}T_{ijrq}\chi_{ij}\chi_{rq}\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p}.$$

Таким образом,

$$\|T(t)\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p} \leqslant M_3\sup_{i,j,r,q}\tilde{\theta}_i(t)\tilde{\theta}_r(t)\|\chi_{ij}\chi_{rq}T_{ijrq}\chi_{ij}\chi_{rq}\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p}.$$

Учитывая равенство

$$\|Q\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} = \|kQk^{-1}\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p},$$

находим, что

$$\|T(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M_3\sup_{i,j,r,q}\tilde{\theta}_i(t)\tilde{\theta}_r(t)\|\chi_{ij}\chi_{rq}T_{ijrq}\chi_{ij}\chi_{rq}\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}}.$$

Если T_{ijrq} — интегральный оператор, то аналогично с применением лемм 2.1, 2.2 устанавливаются неравенства

$$\|T(t)\|_{\langle p\rangle} \leqslant M_4\sup_{i,j,r,q}\tilde{\theta}_i(t)\tilde{\theta}_j(t)\|\chi_{ij}\chi_{rq}T_{ijrq}\chi_{ij}\chi_{rq}\|_{\langle p\rangle},$$

$$\|T(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M_5\sup_{i,j,r,q}\tilde{\theta}_i(t)\tilde{\theta}_j(t)\|\chi_{ij}\chi_{rq}T_{ijrq}\chi_{ij}\chi_{rq}\|_{\langle p\rangle}.$$

При оценке нормы оператора $I_3(t)$ мы будем пользоваться неравенствами $|\theta'_\tau(t)| \leqslant Mt^{-1}\tilde{\theta}_\tau(t)$ и $|x_{ij}-x_{rq}| \leqslant Mt^\nu$, если $\tilde{\theta}_i(t)\tilde{\theta}_r(t)\chi_{ij}(x)\chi_{rq}(x) \not\equiv 0$.

Оператор

$$\mathring{T}_{ijrq} = \psi_{ij}\psi_{rq}\chi_{ij}\chi_{rq}\big(J_{ij}(t)-J_{rq}(t)\big)\varphi_{ij}\varphi_{rq}\chi_{ij}\chi_{rq} -$$

это интегральный оператор с ядром

$$\mathring{T}_{ijrq}(x,y) =$$
$$= (2\pi)^{-n}\psi_{ij}(x)\psi_{rq}(x)\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)}(e^{-ta(x_{ij},s)}-e^{-ta(x_{rq},s)})\,ds\right\}\varphi_{ij}(y)\psi_{rq}(y).$$

Имеем

$$D_s^\gamma(e^{-ta(x_{ij},s)}-e^{-ta(x_{rq},s)}) =$$
$$= \int\limits_0^t D_s^\gamma\big\{e^{-(t-t')a(x_{ij},s)}\big(a(x_{rq},s)-a(x_{ij},s)\big)e^{-t'a(x_{rq},s)}\big\}\,dt', \quad (2.12)$$

Используя формулу

$$|s|^{|\gamma'|}D_s^{\gamma'}\big(a(x_{ij},s)-a(x_{rq},s)\big)=\int_0^1 |s|^{|\gamma'|}\frac{d}{d\mu}a^{\gamma'}(x_{ij}+\mu(x_{rq}-x_{ij}),s)\,d\mu$$

и условия (1.2), (1.3), получим оценку

$$|s|^{|\gamma'|}\big|D_s^{\gamma'}\big(a(x_{ij},s)-a(x_{rq},s)\big)\big|\leqslant M|x_{ij}-x_{rq}|\sup_{\xi\in[x,y]}a'(\xi,s)\leqslant$$
$$\leqslant Mt^{\nu}\min\{a'(x_{ij},s),a'(x_{rq},s)\},\quad |\gamma'|\leqslant n,\quad 0<t<t_0.$$

В итоге, учитывая неравенство (2.5), приходим к следующей оценке, аналогичной (2.10):

$$(1+|s|^{|\gamma|})|D_s^{\gamma}(e^{-ta(x_{ij},s)}-e^{-ta(x_{rq},s)})|\leqslant Mt^{\nu},\quad |\gamma|\leqslant n.$$

Далее поступая так же, как при выводе оценки (2.7), находим, что

$$\|\mathring{T}_{ijrq}\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}}\leqslant Mt^{\frac{\nu}{2}},\quad 0<t<t_0,$$

и значит,

$$\|I_3(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}}\leqslant Mt^{\frac{\nu}{2}-1},\quad 0<t<t_0,$$

где $t_0>0$ — достаточно малое число.

8. Найдём оценку для оператора $I_4(t)$. Представим оператор

$$\mathring{T}_{ijrq}=[\psi_{rq},J_{ij}(t)]$$

в виде

$$[\psi_{rq},J_{ij}(t)]=-\int_0^t J_{ij}(t-t')[\psi_{rq},A_{ij}]J_{ij}(t')\,dt',\tag{2.13}$$

где $A_{ij}=a(x_{ij},D)$. Для доказательства этого равенства к обеим его частям применим операцию $d/dt+A_{ij}$. Тогда с обеих сторон получим $[A_{ij},\psi_{rq}]J_{ij}(t)$. Обе стороны (2.13) имеют нулевое предельное значение при $t\to 0+$. Остаётся применить соответствующую теорему единственности решения задачи Коши.

Имеем

$$[\psi_{rq},A_{ij}]v=\psi_{rq}A_{ij}v-A_{ij}\psi_{rq}v,\quad v\in S(\mathbb{R}^n)^l.$$

По формуле Тейлора

$$\psi_{rq}(y)=\sum_{|\alpha|<m}\psi_{rq}^{(\alpha)}(x)\frac{(x-y)^{\alpha}}{\alpha!}+m\sum_{|\alpha|=m}\frac{(x-y)^{\alpha}}{\alpha!}\int_0^1\psi_{rq}^{(\alpha)}\big(x+\mu(y-x)\big)(1-\mu)^{m-1}\,dt,$$

где

$$\psi_{rq}^{(\alpha)}(x)=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\psi_{rq}(x).$$

Ясно, что

$$[\psi_{rq}, A_{ij}]v = \sum_{0<|\alpha|<m} i^{|\alpha|}\psi_{rq}^{(\gamma)} a^\gamma(x_{ij}, D)v + mi^m \sum_{|\beta|=m} K_\beta v, \quad v \in S(\mathbb{R}^n)^l,$$

где K_β — интегральный оператор с ядром

$$K_\beta(x,y) = (2\pi)^{-n}\mathring{K}_\beta(x,y)\left\{\int_{\mathbb{R}^n} a^\beta(x_{ij}, s)e^{is(x-y)}\,ds\right\}, \quad |\mathring{K}_\beta(x,y)| \leqslant Mt^{-\nu m}.$$

При достаточно большом значении числа m, как в п. 6, имеет место неравенство

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} a^\beta(x_{ij}, s)e^{is(x-y)}\,ds\right| \leqslant M|x-y|^{-n\pm1}.$$

Поэтому

$$\|K_\beta\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M't^{-\nu m}.$$

Оператор $\psi_{rq}^{(\gamma)} a^\gamma(x_{ij}, D)J_{ij}(t')$ — это интегральный оператор T' с ядром

$$T'(x,y) = (2\pi)^{-n}\psi_{rq}^{(\gamma)}(x)\int_{\mathbb{R}^n} a^\gamma(x_{ij}, s)e^{-t'a(x_{ij},s)}e^{is(x-y)}\,ds.$$

Поскольку $|\psi_{rq}^{(\gamma)}(x)| \leqslant Mt^{-\nu|\gamma|}$, то, поступая так же, как в предыдущих пунктах, приходим к оценке

$$\|T'\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M(t')^{-\nu|\gamma|}\max\{1, (t')^{-1+\theta|\gamma|}\} \leqslant M'(t')^{-1+\theta-\nu}.$$

Учитывая, что $\nu m < 1$, $\theta > \nu$, в итоге получим

$$\left\|\int_0^t J_{ij}(t-t')[\psi_{rq}, A_{ij}]J_{ij}(t')\,dt'\right\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant$$

$$\leqslant M_1\int_0^t (t')^{-1+\theta-\nu}\,dt' + M_2\int_0^t (t')^{-\nu m}\,dt' \leqslant M_3(t^{\theta-\nu} + t^{1-\nu m}).$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\|I_4(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{-\kappa'}, \quad 0 < t < t_0,$$

где $\kappa' = \max\{(1-\theta+\nu), \nu m\} < 1$.

Аналогичная оценка получается для $I_5(t)$:

$$\|I_5(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{-\kappa'}, \quad 0 < t < t_0,$$

где κ' — такое же число, как и выше.

9. В заключение оценим норму оператора $I_2(t)$. Кратность покрытия множества $\mathbb{R}^n$ множеством $\operatorname{supp}\chi_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots$, конечна и не зависит от i. Поэтому

множество $\{1, 2, \ldots\}$ можно представить в виде $\bigcup_{j=1}^{q} \mathbb{Z}_+^{(j)}$ так, что $\chi_{ij_1}\chi_{ij_2} \equiv 0$, если j_1, j_2 принадлежат разным множествам $\mathbb{Z}_+^{(j)}$. Получаем равенство

$$\sum_{i,j}[A, \psi_{ij}]J_{ij}(t)\varphi_{ij} =$$

$$= \sum_i \theta_i \sum_{r=1}^{q}\Bigl(\sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{(r)}}(1-\tilde{\psi}_{ij})A\psi_{ij}\Bigr)\Bigl(\sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{(r)}}\tilde{\psi}_{ij}J_{ij}(t)\varphi_{ij}\Bigr)+\sum_{i,j}\theta_i\tilde{\psi}_{ij}[A,\psi_{ij}]J_{ij}(t)\varphi_{ij}.$$

Докажем, что если $\tilde{\theta}_i(t) \neq 0$, то

$$\Bigl\|\sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{(r)}}(1-\tilde{\psi}_{ij})A\psi_{ij}u\Bigr\|_{\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{-\kappa}|u|_{\mathcal{H}_{p,k}}, \quad 0 < t < t_0,$$

где $\kappa \in (0, 1)$. Имеем для $u \in S(\mathbb{R}^n)^l$

$$T_{ij}u = (1-\tilde{\psi}_{ij})A\psi_{ij}u =$$
$$= (2\pi)^{-n}\bigl(1-\tilde{\psi}_{ij}(x)\bigr)\int_{\mathbb{R}^n}\Bigl\{\int_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)}a(x\tau+(1-\tau)y, s)\psi_{ij}(y)u(y)\,dy\Bigr\}ds =$$
$$= (2\pi)^{-n}\bigl(1-\tilde{\psi}_{ij}(x)\bigr)|x-y|^{-2m}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}\Bigl\{\int_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)}\Delta_s^m(a(x,\tau+(1-\tau)y, s)\psi_{ij}(y)u(y)\,dy\Bigr\}ds.$$

В силу условий (1.1), (1.2) число m' можно выбрать так, что при $m > m'$

$$|\Delta_s^m a(\tau x + (1-\tau)y, s)| \leqslant M(1+|s|)^{-2n}.$$

Теперь воспользуемся неравенством

$$\frac{k(x)}{k(y)} \leqslant M(1+|x-y|^N),$$

из которого при $|x-y| > 1$ следует, что

$$k(x)|x-y|^{-N}k(y)^{-1} \leqslant M. \tag{2.14}$$

Таким образом, для достаточно больших $m > 0$

$$T_{ij}u = \bigl(1-\tilde{\psi}_{ij}(x)\bigr)\int_{\mathbb{R}^n} Q_{ij}(x,y)\chi_{ij}(y)u(y)\,dy,$$

где

$$|Q_{ij}(x,y)| \leqslant M\min\{|x-y|^{-2m}, |x-y|^{-2m-N}\},$$

χ_{ij} — характеристическая функция множества $\operatorname{supp}\psi_{ij}$. Если $\psi_{ij}(y) \neq 0$, $\tilde{\psi}_{ij}(x) \neq 1$, то выполняется неравенство $|x-y|^{-1} \leqslant Mt^{-\nu}$, где M не зависит от i, j. Следовательно,

$$\Phi := \left| \sum_{i,j\in\mathbb{Z}_+^{(r)}} \bigl(1-\tilde{\psi}_{ij}(x)\bigr) \right| Q_{ij}(x,y)|\chi_{ij}(y)| \leqslant \\ \leqslant M|x-y|^{-2m} \leqslant M|x-y|^{-n\pm1}t^{-\nu(2m-n\mp1)}.$$

Аналогично

$$\Phi \leqslant M|x-y|^{-n\pm1-N}t^{-\nu(2m-n\pm1-N)}.$$

При $|x-y| > 1$ мы будем пользоваться последним неравенством, а при $|x-y| < 1$ — предыдущей оценкой. Тогда согласно неравенству (2.14), применяя лемму 2.1, получим, что

$$\Bigl\| \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{(r)}} (1-\tilde{\psi}_{ij})A\psi_{ij} \Bigr\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{-\nu(2m-n\pm1)}(1+t^{\nu N}).$$

Выберем $\nu > 0$ так, чтобы $\kappa' = \nu(2m-n\pm1) < 1$.

Поскольку

$$\Bigl\| \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{(r)}} \tilde{\psi}_{ij}J_{ij}(t)\varphi_{ij} \Bigr\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M,$$

имеем

$$\Bigl\| \Bigl(\sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{(r)}} (1-\tilde{\psi}_{ij})A\psi_{ij} \Bigr) \Bigl(\sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{(r)}} \tilde{\psi}_{ij}J_{ij}(t)\varphi_{ij} \Bigr) \Bigr\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{-\kappa'}, \quad 0<\kappa'<1.$$

Остаётся получить оценку нормы оператора $\tilde{\psi}_{ij}[A,\psi_{ij}]J_{ij}(t)\varphi_{ij}$, равномерную по $i,j = 1,2,\ldots$. Очевидно, что

$$\tilde{\psi}_{ij}[A,\psi_{ij}]J_{ij}(t)\varphi_{ij} = X_{ij}^{(1)}(t) + X_{ij}^{(2)}(t) + X_{ij}^{(3)}(t),$$

где

$$\begin{aligned} X_{ij}^{(1)}(t) &= \tilde{\psi}_{ij}[A_{ij},\psi_{ij}]J_{ij}(t)\varphi_{ij}, \\ X_{ij}^{(2)}(t) &= \tilde{\psi}_{ij}(A-A_{ij})J_{ij}(t)\varphi_{ij}, \\ X_{ij}^{(3)}(t) &= \tilde{\psi}_{ij}(A-A_{ij})\psi_{ij}J_{ij}(t)\varphi_{ij}. \end{aligned}$$

Нормы операторов $X_{ij}^{(1)}(t)$, $X_{ij}^{(2)}(t)$ в пространстве $\mathcal{H}_{p,k}$ оцениваются так же, как в п. 6 и 8 соответственно. Для оценки нормы оператора $X_{ij}^{(3)}(t)$ используем равенство

$$(A-A_{ij})\psi_{ij}J_{ij}(t) = (A-A_{ij})J_{ij}(t)\psi_{ij} - \int_0^t (A-A_{ij})J_{ij}(t-t')[\psi_{ij},A_{ij}]J_{ij}(t')\,dt'.$$

В п. 6 была получена оценка

$$\|(A - A_{ij})J_{ij}(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{-\kappa_1}, \quad 0 < t < t_0,$$

где $\kappa_1 \in (0,1)$. Эта оценка имеет место также при $\tilde{\psi}_{ij}$ вместо ψ_{ij}. Легко убедиться, что, как и в п. 8, имеет место оценка

$$\|\,[\psi_{ij}, A_{ij}]J_{ij}(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{-\kappa_2}, \quad 0 < t < t_0,$$

где $\kappa_2 \in (0,1)$. Теперь очевидно, что

$$\|(A - A_{ij})\psi_{ij}J_{ij}(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{-\kappa}, \quad 0 < t < t_0,$$

где $\kappa \in (0,1)$.

10. Оценки и выкладки, полученные в этом разделе, подытожим в виде отдельного утверждения.

Утверждение 2.1. *При выполнении условий* (1.1)—(1.5) *и надлежащем выборе чисел* $\nu, t_0 > 0$ *оператор*

$$K_0(t) = -\left(\frac{d}{dt} + A\right)J(t), \quad D\big(K_0(t)\big) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l,$$

продолжается до непрерывного оператора $K(t)$ *в* $\mathcal{H}_{p,k}$ *и выполняется оценка*

$$\|K(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{-\kappa}, \quad 0 < t < t_0, \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty, \tag{2.15}$$

где $\kappa \in (0,1)$, *число* M *не зависит от* N, p. *Числа* ν, t_0, κ *также не зависят от* N, p.

В случае $p = 2$ оценки оператора $K(t)$ можно провести с учётом [7, § 4, п. 8—11, лемма 2.4], используя вместо леммы 2.1 утверждение, что для интегрального оператора T с ядром

$$T(x,y) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)}t(s)\,ds$$

выполняется равенство $\|T\|_{\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_2} = \sup\limits_{s\in\mathbb{R}^n}|t(s)|$. Тогда мы приходим к следующему результату.

Утверждение 2.2. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и неравенство* (1.4). *Тогда найдутся числа* $\nu, t_0 > 0$, $\kappa \in (0,1)$, *такие что имеет место оценка*

$$\|K(t)\|_{\mathcal{H}_{2,k}\to\mathcal{H}_{2,k}} \leqslant Mt^{-\kappa}, \quad 0 < t < t_0.$$

11. В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2.6. *Пусть* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$. *Тогда*

$$|J(t)u - u|_{\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M_R t^{1-\kappa}|Au|_{\mathcal{H}_{p,k}} + Mt^{1-\kappa}|u|_{\mathcal{H}_{p,k}}, \quad 0 < t < t_0,$$

где $\kappa \in (0,1)$, *а число* R *определяется как нижняя грань чисел* R', *таких что* $\operatorname{supp} u \subset \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < R'\}$.

Для доказательства представим $J(t)u - u$ в виде

$$J(t)u - u = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \psi_{ij}(J_{ij}(t) - E)\varphi_{ij}u = -\sum_{i,j=1}^{+\infty} \psi_{ij}\biggl(\int\limits_0^t J_{ij}(t')\,dt'\biggr)A_{ij}\varphi_{ij}u =$$
$$= -\sum_{i,j=1}^{+\infty} \psi_{ij}\biggl(\int\limits_0^t J_{ij}(t')\,dt'\biggr)[A_{ij}, \varphi_{ij}]\psi_0 u +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{+\infty} \psi_{ij}\biggl(\int\limits_0^t J_{ij}(t')\,dt'\biggr)\varphi_{ij}(A_{ij} - A)\psi_0 u + \sum_{i,j=1}^{+\infty} \psi_{ij}\biggl(\int\limits_0^t J_{ij}(t')\,dt'\biggr)\varphi_{ij}Au, \tag{2.16}$$

где $\psi_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — некоторая фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в 1 на носителе функции $u(x)$.

Покажем, что оператор

$$\mathring{T} = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \varphi_{ij}\biggl(\int\limits_0^t J_{ij}(t')\,dt'\biggr)[A_{ij}, \varphi_{ij}]\psi_0, \quad D(\mathring{T}) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l,$$

продолжается до непрерывного оператора T в $\mathcal{H}_{p,k}$. Для $v \in \mathcal{H}_{q,k^{-1}}$ имеем

$$(Tu, v) = (u, T'v),$$

где

$$T' = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \psi_0[\varphi_{ij}, A^*_{ij}] \int\limits_0^t J^*_{ij}(t')\,dt'\varphi_{ij}.$$

Здесь A^*_{ij}, J^*_{ij} — псевдодифференциальные операторы в $\mathbb{R}^n$ с символами $a^*(x,s)$, $e^{-ta^*(x_{ij},s)}$ соответственно.

По той же схеме, что и в п. 8, устанавливается оценка

$$\|T'\|_{\mathcal{H}_{q,k^{-1}} \to \mathcal{H}_{q,k^{-1}}} \leqslant Mt^{-\kappa}, \quad 0 < t < t_0,$$

где t_0 — достаточно малое число, $\kappa \in (0,1)$, $1/q + 1/p = 1$. Теперь имеем

$$|(Tu, v)| \leqslant Mt^{-\kappa}|u|_{\mathcal{H}_{p,k}}|v|_{\mathcal{H}_{q,k^{-1}}} \quad \text{для всех} \quad v \in \mathcal{H}_{q,k^{-1}},$$

откуда в силу произвольности элемента $v \in \mathcal{H}_{q,k^{-1}}$ следует оценка

$$\|Tu\|_{\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{-\kappa}|u|_{\mathcal{H}_{p,k}}.$$

Вторая сумма в (2.16) оценивается аналогично с использованием факта, что оператор A', формально сопряжённый к A, записывается в виде

$$(A'u)(x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)}a^*(\tau y + (1-\tau)x, s)v(y)\,dy\biggr)dx.$$

Ввиду оценки $\|J(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k} \to \mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M'$ очевидно, что $\mathcal{H}_p$-норма третьей суммы в (2.16) оценивается через $M''t|Au|_{\mathcal{H}_{p,k}}$. Используя оценку $\|J(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k} \to \mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M$

и плотность линейного многообразия $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, из леммы 2.6 получаем следующий результат.

Следствие. *Пусть* $u \in \mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. *Тогда*

$$\lim_{t\to 0+} |J(t)u - u|_{\mathcal{H}_{p,k}} = 0. \tag{2.17}$$

Лемма 2.7. *Для* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *справедлива оценка*

$$|AJ(t)u|_{\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M_R t^{-\kappa}|u|_{\mathcal{H}_{p,k}} + M|Au|_{\mathcal{H}_{p,k}}, \quad 0 < t < t_0,$$

где $\kappa \in (0,1)$, *а число* R *такое же, как в лемме* 2.6.

Доказательство. Представим $AJ(t)u$ в виде

$$AJ(t)u = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \mathring{\psi}[A,\psi_{ij}]J_{ij}\varphi_{ij}u + \\ + \sum_{i,j=1}^{+\infty} \mathring{\psi}\psi_{ij}(A - A_{ij})J_{ij}\varphi_{ij}u + \sum_{i,j=1}^{+\infty} \mathring{\psi}\psi_{ij}J_{ij}(t)A_{ij}\varphi_{ij}u, \quad 0 < t < t_0,$$

где функция $\mathring{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ неотрицательная и обращающаяся в 1 в единичной окрестности множества $\operatorname{supp}\psi_0$, а функция $\psi_0(x)$ такая же, как в (2.16). Проводя такие же оценки, как в предыдущих пунктах, устанавливаем, что $\mathcal{H}_{p,k}$-нормы первых двух сумм оцениваются через $Mt^{-\kappa}|u|_{\mathcal{H}_{p,k}}$.

Имеем, как в (2.16),

$$\sum_{i,j=1}^{+\infty} \mathring{\psi}\psi_{ij}J_{ij}(t)A_{ij}\varphi_{ij}u = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \mathring{\psi}\psi_{ij}J_{ij}(t)([A_{ij},\varphi_{ij}]\psi_0 u + \varphi_{ij}(A_{ij} - A)\psi_0 u + \varphi_{ij}Au).$$

Используя это равенство, доказательство леммы 2.7 завершаем так же, как доказательство леммы 2.6. □

Из леммы 2.7 ввиду утверждения 2.2 получается оценка

$$\left|\frac{d}{dt}J(t)u\right|_{\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M_R t^{-\kappa}|u|_{\mathcal{H}_{p,k}} + M|Au|_{\mathcal{H}_{p,k}}, \quad 0 < t < t_0, \tag{2.18}$$

для $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

3. Интегральное представление полугрупп в пространстве $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$

1. Пусть псевдодифференциальный оператор A_0 определён по формуле

$$(A_0u)(x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)}a(\tau x + (1-\tau)y, s)u(y)\,dy\biggr)ds,$$
$$D(A_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1,$$

где символ $a(x,s)$ удовлетворяет условиям (1.1)—(1.3), (1.5). Пусть $k(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ — положительная функция, удовлетворяющая условию (1.4).

Утверждение 3.1. *Оператор A_0 имеет замыкание $\mathcal{A}_{p,k}$ в пространстве $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.*

Доказательство. Пусть $u_1, u_2, \ldots$ — последовательность элементов из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$, такая что $u_j \to 0$ в $\mathcal{H}_{p,k}$ и найдётся элемент $f \in \mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, такой что $A_0 u_j \to f$ в $\mathcal{H}_{p,k}$.

Как в [7, лемма 4.2] обосновывается справедливость равенства

$$(A_0 u_r, g) = (u_r, A_0' g) \quad \text{для всех} \quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l,$$

где псевдодифференциальный оператор A_0' действует по формуле

$$(A_0' u)(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)} a^*(\tau y + (1-\tau)x, s) u(y)\, dy \right) ds.$$

Переходя к пределу $r \to +\infty$, находим, что

$$(f, g) = 0 \quad \text{для всех} \quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l.$$

Следовательно, $f = 0$, и оператор A_0 является замыкаемым оператором в пространстве $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$. □

Основные результаты этого раздела сформулированы в теоремах 3.1, 3.2. В теореме 3.1 установлено, что оператор $-\mathcal{A}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, при выполнении условий (1.1)—(1.5) будет инфинитезимальным производящим сильно непрерывной полугруппы в пространстве $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$; получено интегральное представление полугруппы $e^{-t\mathcal{A}_{p,k}}$, $0 < t < T$, выделяющее его главный член, при $t \to 0+$. В теореме 3.2 установлены условия аналитичности полугруппы $e^{-z\mathcal{A}_{p,k}}$ в некотором угле и получено соответствующее интегральное представление, выделяющее главный член полугруппы $e^{-z\mathcal{A}_{p,k}}$ при $\operatorname{Re} z \to 0+$.

Лемма 3.1. *Для достаточно малых $T > 0$ имеет место тождество*

$$\begin{aligned}(A_0 + \lambda E) \int\limits_\varepsilon^T e^{-t\lambda} J(t) u\, dt &= \\ &= e^{-\varepsilon\lambda} J(\varepsilon) u - e^{-T\lambda} J(T) u - \int\limits_\varepsilon^T e^{-t\lambda} K(t) u\, dt, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться леммой 2.6 и формулой, по которой определяется операторная функция $K(t)$.

Переходя к пределу $\varepsilon \to 0+$ в формуле (3.1), получим для $1 \leqslant p \leqslant +\infty$

$$(\mathcal{A}_{p,k} + \lambda E) \int\limits_0^T e^{-t\lambda} J(t) u\, dt = u - e^{-T\lambda} J(T) u - \int\limits_0^T e^{-\lambda t} K(t) u\, dt, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l.$$

Учитывая, что

$$\|K(t)\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}} \leqslant Mt^{-k}, \quad 0<t<T_0,$$

где $T_0>0$ — достаточно малое число, получаем формулу

$$(\mathcal{A}_{p,k}+\lambda E)X(\lambda)u = \big(E-Y(\lambda)\big)u, \quad u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l, \tag{3.2}$$

где

$$X(\lambda)=\int\limits_0^T e^{-\lambda t}J(t)\,dt, \quad Y(\lambda)=\int\limits_0^T e^{-\lambda t}K(t)dt+e^{-T\lambda}J(T).$$

Очевидно, что при $\operatorname{Re}\lambda>0$

$$\|Y(\lambda)\|_{\mathcal{H}^0_{p,k}\to\mathcal{H}^0_{p,k}} \leqslant M\int\limits_0^T e^{-t\operatorname{Re}\lambda}t^{-\kappa}\,dt+|J|e^{-TRe\lambda}\|J(T)\|_{\mathcal{H}^0_{p,k}\to\mathcal{H}^0_{p,k}} \leqslant$$

$$\leqslant M\bigg(\int\limits_0^T e^{-t\sigma\operatorname{Re}\lambda}\,dt\bigg)^{1/\sigma}\bigg(\int\limits_0^T t^{-\kappa\sigma'}\,dt\bigg)^{1/\sigma'}+Me^{-TRe\lambda}, \quad \frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma'}=1.$$

При $0<\sigma'<1/\kappa$ получим

$$\|Y(\lambda)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M'(\operatorname{Re}\lambda)^{-1/\sigma}.$$

Таким образом, для достаточно больших $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\lambda_0>0$ имеет место неравенство

$$\|Y(\lambda)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant \frac{1}{2}|\operatorname{Re}\lambda|^{-\sigma_0}, \tag{3.3}$$

где $\sigma_0>0$ — достаточно малое число. Следовательно, для $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\lambda_0$ согласно (3.2) линейное многообразие

$$\{(\mathcal{A}_{p,k}+\lambda E)v\colon v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l\}$$

плотно в пространстве $\mathcal{H}_{p,k}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, потому что $X(\lambda)\colon C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l\to C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$.

Формула (3.2) справедлива по непрерывности для всех $u\in\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Поэтому при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\lambda_0$ область значений оператора $\mathcal{A}_{p,k}+\lambda E$ совпадает с $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Утверждение 3.2. *При достаточно больших* $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\lambda_0'$ *имеем*

$$\ker(\mathcal{A}_{p,k}+\lambda E)=0, \quad 1\leqslant p<\infty,$$

и

$$\ker(\mathcal{A}^0_{\infty,k}+\lambda E)=0.$$

Доказательство. Пусть найдутся вектор-функции $u_1,u_2,\ldots\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$, $u\in\mathcal{H}_{p,k}$, такие что $u_j\to u$, $A_0u_j+\lambda u_j\to 0$ в $\mathcal{H}_{p,k}$ при $j\to+\infty$. Переходя к пределу в равенстве

$$\big((A_0u_j+\lambda u_j),g\big)=(u_j,(A_0'+\bar\lambda E)g),$$

получим

$$(u, (A_0' + \bar{\lambda}E)g) = 0 \quad \text{для всех} \quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l.$$

Оператор A_0' является псевдодифференциальным оператором с $(1-\tau)$-символом $a^*(x,s)$. Условия (1.1)—(1.3), (1.5) выполняются, если в них заменить $a(x,s)$ на $a^*(x,s)$. Поэтому для $1/p+1/q=1$ для достаточно больших $\operatorname{Re}\lambda > \lambda'$ линейное многообразие $(A_0'+\bar{\lambda}E)C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$ плотно в $\mathcal{H}_{q,k^{-1}}$, $1 \leqslant q < +\infty$, и в $C^0_{\infty,k^{-1}}(\mathbb{R}^n)^l$. Следовательно,

$$(u, f) = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l,$$

и поэтому $u = 0$. □

Подытожим результаты этого пункта в виде следующего утверждения.

Утверждение 3.3. *Для достаточно больших* $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0'$ *оператор* $\mathcal{A}_{p,k} + \lambda E$ *непрерывно обратим в* $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. *Имеют место равенства*

$$(\mathcal{A}_{p,k} + \lambda E)^{-1} = X(\lambda)\big(E + \mathring{Y}(\lambda)\big), \quad \operatorname{Re}\lambda > \lambda',$$

$$X(\lambda)u = \int_0^T e^{-t\lambda} J(t)u\,dt, \quad u \in \mathring{\mathcal{H}}_{p,k},$$

и оценка

$$\|\mathring{Y}(\lambda)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M(\operatorname{Re}\lambda)^{-\sigma_0}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \lambda',$$

где $\sigma_0, T > 0$ *— достаточно малые числа.*

2. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{H}_2$ псевдодифференциальный оператор

$$(\mathring{A}u)(x) = \frac{1}{2(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)} \big(a(\tau x + (1-\tau)y, s) + {} + a^*(\tau y + (1-\tau)x, s) \big) u(y)\,dy \bigg) ds, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l,$$

где $a(x,s) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \operatorname{End}\mathbf{C}^l)$ — матричная функция, удовлетворяющая условиям (1.1), (1.2).

Так же, как в разделе 2, устанавливается, что операторная функция

$$\mathring{K}(t)g = -\mathring{A}\mathring{J}(t)g - \frac{d}{dt}\mathring{A}\mathring{J}(t)g, \quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l,$$

продолжается непрерывно на $\mathcal{H}_2$ и

$$\|\mathring{K}(t)\|_{\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_2} \leqslant Mt^{-\kappa}, \quad 0 < t < T,$$

где $T > 0$ — достаточно малое число, $0 < \kappa < 1$,

$$\mathring{J}(t) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \theta_i(t)\psi_{ij}\mathring{J}_{ij}(t)\varphi_{ij}.$$

Здесь оператор $\mathring{J}_{ij}(t)$ задаётся как интегральный оператор с ядром

$$\mathring{J}_{ij}(t;x,y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)} e^{-t \operatorname{Re} a(x_{ij},s)}\, ds,$$

где $x_{ij} \in \operatorname{supp} \psi_{ij}$ — фиксированные точки.

Так же, как выше, в п. 1, доказывается существование замыкания $\mathring{\mathcal{A}}$ в $\mathcal{H}_2$ оператора $\mathring{A}$ и плотность в $\mathcal{H}_2$ линейного многообразия

$$\{(\mathring{A} + \lambda E)u;\ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l\}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda',$$

где $\lambda' > 0$ — достаточно большое число.

Поскольку $\mathring{A}$ — симметрический оператор, следовательно, $\mathring{\mathcal{A}}$ — самосопряжённый оператор в $\mathcal{H}_2$, $\mathring{\mathcal{A}} \geqslant -\lambda' E$, $\lambda' \geqslant 0$.

3. Пусть теперь выполнены условия (1.1), (1.2) и $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$ — такой же псевдодифференциальный оператор в $\mathcal{H}_2$, как в п. 1.

Лемма 3.2. *Оператор $\mathring{\mathcal{A}}_2$ является квази-m-аккретивным оператором в пространстве $\mathcal{H}_2$.*

Доказательство. Так как

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_2 u, u)_{\mathcal{H}_2} = (\mathring{\mathcal{A}} u, u)_{\mathcal{H}_2}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l,$$

то, учитывая, что $\mathring{\mathcal{A}} \geqslant -\lambda' E$, для $\operatorname{Re}\lambda > \lambda'$ получим

$$|\operatorname{Re}\lambda - \lambda'|\, |u|^2_{\mathcal{H}_2} \leqslant \Big|\big((\mathcal{A}_2 + \lambda E)u, u\big)\Big|_{\mathcal{H}_2} \leqslant |(\mathcal{A}_2 + \lambda E)u)|_{\mathcal{H}_2} |u|_{\mathcal{H}_2}.$$

В силу утверждения 3.1 эти неравенства справедливы для всех $u \in D(\mathcal{A}_2)$. Применяя утверждение 3.3, приходим к оценке

$$\|(\mathcal{A}_2 + \lambda E)^{-1}\|_{\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \lambda'}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \lambda', \tag{3.4}$$

которая и доказывает лемму. □

4. Применяя [23, теорема 13.1, с. 262], согласно лемме 3.2 устанавливаем, что оператор $-\mathcal{A}_2$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $\Gamma(t)$, $t > 0$, в $\mathcal{H}_{2,k}$. При этом $\Gamma(t)$ преобразует $D(\mathcal{A}_2)$ в себя, выполняется равенство

$$\frac{d}{dt}[\Gamma(t)u] = -\mathcal{A}_2 \Gamma(t) u \ \text{ для всех } \ u \in D(\mathcal{A}_2), \quad t > 0, \tag{3.5}$$

и справедлива оценка

$$\|\Gamma(t)\|_{\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2} \leqslant M e^{\omega t}, \quad 0 < t < +\infty, \ \ \omega > 0. \tag{3.5$'$}$$

Справедливо также равенство

$$\lim_{t \to 0+} |\Gamma(t) g - g|_{L_2(\mathbb{R}^n)^l} = 0 \ \text{ для всех } \ g \in D(\mathcal{A}_2). \tag{3.5$''$}$$

5. Пусть $K(t)$ — оператор, определённый как в разделе 2.

Лемма 3.3. *Оператор $K(t)$, $0 < t < T$, преобразует $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$ в пространство Шварца $S(\mathbb{R}^n)^l$ медленно изменяющихся функций.*

Доказательство. Из тождеств, установленных в разделе 2 для $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$, имеем, что $K(t)g = g_1 + g_2$, где $g_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$,

$$g_2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \theta_i(t) \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} (1 - \tilde{\psi}_{ij}) A \psi_{ij} J_{ij}(t) \varphi_{ij} g \right\}.$$

Достаточно показать для фиксированных i, j, что

$$(1 - \tilde{\psi}_{ij}) A \psi_{ij} J_{ij}(t) \varphi_{ij} g \in S(\mathbb{R}^n)^l. \tag{3.6}$$

Ранее в разделе 2, п. 3, было показано, что оператор

$$T_{ij} = (1 - \tilde{\psi}_{ij}) A \varphi_{ij}$$

имеет вид

$$T_{ij} = (1 - \tilde{\psi}_{ij}) Q_{ij} \varphi_{ij},$$

где Q_{ij} — интегральный оператор, ядро которого $Q_{ij}(x,y)$ удовлетворяет оценке

$$|Q_{ij}(x,y)| \leqslant M|x-y|^{-2m}.$$

Число m можно выбрать сколь угодно большим, при этом число M будет зависеть от m, t.

Таким же образом аналогичные утверждения устанавливаются для оператора

$$\mathring{T}_{ij} = (1 - \tilde{\psi}_{ij}) D_x^\alpha Q_{ij} \varphi_{ij}$$

при любом $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Следовательно,

$$D_x^\alpha T_{ij} g_3 = \bigl(1 - \tilde{\psi}_{ij}(x)\bigr) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathring{Q}_{ij}(x,y) \psi_{ij}(y) g_3(y)\, dy,$$

где $g_3 = J_{ij}(t)g$. Учитывая, что $(\psi_{ij} g_3)(y)$ — финитная функция, $\mathring{Q}_{ij}(x,y) = 0$ при $|x-y| \leqslant c'$, $c' = c'(t) > 0$, из оценки

$$|\mathring{Q}_{ij}(x,y)| \leqslant M_{t,m}|x-y|^{-2m} \quad \text{для всех} \quad m > 0$$

получаем неравенство

$$|(D_x^\alpha T_{ij} g_3)(x)| \leqslant M_N (1+|x|)^{-N} \quad \text{для всех} \quad N > 0.$$

Лемма 3.3 доказана. □

Нетрудно проследить по доказательству леммы, что при $0 < \varepsilon < t < T$ верна оценка

$$|(1+|x|)^{-N} D_x^\alpha K(t) g|_{C(\mathbb{R}^n)^l} \leqslant M_{\alpha,N,\varepsilon,g}. \tag{3.7}$$

Дело в том, что при $t > \varepsilon$ можно получить соответствующую оценку для конечного числа слагаемых вида (3.6), число которых зависит только от ε, g.

Из (3.7), в частности, следует, что

$$\sup_{\varepsilon<t} |K(t)g|_{W_2^m(\mathbb{R}^n)^l} \leqslant M_{m,\varepsilon,g} \quad \text{для всех} \quad m>0. \tag{3.7$'$}$$

Лемма 3.3′. *При любом $g \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}$ вектор-функция $K(t)g$, $0<t<T$, принимает значения в $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}$ и сильно непрерывна в $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}$.*

Если $R\colon \overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k} \to \overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}$ — ограниченный оператор в $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}$ с нормой

$$\|R\|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}\to\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}} < 1,$$

то

$$(E-R)^{-1}u \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k} \quad \textit{для всех} \quad u \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}.$$

Доказательство. Пусть $g_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)^j$, $j=1,2,\ldots$, и $g_j \to g$, $j\to+\infty$, в $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}$. Тогда из ограниченности оператора $K(t)$ в $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}$ следует, что $K(t)g_j \to K(t)g$, $j\to+\infty$.

Поскольку $K(t)g_j \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}$ и пространство $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}$ — полное пространство, то $K(t)g \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}$. Непрерывность доказывается с помощью выкладок, аналогичных проведённым в доказательстве леммы 3.3.

Для доказательства второй части леммы используем тождество

$$(E-R)^{-1}u = u + Ru + R^2u + \ldots .$$

Для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $j_0 \in \mathbb{Z}_+$, что

$$\Big|\sum_{j=j_0}^{+\infty} R^j u\Big|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}} < \varepsilon.$$

Остаётся заметить, что $u + Ru + \ldots + R^{j_0-1}u \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\infty,k}$. Лемма 3.3′ доказана. □

Лемма 3.4. *При достаточно большом $m>0$*

$$W_2^m(\mathbb{R}^n)^l \subset D(\mathcal{A}_2).$$

Доказательство. Используя стандартную технику теории псевдодифференциальных операторов (см., например, [31]), для достаточно большого $m>0$ устанавливаем неравенство

$$|Au|_{L_2(\mathbb{R}^n)^l} \leqslant M|u|_{W_2^m(\mathbb{R}^n)^l}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l. \tag{3.8}$$

Поскольку $\mathcal{A}_2$ — замкнутый оператор, для доказательства леммы достаточно для $u \in W_2^m(\mathbb{R}^n)^l$ построить последовательность $u_1, u_2, \ldots$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$ так, чтобы $u_j \to u$ в $L_2(\mathbb{R}^n)^l$ и

$$\lim_{i,j\to+\infty} |Au_i - Au_j|_{L_2(\mathbb{R}^n)^l} = 0.$$

Для этого, согласно (3.8), достаточно построить последовательность $u_1, u_2, \ldots$ так, чтобы она сходилась к вектор-функции $u(x)$ по норме в $W_2^m(\mathbb{R}^n)^l$. □

Пусть $J(t)$, $K(t)$, $0<t<T$, — операторы, определённые как в разделе 2.

Лемма 3.5. *При достаточно малом $T > 0$ выполняется операторное равенство*

$$\Gamma(t) = J(t) + \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)K(\tau)\,d\tau, \quad 0 < t < T. \tag{3.9}$$

Доказательство. Выберем $T > 0$ так, чтобы выполнялись (см. раздел 2) оценки

$$\|J(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)^l \to L_2(\mathbb{R}^n)^l} \leqslant M, \tag{3.10}$$

$$\|K(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)^l \to L_2(\mathbb{R}^n)^l} \leqslant Mt^{-\kappa}, \quad 0 < t < T, \tag{3.11}$$

где $0 < \kappa < 1$.

Так как в обеих частях равенства (3.9) соответствующие оператор-функции являются равномерно ограниченными в $[0, T]$ по операторной норме (см. (3.6)), достаточно показать, что

$$\Gamma(t)g = J(t)g + \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)K(\tau)g\,d\tau, \quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l.$$

Обозначим

$$u_\varepsilon(t) = \Gamma(t)g - J(t)g - \int\limits_\varepsilon^t \Gamma(t-\tau)K(\tau)g\,d\tau,$$

где $\varepsilon \in (0, T)$. Выберем число $\mu > 0$ достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство

$$2\operatorname{Re}(\mathcal{A}_2 u, u) \geqslant -\mu(u, u) \quad \text{для всех} \quad u \in D(\mathcal{A}_2).$$

Применяя лемму 3.4, в силу (3.5), (3.5′), (3.7′) получим

$$\int\limits_\varepsilon^t \left|\left(\frac{d}{dt}\Gamma(t-\tau)\right)K(\tau)g\right|_{L_2(\mathbb{R}^n)^l} d\tau = \int\limits_\varepsilon^t |\mathcal{A}_2\Gamma(t-\tau)K(\tau)g|_{L_2(\mathbb{R}^n)^l}\,d\tau = $$
$$= \int\limits_\varepsilon^t |\Gamma(t-\tau)\mathcal{A}_2K(\tau)g|_{L_2(\mathbb{R}^n)^l}\,d\tau < +\infty.$$

Легко проверить на основании (3.5), (3.5′) и определения операторной функции $K(t)$, что имеют место соотношения

$$\int\limits_\varepsilon^t \frac{d}{d\tau}\bigl\{e^{-\mu\tau}\bigl(u_\varepsilon(\tau), u_\varepsilon(\tau)\bigr)\bigr\}d\tau =$$
$$= -\mu\int\limits_\varepsilon^t e^{-\mu t}\bigl(u_\varepsilon(\tau), u_\varepsilon(\tau)\bigr)d\tau + 2\operatorname{Re}\int\limits_\varepsilon^t e^{-\mu t}\left(\frac{d}{d\tau}u_\varepsilon(\tau), u_\varepsilon(\tau)\right)d\tau =$$
$$= -\mu\int\limits_\varepsilon^t e^{-\mu t}\bigl(u_\varepsilon(\tau), u_\varepsilon(\tau)\bigr)d\tau - 2\operatorname{Re}\int\limits_\varepsilon^t e^{-\mu t}\bigl(\mathcal{A}_2 u_\varepsilon(\tau), u_\varepsilon(\tau)\bigr)d\tau \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$e^{-\mu t}|u_\varepsilon(t)|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)^l} \leqslant e^{-\mu\varepsilon}|u_\varepsilon(t)|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)^l} = e^{-\mu\varepsilon}|\Gamma(t)g - J(t)g|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)^l}.$$

Таким образом (см. (3.5″) и лемму 2.6),

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|u_\varepsilon(t)|_{L_2(\mathbb{R}^n)^l} = 0.$$

Лемма доказана. □

6. Принимая $\Gamma(t)$ за неизвестную оператор-функцию, решим уравнение (3.9) относительно $\Gamma(t)$ в $\mathcal{H}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, методом итерации. Решение обозначим через $\Gamma_{p,k}(t)$.

Положим $\Gamma_0(t) = J(t)$ и далее по индукции

$$\Gamma_{j+1}(t) = J(t) + \int\limits_0^t \Gamma_j(t-t')K(t')\,dt', \quad j = 0, 1, 2, \dots .$$

Имеем

$$\Gamma(t) = J_j(t) + \int\limits_0^t \Gamma(t-t')K_j(t')\,dt', \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

где $K_0(t) = K(t)$, а остальные $K_j(t)$ определяются по индукции:

$$K_{j+1}(t) = \int\limits_0^t K(t-t')K_j(t')\,dt', \quad j = 0, 1, 2, \dots .$$

Очевидно, что

$$\Gamma(t) = J(t) + J * K + \ldots + J * \underbrace{K * \ldots * K}_{j \text{ раз}} + \Gamma * \underbrace{K * \ldots * K}_{j+1 \text{ раз}} =$$

$$= J(t) + J * K + \ldots + J * K_{j-1} + \Gamma * K_j = \Gamma_j(t) + \Gamma * K_j,$$

$$\Gamma_j(t) = J(t) + J * K + \ldots + J * K_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots .$$

Легко проверить, что если при некотором достаточно малом $T' > 0$ сходится ряд

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|K_j(t)\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}} \leqslant Mt^{-k}, \quad 0 < t < T', \quad 0 < k < 1,$$

и

$$t^k\|K_j(t)\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}} \rightrightarrows 0, \quad j \to +\infty,$$

равномерно на $(0, T')$, то выполняется равенство

$$\Gamma(t) = J(t) + \int\limits_0^t J(t-\tau)\Phi_\tau\,d\tau, \quad 0 < t < T',$$

где операторная функция $\Phi(t)$ определяется по формуле

$$\Phi(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} K_j(t), \quad 0 < t < T'.$$

Следующая лемма стандартным образом (см., например, [7, § 4]) устанавливается на основании оценки

$$\|K(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant Mt^{-\kappa}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < \kappa < 1.$$

Лемма 3.6. *Существует достаточно малое число $T' > 0$, такое что*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \|K_j(t)\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}} \leqslant M_l t^{-\kappa}, \quad 0 < t \leqslant T', \quad l = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $M_l \to +\infty$, и оператор-функция $\Gamma(t) = \Gamma_{p,k}(t)$ — решение (3.9) *в $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$ — определяется в $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$ через $\Phi(t)$ следующим образом*:

$$\Gamma_{p,k}(t) = J(t) + \int_0^t J(t-\tau)\Phi(\tau)\,d\tau. \tag{3.12}$$

Из этого представления, в частности, следует оценка

$$\|\Gamma_{p,k}(t)\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}} \leqslant M, \quad 0 < t < T'.$$

Лемма 3.7. *Для $g \in \mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, вектор-функция $K_j(t)g$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, сильно непрерывна на отрезке $(0, T)$ по норме $|\cdot|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}}$.*

Доказательство проведём методом индукции по $j = 0, 1, 2, \ldots$, вначале для $p < +\infty$. Для $j = 0$ это утверждение доказано в лемме 3.3′.

Пусть вектор-функция $K_j(t)g$ непрерывна в $(0, T)$, $j \geqslant 1$. Тогда

$$K_{j+1}(t)g = \int_0^t K_j(t-\tau)K(\tau)g\,d\tau.$$

Поскольку

$$\|K(\tau)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M\tau^{-\kappa},$$
$$\|K_j(t-\tau)\|_{\mathcal{H}_{p,k}\to\mathcal{H}_{p,k}} \leqslant M(t-\tau)^{-\kappa}, \quad 0 < k < 1,$$

то достаточно доказать непрерывность в точке $\tau \in (0, T)$ вектор-функции

$$R(t,\tau) = K(t-\tau)K(\tau)g.$$

Имеем

$$R(t, \tau + \Delta\tau) - R(t,\tau) =$$
$$= \big(K(t-\tau-\Delta\tau) - K(t-\tau)\big)g_1 + K(t-\tau)\big(K(\tau+\Delta\tau) + K(\tau)\big)g.$$

Поскольку $K(t-\tau)$ — ограниченный оператор и $g_1 \in \mathcal{H}_{p,k}$, то

$$\{R(t,\tau+\Delta\tau)-R(t,\tau)\} \to 0$$

в пространстве $\mathcal{H}_{p,k}$.

Аналогично доказывается непрерывность в случае $p=+\infty$. Из равенства

$$\Phi(t)=\sum_{i=1}^{+\infty} K_j(t)$$

и соответствующих оценок для норм операторов $K_j(t)$ и непрерывности $K_j(t)g$, $j=0,1,2,\ldots$, выводится сильная непрерывность $\Phi(t)g$, $0<t<T$, в $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, $g\in\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$.

Продолжим оператор $\Gamma_{p,k}(t)$ с $(0,T']$ в $(T',+\infty)$ следующим образом. Пусть $t=jT'+t'$, где $j\in\mathbb{Z}_+$, $t'\in(0,T')$. Тогда

$$\Gamma_{p,k}(t)=\Gamma_{p,k}(T')^j\Gamma_{p,k}(t'). \tag{3.12$'$}$$

Очевидно, что при $p=2$, $k(x)\equiv 1$ имеем $\Gamma_{p,k}(t)\equiv e^{-t\mathcal{A}_2}$ (см. п. 4).

Далее имеем для $0<t<+\infty$

$$\|\Gamma_{p,k}(t')\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}}\leqslant c^j\|\Gamma_{p,k}(t)\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}},\quad c=\|\Gamma_{p,k}(T')\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}},\quad j=\left[\frac{t}{T'}\right].$$

Следовательно, при некотором $\omega'\geqslant 0$ справедлива оценка

$$\|\Gamma_{p,k}(t)\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}}\leqslant Me^{\omega' t}t^{-\kappa},\quad 0<t<+\infty. \tag{3.12$''$}$$

Лемма 3.8. *Операторная функция $\Gamma_{p,k}(t)$, $t>0$, образует сильно непрерывную полугруппу в $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$.*

Доказательство. Для $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$ имеем

$$\Gamma_{p,k}(t)g=e^{-t\mathcal{A}_2}g.$$

Следовательно, для $t,t'>0$

$$\Gamma_{p,k}(t+t')g=\Gamma_{p,k}(t)\Gamma_{p,k}(t')g. \tag{3.13}$$

Поскольку $|J(t)g-g|_{\mathcal{H}_{p,k}}\to 0$, $t\to 0+$, то согласно (3.12) имеем

$$\lim_{t\to 0+}|\Gamma_{p,k}(t)g-g|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}}=0. \tag{3.14}$$

Так как $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$ плотно в $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, $1\leqslant p<+\infty$, с учётом оценки (3.12$''$) получаем, что последнее равенство справедливо для всех $g\in\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$. Отсюда с учётом (3.13) получаем непрерывность оператор-функции $\Gamma_{p,k}(t)$ в любой точке $t>0$ справа. Докажем непрерывность $\Gamma_{p,k}(t)$ в точке $t>0$ слева. Имеем

$$\Gamma_{p,k}(t)g-\Gamma_{p,k}(t-\varepsilon)g=\Gamma_{p,k}(t-\varepsilon)(\Gamma(\varepsilon)g-g),\quad 0<\varepsilon<t.$$

Поскольку

$$\|\Gamma_{p,k}(t-\varepsilon)\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}}\leqslant M$$

равномерно по $\varepsilon \in (0,t)$, то в силу (3.14)

$$|\Gamma_{p,k}(t)g - \Gamma_{p,k}(t-\varepsilon)g|_{\mathcal{H}_{p,k}} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.9. *Оператор $-\mathcal{A}_{p,k}$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы $\Gamma_{p,k}(t)$, $1 \leqslant p < +\infty$.*

Доказательство. Обозначим через $-\mathring{\mathcal{A}}_{p,k}$ инфинитезимальный производящий оператор в $\mathcal{H}_{p,k}$ полугруппы $\Gamma_{p,k}(t)$, $0 < t < +\infty$. Докажем, что

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l \subset D(\mathring{\mathcal{A}}_{p,k}), \quad 1 \leqslant p \leqslant 2.$$

Линейное многообразие $D(\mathring{\mathcal{A}}_{p,k})$ состоит (см. [23, гл. 4, § 13.5]) из элементов $g \in \mathcal{H}_{p,k}$, таких что существует сильный предел в $\mathcal{H}_{p,k}$

$$F = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\Gamma_{p,k}(\Delta t) - E]g,$$

который и принимается за $\mathcal{A}_2 g$.

Пусть $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$. Тогда

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\Gamma_{p,k}(t) - E]g = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[J(t) - E]g.$$

Поскольку $-\mathcal{A}_2$ — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\Gamma(t)$ и множество

$$\bigcup_{0<t<T} \{\operatorname{supp} J(t)g\}$$

ограниченно, то из существования последнего предела в $\mathcal{H}_2$ следует его существование в $\mathcal{H}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant 2$. Таким образом, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l \subset D(\mathring{\mathcal{A}}_{p,k})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, и $\mathcal{A}^0_{p,k}u = \mathcal{A}_{p,k}u$ для всех $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$. Поскольку при достаточно больших $\lambda > 0$ существуют непрерывные обратные $(\mathring{\mathcal{A}}_{p,k} + \lambda E)^{-1}$, $(\mathcal{A}_{p,k} + \lambda E)^{-1}$, то, используя определение оператора $\mathcal{A}_{p,k}$, получаем, что $\mathring{\mathcal{A}}_{p,k} = \mathcal{A}_{p,k}$.

Пусть теперь $p \in (2, +\infty)$. Оператор $\mathcal{A}^*_{p,k}$ действует в $\mathcal{H}_{q,k^{-1}}$, $1/p + 1/q = 1$, и совпадает с замыканием $\mathcal{A}'_{q,k^{-1}}$ в $\mathcal{H}_{q,k^{-1}}$ оператора

$$(A'u)(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)} a^*\bigl((1-\tau)x + \tau y, s\bigr) u(y)\, dy \biggr) ds,$$

$$D(A') = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l,$$

который является псевдодифференциальным оператором с $(1-\tau)$-символом $a^*(x,s)$. Символ $a^*(x,s)$ также удовлетворяет условиям вида (1.1)—(1.3), (1.5).

Пусть $\Gamma'_{q,k^{-1}}(t)$, $0<t<+\infty$, — сильно непрерывная полугруппа в $\mathcal{H}_{q,k^{-1}}$ с инфинитезимальным производящим оператором $-\mathcal{A}'_{q,k^{-1}}$. Поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset D(\mathcal{A}'_{q,k^{-1}})$, то $D(\mathcal{A}'_{q,k^{-1}})$ плотно в $(\mathcal{H}_{p,k})^* = \mathcal{H}_{q,k^{-1}}$. Применяя теорему Коматсу (см. [16, гл. IX, § 13]), получим, что оператор-функция $\Gamma_{p,k}(t) = \bigl(\Gamma'_{q,k^{-1}}(t)\bigr)^*$,

$0 < t < +\infty$, является сильно непрерывной полугруппой в $\mathcal{H}_{p,k}$ с производящим оператором $(\mathcal{A}'_{q,k^{-1}})^* = \mathcal{A}_{p,k}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.10. *Семейство операторов $\Gamma_{\infty,k}(t)$, $t \geqslant 0$, которое задаётся в $\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}$ по правой части* (3.12) *при $0 < t < T'$, где $T' > 0$ — достаточно малое число, и по формулам, аналогичным* (3.12′)*, при $t \geqslant T'$, определяет сильно непрерывную полугруппу в $\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}$ с инфинитезимальным производящим оператором $-\tilde{\mathcal{A}}_{\infty,k}$.*

Доказательство. Легко проверить, что правая часть (3.12) переводит $\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}$ в себя, и поэтому таким же свойством обладает оператор $\Gamma_{\infty,k}(t)$ и для $t \geqslant T'$. Неравенство

$$\|\Gamma_{\infty,k}(t)\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}} \leqslant Me^{\omega' t}t^{-\kappa}, \quad 0 < t < \infty, \quad \kappa \in (0,1), \tag{3.15}$$

следует из (3.12″).

Из соотношения

$$|J(t)u - u|_{\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}} \to 0, \quad t \to 0+, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l,$$

по непрерывности, ввиду оценки

$$\|J(t)\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}} \leqslant M, \quad 0 < t < T,$$

и включения $J(t)u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$, выводим

$$\|J(t)u - u\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}} \to 0, \quad t \to 0+, \quad \text{для всех} \quad u \in \mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}.$$

Следовательно (см. (3.12)),

$$\|\Gamma_{\infty,k}(t)u - u\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}} \to 0, \quad t \to 0+, \quad \text{для всех} \quad u \in \mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}. \tag{3.16}$$

Для $t > 0$ согласно (3.15), (3.16) имеем

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0+} |\Gamma_{\infty,k}(t+\varepsilon)u - \Gamma_{\infty,k}(t)u|_{\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \|\Gamma_{\infty,k}(t)\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}} \lim_{\varepsilon\to 0+} |\Gamma_{\infty,k}(\varepsilon)u - u|_{\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}} = 0, \\
&\lim_{\varepsilon\to 0+} |\Gamma_{\infty,k}(t)u - \Gamma_{\infty,k}(t-\varepsilon)u|_{\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0+} \|\Gamma_{\infty,k}(t-\varepsilon)\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}} |\Gamma_{\infty,k}(\varepsilon) - u|_{\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}} = 0,
\end{aligned}$$

что доказывает сильную непрерывность операторной функции $\Gamma_{\infty,k}(t)$ в точке t соответственно справа и слева.

Таким образом, $\Gamma_{\infty,k}(t)$, $t \geqslant 0$, — сильно непрерывная полугруппа в $\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}$. Обозначим через $-\tilde{\mathcal{A}}_{\infty,k}$ её инфинитезимальный оператор. Докажем, что $\tilde{\mathcal{A}}_{\infty,k} = \mathcal{A}_{\infty,k}$. Для этого достаточно показать, что

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l \subset D(\tilde{\mathcal{A}}_{\infty,k}), \quad \tilde{\mathcal{A}}_{\infty,k}|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l} = A_0,$$

потому что тогда в силу замкнутости оператора $\tilde{\mathcal{A}}_{\infty,k}$ и обратимости оператора $\mathcal{A}_{\infty,k} + \lambda E$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda'$,

$$\mathcal{A}_{\infty,k} = \tilde{\mathcal{A}}_{\infty,k}.$$

Пусть $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$. Тогда

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{\Gamma_{\infty,k}(t)g - g}{t} - A_0 g \right|_{\mathcal{H}_{2,k_1}} = 0,$$

где $k_1(x) = k(x)(1+|x|^2)^{2n}$, потому что $\Gamma_{\infty,k}(t)g = \Gamma_{2,k_1}(t)g$, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^l$.

Учитывая, что $|u|_{\mathcal{H}_{2,k_1}} \geqslant |u|_{\mathcal{H}_{\infty,k}}$, находим, что

$$\lim_{t\to 0+} \left| \frac{\Gamma_{\infty,k}(t)g - g}{t} - A_0 g \right|_{\mathring{\mathcal{H}}_{\infty,k}} = 0.$$

Следовательно, $g \in D(\tilde{\mathcal{A}}_{\infty,k})$, $A_0 g = \tilde{\mathcal{A}}_{\infty,k} g$. Лемма доказана. □

7. Подытожим полученные выше результаты в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (1.1)—(1.5). *Тогда оператор* $-\mathcal{A}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *есть инфинитезимальный производящий сильно непрерывной полугруппы операторов в* $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$. *При надлежащем выборе чисел* $\nu, T > 0$ *справедливо интегральное представление*

$$e^{-t\mathcal{A}_{p,k}} = J(t) + \int_0^T J(t-\tau)\Phi(\tau)\,d\tau, \quad 0 < t < T, \tag{3.17}$$

где операторная функция $\Phi(t)$ *удовлетворяет оценке*

$$\|\Phi(t)\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}} \leqslant M t^{-\kappa}, \quad 0 < t < T, \tag{3.18}$$

с некоторым $\kappa \in (0,1)$.

8. В заключение этого раздела исследуем полугруппу $e^{-z\mathcal{A}_{p,k}}$ на аналитичность в угле.

Предположим, что множество

$$X = \{\langle a(x,s)h, h\rangle_{\mathbf{C}^l} : x, s \in \mathbb{R}^n,\ h \in \mathbf{C}^l\}$$

лежит в угле $|\arg z| \leqslant \alpha$, $\alpha < \pi/2$. Тогда выполняется неравенство

$$c'|z|a'(x,s) \leqslant \operatorname{Re}\{z a(x,s)\}, \quad c' > 0,$$

для $z \in \mathbf{C}$, $|\arg z| \leqslant \alpha'$, $\alpha' < \pi/2 - \alpha$. Соответственно, имеем

$$|e^{-za(x,s)}| \leqslant e^{-c'|z|a'(x,s)}.$$

Беря за основу это неравенство вместо неравенства

$$|e^{-ta(x,s)}| \leqslant e^{-ta'(x,s)},$$

которое применялось в оценках операторов $J(t)$, $K(t)$, мы приходим к следующему результату. Положим

$$J(z) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \theta_i(\operatorname{Re} z)\psi_{ij} J_{ij}(z)\varphi_{ij},$$

где $J_{ij}(z)$ — интегральный оператор с ядром

$$J_{ij}(z,x,y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)} e^{-za(x_{ij},s)}\, ds,$$

а $x_{ij} \in \operatorname{supp} \varphi_{ij}$ — фиксированные точки.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (1.1)—(1.5) *и*

$$X \subset \{z \in \mathbf{C}^l \colon |\arg z| \leqslant \alpha\}, \quad \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

При $p = 1, +\infty$ дополнительно предполагается, что семейство вектор-функций

$$\Omega_{z,\eta}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{isx} e^{-za(y,s)}\, ds, \quad |\arg z| \leqslant \alpha, \quad |z| < 1, \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

образует ограниченное множество в пространстве $\mathcal{H}_1$. Тогда полугруппа $e^{-z\mathcal{A}_{p,k}}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, аналитична в угле $|\arg z| < \alpha'$, $\alpha' < \pi/2 - \alpha$. При надлежащем выборе чисел $\nu, T > 0$ справедливо интегральное представление

$$e^{-z\mathcal{A}_{p,k}} = J(z) + \int\limits_0^z J(z-z')\Phi(z')\, dz', \quad |z| < T, \quad |\arg z| < \alpha', \tag{3.19}$$

и оценка

$$\|\Phi(z)\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k} \to \mathring{\mathcal{H}}_{p,k}} \leqslant M|z|^{-\kappa}, \quad |z| < T, \quad |\arg z| < \alpha', \tag{3.20}$$

где $\kappa \in (0,1)$, а интеграл берётся по прямолинейному отрезку, соединяющему точки 0, z.

Доказательство основано на оценках оператора $K(z) = -(d/dz + \mathcal{A}_{p,k})J(z)$.

Отметим, что операторная функция $J(z)$ не является голоморфной операторной функцией, поскольку $\theta_i(z)$ не аналитическая функция. Поэтому в конструкции операторной функции $K(z)$ производную d/dz нужно брать по конкретному направлению; а именно производная d/dz берётся по направлению от 0 до z, что соответствует выбору пути, по которому берётся интеграл в (3.19).

4. Асимптотическое поведение собственных значений оператора $\mathcal{A}_{p,k}$

1. Пусть выполнены условия (1.1)—(1.5) и

$$\lim_{x\to\infty} a'(x,s) = +\infty \tag{4.1}$$

равномерно по $s \in \mathbb{R}^n$. Тогда оператор

$$(\mathcal{A}_{p,k} + \lambda E)^{-1} \colon \mathring{\mathcal{H}}_{p,k} \to \mathring{\mathcal{H}}_{p,k}, \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty, \tag{4.2}$$

является вполне непрерывным оператором при достаточно больших $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$.

Для доказательства этого утверждения, в силу утверждения 3.3, достаточно показать, что $J(t)\colon \mathring{\mathcal{H}}_{p,k} \to \mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$, $t > 0$, — вполне непрерывный оператор. Каждое слагаемое суммы

$$J(t) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \theta_i(t)\psi_{ij}J_{ij}(t)\varphi_{ij}$$

является интегральным оператором с «финитным» C^∞-ядром и поэтому является вполне непрерывным оператором из $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$ в $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$. Остаётся показать, что

$$\lim_{j\to\infty} \|\psi_{ij}J_{ij}(t)\varphi_{ij}\|_{\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}\to\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}} = 0.$$

Для этого применяется неравенство

$$|J_{ij}(t,x,y)| \leqslant r(x_{ij})|x-y|^{-\mu}t^{-3/4},$$

где $J_{ij}(t,x,y)$ — ядро оператора $J_{ij}(t)$, $\mu < n$, $r(x)$ — функция, убывающая к нулю на бесконечности. Доказательство аналогично доказательству неравенства (4.5) (см. ниже п. 3).

2. Число $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ называется собственным значением оператора $\mathcal{A}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, если найдётся элемент $0 \neq u_0 \in D(\mathcal{A}_{p,k})$, такой что $\mathcal{A}_{p,k}u_0 = \lambda_0 u_0$. Последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_\mu \in D(\mathcal{A}_{p,k})$ называется последовательностью присоединённых к u_0 элементов, если

$$\mathcal{A}_{p,k}u_1 = \lambda_0 u_1 + u_0, \quad \mathcal{A}_{p,k}u_2 = \lambda_0 u_2 + u_1, \ldots, \quad \mathcal{A}_{p,k}u_\mu = \lambda_0 u_\mu + u_{\mu-1}.$$

Размерность $\nu(\lambda_0)$ подпространства, натянутого на всевозможные последовательности собственных и присоединённых элементов, отвечающих собственному значению λ_0, называется алгебраической кратностью собственного значения λ_0.

В случае вполне непрерывности оператора (4.2) спектр оператора $\mathcal{A}_{p,k}$ состоит из последовательности собственных значений оператора $\mathcal{A}_{p,k}$ конечных алгебраических кратностей с единственной возможной предельной точкой на бесконечности.

Обозначим через $N(\lambda)$, $\lambda > 0$, число собственных значений оператора $\mathcal{A}_{p,k}$, расположенных в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \lambda$, с учётом их алгебраических кратностей.

Введём в рассмотрение функцию

$$\rho(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho'(x,s;\lambda)\,dx\,ds,$$

где $\rho'(x,s;\lambda)$ обозначает число собственных значений матрицы $\operatorname{Re} a(x,s)$, не превосходящих λ, с учётом их кратностей.

Предположим, что выполнены условия (1.1)—(1.5), (4.1). Пусть найдётся число $\delta > 0$, такое что

$$a'(x,s) \geqslant c(1+|x|)^\delta, \tag{4.3}$$

и

$$\rho(\lambda) \sim \tilde{\rho}(\lambda), \quad \lambda \to +\infty, \tag{4.4}$$

где $\tilde{\rho}(\lambda) \in C^1(R^+)$ — некоторая неубывающая функция, такая что

$$\lambda\big|\big(\tilde{\rho}(\lambda)\big)'_\lambda\big| \leqslant M\tilde{\rho}(\lambda), \tag{4.4$'$}$$

Предположим, что

$$\lim_{x\to+\infty} |\operatorname{Im} a(x,s)| a'(x,s)^{-1} = 0$$

равномерно по $s \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 4.1. *При выполнении перечисленных условий справедлива асимптотическая формула*

$$N(\lambda) \sim \rho(\lambda), \quad \lambda \to +\infty.$$

Замечание. В случае $p = 2$ для справедливости теоремы условия (1.3), (1.5) являются излишними (см. ниже п. 5).

3. В этом пункте мы сведём доказательство теоремы 4.1 к случаю $p = 2$, $k(x) \equiv 1$. Для этого понадобятся некоторые оценки ядра $J(t,x,y)$, $t > 0$, оператора

$$J(t) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \theta_i(t)\psi_{ij}J_{ij}(t)\varphi_{ij}.$$

Используя (2.4$'$) и условия (1.2), (1.3), (4.1), для ядра

$$J_{ij}(t,x,y) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)}e^{-ta(x_{ij},s)}\,ds$$

при $\mu = n-1, n$ получим оценку

$$|x-y|^\mu |J_{ij}(t,x,y)| \leqslant \sum_{|\beta|=\mu}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |D_s^\beta e^{-ta(x_{ij},s)}|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant Me^{-\frac{tc}{4}(1+|x_{ij}|)^\delta}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|s|)^{-\mu}e^{-\frac{t}{4}a'(x_{ij},s)}\,ds \leqslant Mt^{-\frac{n-\mu}{\varepsilon}}e^{-\frac{ct}{4}(1+|x_{ij}|)^\delta}.$$

Очевидно, что это неравенство верно и для промежуточных значений $\mu \in (n-1,n)$. Следовательно,

$$|J_{ij}(t,x,y)| \leqslant M|x-y|^{-\mu}t^{-\frac{n-\mu}{\varepsilon}-\frac{1}{2}}(1+|x_{ij}|)^{-\frac{\delta}{2}}. \tag{4.5}$$

При $|x-y| > c'$, где c' — достаточно большое число, $J_{ij}(t,x,y) = 0$. Число $\mu \in (n-1,n)$ фиксируем так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{n-\mu}{\varepsilon} < \frac{1}{4}.$$

Лемма 4.1. *Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_N$ — последовательность собственных и присоединённых элементов оператора $\mathcal{A}_{p,k}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, отвечающих собственному значению λ_0. Тогда $u_j \in D(\mathcal{A}_{p,k_1})$, $j = 1,\ldots,N$, где*

$$k(x)(1+|x|)^{-\delta/4} \leqslant k_1(x) \leqslant k(x)(1+|x|)^{\delta/4},$$

и цепочка $u_0, u_1, \ldots, u_N$ *есть последовательность собственных и присоединённых элементов оператора* $\mathcal{A}_{p,k_1}$*, отвечающих собственному значению* λ_0.

Доказательство. Достаточно показать, что $u_j \in D(\mathcal{A}_{p,k_1})$, $j = 0, 1, \ldots, N$. Область определения оператора $\mathcal{A}_{p,k}$ в силу утверждения 3.3 совпадает с областью значений оператора

$$\int\limits_0^t e^{-\tau\lambda} J(\tau)\, d\tau, \tag{4.6}$$

где $\lambda > 0$ — достаточно большое число, а $t > 0$ — достаточно малое число.

Согласно (4.5) оператор

$$(1 + |x|)^{\delta/2} \int\limits_0^t e^{-\tau\lambda} J(\tau)\, d\tau$$

непрерывно действует из $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$ в $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$. Таким образом, оператор (4.6) непрерывно действует из $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k}$ в $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k_1}$. Поэтому $D(\mathcal{A}_{p,k}) \subset \mathring{\mathcal{H}}_{p,k_1}$ и все элементы $u_0, u_1, \ldots, u_N$ принадлежат $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k_1}$. Учитывая, что правые части равенств

$$(\mathcal{A}_{p,k} + \tilde{\lambda} E) u_0 = (\lambda_0 + \tilde{\lambda}) u_0,$$
$$(\mathcal{A}_{p,k} + \tilde{\lambda} E) u_j = \lambda_0 u_j + \tilde{\lambda} u_j + u_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

принадлежат $\mathring{\mathcal{H}}_{p,k_1}$, и выбирая $\tilde{\lambda} > 0$ в соответствии с утверждением 3.3 достаточно большим, чтобы, в частности, существовали непрерывные обратные $(\mathcal{A}_{p,k} + \tilde{\lambda} E)^{-1}$, $(\mathcal{A}_{p,k_1} + \tilde{\lambda} E)^{-1}$, находим, что

$$u_0 = (\mathcal{A}_{p,k} + \tilde{\lambda} E)^{-1} (\lambda_0 u_0 + \tilde{\lambda} u_0) = (\mathcal{A}_{p,k_1} + \tilde{\lambda} E)^{-1} (\lambda_0 u_0 + \tilde{\lambda} u_0),$$

$$u_j = (\mathcal{A}_{p,k} + \tilde{\lambda} E)^{-1} (\lambda_0 u_j + \tilde{\lambda} u_j + u_{j-1}) =$$
$$= (\mathcal{A}_{p,k_1} + \tilde{\lambda} E)^{-1} (\lambda_0 u_j + \tilde{\lambda} u_j + u_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, N.$$

Лемма доказана. □

Поскольку функция $k(x)$ при некотором $\delta' > 0$ удовлетворяет неравенству

$$M_1 (1 + |x|)^{-\delta'} \leqslant k(x) \leqslant M_2 (1 + |x|)^{\delta'},$$

то, применяя лемму 4.1 достаточно большое число раз, сводим доказательство теоремы к случаю $k(x) \equiv 1$.

Докажем, что если $u_0, u_1, \ldots, u_N \in \mathcal{H}_{p_1}$ — последовательность собственных и присоединённых элементов оператора $\mathcal{A}_{p_1}$, $1 \leqslant p_1 \leqslant +\infty$, то $u_0, u_1, \ldots, u_N$ есть также последовательность собственных и присоединённых элементов оператора $\mathcal{A}_{p_2}$ при любом другом $1 \leqslant p_2 \leqslant +\infty$. Рассмотрим вначале случай $p_2 < p_1$. Применяя достаточно большое число раз лемму 4.1, находим, что $u_0, u_1, \ldots, u_N$ есть последовательность собственных и присоединённых элементов оператора $\mathcal{A}_{p_2,k}$, где

$$k(x) = (1 + |x|)^{\nu p_1 / p_2^2}, \quad \nu > 0.$$

Используя неравенство

$$|u|^{p_2}_{\mathcal{H}_{p_2}} \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{\nu\frac{p_1}{p_2}}|u(x)|^{p_2}\,dx\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-\nu\frac{p_1}{p_1-p_2}}\,dx\right)^{\frac{p_1-p_2}{p_1}},$$

$\nu > n(p_1-p_2)/p_1$, как в лемме 4.1 устанавливаем, что $u_0,u_1,\dots,u_N$ есть последовательность собственных и присоединённых элементов оператора $\mathcal{A}_{p_2}$. В случае $p_2 < p_1 = +\infty$ по лемме 4.1 последовательность $u_0,\dots,u_N$ будет последовательностью собственных и присоединённых элементов оператора $\mathcal{A}_{\infty,k'}$, $k'(x) = (1+|x|)^{2n}$, и следовательно, $u_j \in D(\mathcal{A}_{p'})$, $j=0,\dots,N$, при любом $p' \in [1,+\infty)$ (в частности, для $p' = p_2$).

Пусть теперь $p_1 < p_2 < +\infty$. В этом случае применяется неравенство Соболева

$$|r^{-\mu} * \varphi|_{L_{q_1}} \leqslant M|\varphi|_{L_q},$$

где $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} + \frac{\mu}{n} - 1 > 0$. Из оценки (4.5) и неравенства Соболева следует, что $D(\mathcal{A}_{p_1}) \subset \mathcal{H}_{p'_1}$, где $\frac{1}{p'_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{\mu}{n} - 1 > 0$. Напомним, что число $\mu \in (n-1,n)$ фиксировано так, что $\frac{n-\mu}{\varepsilon} < \frac{1}{4}$.

Так же, как во второй части доказательства леммы 4.1, устанавливаем, что $u_0,u_1,\dots,u_N$ есть последовательность собственных и присоединённых элементов оператора $\mathcal{A}_{p'_1}$.

Если $p'_1 < p_2$, то имеем

$$D(\mathcal{A}_{p'_1}) \subset \mathcal{H}_{p'_2}, \quad \frac{1}{p'_2} = \frac{1}{p'_1} + \frac{\mu}{n} - 1 > 0,$$

и аналогично $u_0,u_1,\dots,u_N$ будет последовательностью собственных и присоединённых элементов оператора $\mathcal{A}_{p'_2}$. Повторяя эти выкладки достаточно большое число раз, мы получим, что $u_0,u_1,\dots,u_N$ будет последовательностью собственных и присоединённых элементов оператора $\mathcal{A}_{p'}$ с некоторым $p' \geqslant p_2$.

Учитывая, что случай $p_2 < p_1$ нами уже рассмотрен, отсюда получаем, что $u_0,u_1,\dots,u_N$ будет также последовательностью собственных и присоединённых элементов оператора $\mathcal{A}_{p_2}$.

В заключение рассмотрим случай $p_1 < +\infty$, $p_2 = +\infty$. Мы можем считать, что $u_j \in \mathcal{H}_p$, $j = 0,\dots,N$, для всех $p \in [1,+\infty)$. В силу утверждения 3.3 вектор-функция u_k, $k=0,\dots,N$, представляется в виде

$$u_k = \int\limits_0^T e^{-\lambda t}J(t)g_k\,dt, \quad g_k \in \mathcal{H}_p.$$

Используя условие (1.1), легко показать, что

$$\psi_{ij}(\cdot)\int\limits_{\mathbb{R}^n} J_{ij}(t,\cdot,y)\varphi_{ij}(y)g_k(y)\,dy \in C(\mathbb{R}^n)^l, \quad i,j=1,2,\dots.$$

Поэтому при любом $\varepsilon \in (0,T)$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T} e^{-\lambda t} J(t) g_k \, dt \in C(\mathbb{R}^n)^l.$$

Выбирая число $p > 1$ достаточно большим, из включения $g_k \in \mathcal{H}_p$ и неравенства

$$|J_{ij}(t,x,y)| \leqslant M|x-y|^{-\mu} t^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{ct}{4}(1+|x_{ij}|)^{\delta}}, \quad \mu < n,$$

выводим, что

$$\sup_{|\eta|>R} |\Psi_\eta \psi_{ij} J_{ij}(t) \varphi_{ij} g_k|_{\mathring{\mathcal{H}}_\infty} \to 0, \quad R \to +\infty,$$

где $\Psi_\eta(x) = \Psi(x-\eta)$, а $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — такая неотрицательная функция, что $\Psi(x) = 1$ ($|x| < 1$). Следовательно,

$$\sup_{|\eta|>R} |\Psi_\eta J(t) g_k|_{\mathring{\mathcal{H}}_\infty} \to 0, \quad R \to +\infty,$$

и $J(t) g_k \in \mathring{\mathcal{H}}_\infty$.

Остаётся показать, что

$$\left| \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-\lambda t} J(t) g_k \, dt \right|_{\mathcal{H}_\infty}, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Для этого используется включение $g_k \in \mathcal{H}_p$ при $p > \frac{n}{n-\mu}$ и оценка

$$|J(t,x,y)| \leqslant \begin{cases} M|x-y|^{-\mu} t^{-\frac{3}{4}}, & |x-y| < c, \\ 0, & |x-y| \geqslant c, \end{cases}$$

где $\mu < n$, а $c > 0$ — достаточно большое число.

4. Таким образом, доказательство теоремы 4.1 свелось к случаю $p = 2$, $k(x) \equiv 1$. В этом случае мы можем использовать технику работы [7]. При этом условия (1.3), (1.5) нам не понадобятся и их можно опустить.

Опираясь (см. теорема 3.1) на равенство

$$e^{-t\mathcal{A}} = J(t) + (J * \Phi)(t), \quad 0 < t < T, \tag{4.7}$$

мы так же, как в [7, § 5], устанавливаем следующие оценки, асимптотические при $t \to 0+$:

$$\operatorname{Sp} e^{-tA} = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-t\lambda_j} \sim (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Tr} e^{-ta(x,s)} \, dx \, ds, \tag{4.8}$$

$$|e^{-tA}|_1 \leqslant (2\pi)^{-n} \big(1 + o(1)\big) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |e^{-ta(x,s)}|_2^2 \, dx \, ds. \tag{4.9}$$

Здесь Sp, Tr обозначают соответственно след ядерного оператора в $\mathcal{H}_2$ и след матрицы, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — последовательность собственных значений оператора

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$, занумерованных с учётом их алгебраических кратностей. Под $|\cdot|_1$ понимается ядерная норма оператора в $\mathcal{H}_2$, а под $|\cdot|_2$ — норма Гильберта—Шмидта матрицы.

Следующие асимптотические формулы и равенства нетрудно вывести из условий (4.4′) и (4):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |e^{-ta(x,s)}|_2^2\,dx\,ds \sim \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |e^{-t\operatorname{Re} a(x,s)}|_2^2\,dx\,ds =$$

$$= (2\pi)^{-n}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\lambda}\,d\rho(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Tr} e^{-t\operatorname{Re} a(x,s)}\,dx\,ds, \quad t \to 0+. \tag{4.10}$$

Поскольку сумма модулей собственных значений ядерного оператора не превосходит ядерной нормы оператора, имеем

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |e^{-t\lambda_j}| = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-t\operatorname{Re}\lambda_j} \leqslant |e^{-t\mathcal{A}}|_1.$$

С другой стороны, ввиду (4.8), (4.9), (4.10) справедлива оценка

$$(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Tr} e^{-t\operatorname{Re} a(x,s)}\,dx\,ds \leqslant \bigl(1+o(1)\bigr)\sum_{j=1}^{+\infty} e^{-t\operatorname{Re}\lambda_j}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\lambda}\,dN(\lambda) = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-t\operatorname{Re}\lambda_j} \sim \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\lambda}\,d\rho(\lambda) \sim \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\lambda}\,d\tilde{\rho}(\lambda), \quad t \to 0+.$$

Применяя тауберову теорему Келдыша, получим, что $N(\lambda) \sim \rho(\lambda)$, $\lambda \to +\infty$.

5. В случае самосопряжённого оператора $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$ в $\mathcal{H}_2$ (например, в случае $\tau = 1/2$, $a(x,s) \equiv a^*(x,s)$) представляет интерес исследование асимптотического поведения взвешенного следа (см., например, [2—4, 7, 25, 26])

$$N_h(\lambda) = \operatorname{Sp} h^{1/2} E_\lambda h^{1/2}, \quad \lambda > 0, \tag{4.11}$$

где $h(x)$ — положительная весовая функция, а $\{E_\lambda\}_{\lambda \geqslant \lambda_0}$ — семейство спектральных проекторов оператора $\mathcal{A}$. Если оператор $\mathcal{A}$ имеет дискретный спектр и полную ортонормированную систему собственных элементов $u_1, u_2, \ldots$, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, то

$$N_h(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leqslant \lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x)|u_j(x)|^2\,dx.$$

Отметим, однако, что если весовая функция $h(x)$ достаточно сильно убывает на бесконечности, то функция $N_h(\lambda)$ (4.11) может существовать, даже если спектр оператора $\mathcal{A}$ недискретный.

Предположим, что $h(x)h(y)^{-1} \leqslant M(1+|x-y|)^{\delta'}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\delta' > 0$, и для $|x-y| < 1$

$$|h(x) - h(y)| \leqslant M|x-y|^{\delta''} h(y), \quad \delta'' > 0.$$

Пусть, кроме того, для всех $\lambda > 0$

$$\rho_h(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x)\rho(x, s; \lambda)\, dx\, ds < +\infty,$$

где $\rho(x, s; \lambda)$ обозначает число собственных значений матрицы $\operatorname{Re} a(x, s)$, не превосходящих λ, с учётом их кратностей.

Предположим, что $\rho_h(\lambda) \sim \tilde{\rho}_h(\lambda)$, $\lambda \to +\infty$, где $\tilde{\rho}_h(\lambda)$ — некоторая функция класса $C^1(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющая условию Келдыша

$$\left| \lambda \frac{d}{d\lambda} \tilde{\rho}_h(\lambda) \right| \leqslant M \tilde{\rho}_h(\lambda).$$

При выполнении перечисленных условий справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$ *— самосопряжённый оператор в* $\mathcal{H}_2$. *Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$N_h(\lambda) \sim \rho_h(\lambda), \quad \lambda \to +\infty.$$

Доказательство проводится по схеме [7, § 7] с использованием представлений (4.7).

5. Псевдодифференциальные операторы на компактных многообразиях

1. Пусть $\mathbf{M}$ — компактное n-мерное C^∞-многообразие. Рассмотрим неотрицательные функции $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$, $\{\Psi_j\}_{j=1}^N$, заданные на $\mathbf{M}$ и обладающие следующими свойствами:

а) функции $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$ образуют разбиение единицы многообразия $\mathbf{M}$;

б) функция Ψ_j обращается в 1 в некоторой окрестности носителя $\operatorname{supp} \Phi_j$ функции Φ_j.

Пусть g_j, $j = 1, \ldots, N$, — гомеоморфизм некоторой окрестности W_j множества $\operatorname{supp} \Psi_j$ в открытое ограниченное множество $V_j \subset \mathbb{R}^n$. Указанные гомеоморфизмы всегда можно выбрать так, что в $\mathbf{M}$ удаётся ввести положительную плотность $d\mu$, согласованную с выбранной локальной системой координат. Это означает, что будет иметь место равенство

$$\int\limits_{W_j} v(\mu)\, d\mu = \int\limits_{V_j} (\Pi_j v)(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad v \in L_1(W_j; d\mu),$$

где отображение

$$\Pi_j \colon L_1(W_j; d\mu) \to L_1(V_j), \quad j = 1, \ldots, N,$$

определяется по формуле

$$(\Pi_j v)\big(g_j(\mu)\big) = v(\mu), \quad v \in L_1(W_j; d\mu).$$

Псевдодифференциальный оператор A_0 с τ-символом $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ на $\mathbf{M}$ определяется так, чтобы имело место равенство

$$A_0\Psi_j u = \Pi_j^{-1}\Psi_j' A_j' \Pi_j \Psi_j u, \quad j = 1, \ldots, N, \quad u \in C^\infty(\mathbf{M})^l,$$

где оператор A_j' на вектор-функции $v \in C_0^\infty(V_j)$ действует по формуле

$$(A_j' v)(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{is(x-y)} a_j(\tau x + (1-\tau)y, s) v(y)\, dy \bigg) ds,$$

а функция $\Psi_j' \in C_0^\infty(V_j)$ выбрана так, что $\Psi_j'(x) \geqslant 0$ и $\Psi_j'(x) = 1$ в некоторой окрестности носителя функции $\Psi_j^0 = \Pi_j \Psi_j$.

Очевидно, что

$$A_0 u = \sum_{j=1}^N \Pi_j^{-1}\Psi_j' A_j' \Pi_j \Phi_j u \quad \text{для всех} \quad u \in C^\infty(\mathbf{M})^l.$$

Имеем

$$a_j(x,s) \in C^\infty(\tilde V_j \times \mathbb{R}^n; \operatorname{End} \mathbf{C}^l), \quad \tilde V_j = \bigcup_{x,y \in V_j} [x,y],$$

где $[x,y]$ обозначает «сегмент» $\{x\tau' + (1-\tau')y \colon \tau' \in [0,1]\}$.

Предполагается, что выполнены условия

$$(1+|s|)^\varepsilon \leqslant M a_j'(x,s), \tag{5.1}$$

$$|D_s^\alpha D_x^\beta a_j(x,s)| \leqslant M_{\alpha\beta}\big(a_j'(x,s)\big)^{1-\theta|\alpha|}, \quad \alpha + \beta \neq 0 \tag{5.2}$$

($j = 1, \ldots, N$, $x \in \tilde V_j$, $s \in \mathbb{R}^n$), где $a_j'(x,s)$ обозначает нижнюю грань матрицы $\operatorname{Re} a_j(x,s)$, $0 < \theta$, $0 < \varepsilon$.

Введём в $L_1(\mathbf{M}; d\mu)^l$ оператор

$$J(t) = \sum_{\kappa=1}^N \Psi_\kappa \Pi_\kappa^{-1} \Psi_\kappa' G_\kappa(t) \Pi_\kappa \Phi_\kappa,$$

где

$$G_\kappa(t) = \sum_{i,j=1}^\infty \theta_i(t) \psi_{ij} G_{ij}^{(\kappa)}(t) \varphi_{ij} \chi_\kappa.$$

Здесь θ_i, ψ_{ij}, φ_{ij} — такие же функции, как в предыдущих разделах, χ_κ обозначает характеристическую функцию носителя функции $\Pi_\kappa\Phi_\kappa$. Оператор $G_{ij}^{(\kappa)}(t)$ — псевдодифференциальный оператор в $\mathbb{R}^n$ с символом $e^{-ta_\kappa'(x_{ij},s)}$, где $x_{ij} \in \operatorname{supp}\varphi_{ij}$ — фиксированные точки.

Теорема 5.1. *Замыкание $\mathcal{A}$ оператора A_0 в $\mathcal{H}_2 = L_2(\mathbf{M}; d\mu)^l$ является квази-m-аккретивным оператором с дискретным спектром. При достаточно малом $T > 0$ имеет место представление*

$$e^{-t\mathcal{A}} = J(t) + \int\limits_0^t J(t-t')\Phi(t')\,dt', \quad 0 < t < T,$$

где операторная функция $\Phi(t)$ задана в $\mathcal{H}_2 = L_2(\mathbf{M}; d\mu)^l$ и удовлетворяет оценке

$$\|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2} \leqslant Mt^{-\kappa}$$

с некоторым $\kappa \in (0, 1)$.

Доказательство основано, как и в предыдущих разделах, на оценках нормы оператора

$$K(t) = -\left(\frac{d}{dt} + A_0\right) J(t).$$

При достаточно малых $t \in (0, t')$ можно написать (см. [7, лемма 3.1])

$$\Psi'_\kappa G_\kappa(t)\Pi_\kappa \Phi_\kappa u = G_\kappa(t)\Pi_\kappa \Phi_\kappa u.$$

Поэтому

$$K(t) = \sum_{\kappa=1}^{N} \Pi_j^{-1} \Psi'_\kappa K_\kappa(t) \Pi_j \Phi_j, \tag{5.3}$$

где

$$K_\kappa(t) = -\left(\frac{d}{dt} + A_\kappa\right) G_\kappa(t).$$

Теперь очевидно, что, оценивая $K_\kappa(t)$ по схеме, изложенной в разделе 2, мы получим соответствующую оценку также и для оператора $K(t)$:

$$\|K(t)\|_{\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2} \leqslant Mt^{-\kappa}, \quad 0 < t < T.$$

С учётом этой оценки доказательство теоремы 5.1 завершается, как и в предыдущих разделах, аналогично случаю псевдодифференциальных операторов, заданных в $\mathbb{R}^n$.

Пример. В скалярном случае $l = 1$ условиям теоремы 5.1 удовлетворяют секториальные гипоэллиптические дифференциальные операторы постоянной силы (см. [8, п. 10]).

2. Очевидно, что на основании (5.3) можно получить оценку нормы оператора $K(t)$ и в пространстве $\mathcal{H}_p = L_p(\mathbf{M}; d\mu)^l$, $1 \leqslant p < +\infty$. Это приводит нас к следующей теореме.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия* (5.1), (5.2). *Пусть, кроме того,*

$$|s^\gamma D_s^\alpha D_s^\gamma D_x^\beta a(x,s)| \leqslant M_{\alpha,\beta}\big(1 + a'(x,s)\big)^{1-\theta|\alpha|},$$
$$0 \neq |\gamma| \leqslant n, \quad j = 1, \ldots, N, \quad x \in V_j, \tag{5.4}$$

а в случае $p = 1$ предположим дополнительно, что семейство вектор-функций

$$\Omega_{j,\eta,t}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{isx} e^{-ta_j(\eta,s)}\, ds, \quad 0 < t < \frac{1}{2}, \quad \eta \in \tilde{V}_j, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{5.4$'$}$$

образует ограниченное множество в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)^l$. Тогда замыкание $-\mathcal{A}_p$ оператора A_0 в $\mathcal{H}_p$, $1 \leqslant p < +\infty$, является инфинитезимальным производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $e^{-t\mathcal{A}_p}$, $t > 0$, в $\mathcal{H}_p$. Оператор $(\mathcal{A}_p + \lambda E)^{-1}$ при достаточно большом $\lambda > 0$ вполне непрерывен в $\mathcal{H}_p$.

При достаточно малом $T > 0$ имеет место представление

$$e^{-t\mathcal{A}_p} = J(t) + \int\limits_0^t J(t - t')\Phi(t')\, dt', \quad 0 < t < T, \tag{5.5}$$

где операторная функция $\Phi(t)$ удовлетворяет оценке

$$\|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_p} \leqslant M t^{-\kappa}, \quad 0 < t < T,$$

с некоторым $0 < \kappa < 1$.

В предположении, что семейство вектор-функций (5.4$'$) образует ограниченное множество в $L_1(\mathbb{R}^n)^l$, аналогичный результат справедлив также и в банаховом пространстве $C(\mathbf{M})^l$ непрерывных на $\mathbf{M}$ вектор-функций

$$u(\mu) = \bigl(u_1(\mu), \ldots, u_l(\mu)\bigr)', \quad \mu \in \mathbf{M},$$

с нормой

$$|u|_{C(\mathbf{M})^l} = \max_{\substack{j=1,\ldots,l \\ \mu \in \mathbf{M}}} |u_j(\mu)|.$$

3. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ последовательность собственных значений оператора $\mathcal{A}_p$, занумерованные с учётом их алгебраических кратностей. Положим

$$N(\lambda) = \operatorname{card}\{j \colon \operatorname{Re}\lambda_j \leqslant \lambda\}.$$

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия* (5.1), (5.2). *Пусть, кроме того,*

$$|\operatorname{Im} a_j(x, s)| \leqslant M\bigl(a_j'(x, s)\bigr)^{1-\theta}, \quad x \in \tilde{V}_j, \quad j = 1, \ldots, N, \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

Предположим, что функция

$$\rho(\lambda) = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^N \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_j(x)\nu_j(\lambda; x, s)\, dx\, ds,$$

где $\nu_j(\lambda; x, s)$ обозначает число собственных значений матрицы $\operatorname{Re} a_j(x, s)$, не превосходящих λ, удовлетворяет условию $\rho(\lambda) \sim \tilde{\rho}(\lambda)$, $\lambda \to +\infty$, где $\tilde{\rho}(\lambda) \in C^1(R_+)$ и $\tilde{\rho}'(\lambda) = O\bigl(\tilde{\rho}(\lambda)\bigr)$, $\lambda \to +\infty$. Тогда

$$\lim_{j \to +\infty} \arg \lambda_j = 0$$

и

$$N(\lambda) \sim \rho(\lambda), \quad \lambda \to +\infty.$$

Замечание. В предположении, что семейство вектор-функций (5.4′) образует ограниченное множество в $L_1(\mathbb{R}^n)^l$, асимптотическая формула $N(\lambda) \sim \varphi(\lambda)$, $\lambda \to +\infty$, верна также и для функции распределения $N(\lambda)$ соответствующего псевдодифференциального оператора $\mathcal{A}_\infty$ в пространстве $C^l(M)^l$.

Так же, как в разделе 4, доказывается, что функция $N(\lambda)$ от числа p не зависит. Поэтому при доказательстве теоремы 5.3 достаточно рассмотреть случай $p = 2$. В этом случае теорема 5.3 доказывается так же, как в [7] на основании представления

$$e^{-t\mathcal{A}_2} = J(t) + (J * \Phi)(t), \quad 0 < t < T,$$

полученного в теореме 5.1.

Утверждения теоремы 5.3 в случае $p = 2$ будут верны, даже если опустить условие (5.4) и условие об ограниченности семейства вектор-функций (5.4′) в $L_1(\mathbb{R}^n)^l$.

4. В заключение рассмотрим аналитические полугруппы, порождённые псевдодифференциальными операторами.

Предположим, что множество X точек $\langle a_j(x,s)h, h\rangle_{\mathbf{C}^l}$, где h пробегает $\mathbf{C}^l$, s пробегает $\mathbb{R}^n$, $j = 1,\dots,N$, x меняется в $\tilde{V}_j$, лежит в угле $\{z \in \mathbf{C}\colon |\arg z| \leqslant \alpha\}$, $\alpha < \pi/2$.

Положим для $|\arg z| < \alpha'$, $\alpha' < \pi/2 - \alpha$,

$$J(z) = \sum_{\kappa=1}^{N} \Psi_\kappa \Pi_\kappa^{-1} \Psi_\kappa^{-1} G_\kappa(z) \Pi_\kappa \Phi_\kappa,$$

где

$$G_\kappa(z) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \theta_i(\operatorname{Re} z) \psi_{ij} G_{ij}^{(\kappa)}(z) \varphi_{ij} \chi_\kappa.$$

Оператор $G_{ij}^{(\kappa)}(z)$ есть псевдодифференциальный оператор в $\mathbb{R}^n$ с символом $e^{-za'_\kappa(x_{ij},s)}$, $x_{ij} \in \operatorname{supp}\varphi_{ij}$.

По аналогии с теоремой 5.2 имеет место следующая теорема.

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия* (5.1), (5.2), (5.4) *и*

$$X \subset \{z \in \mathbf{C}\colon |\arg z| \leqslant \alpha\}, \quad \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

В случае $p = 1$ дополнительно предполагается, что семейство вектор-функций

$$\Omega_{j,z,\eta}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{isx} e^{-za_j(\eta,s)}\, ds, \quad |\arg z| \leqslant \alpha', \quad |z| < 1, \quad \eta \in \tilde{V}_j, \quad j = 1,\dots,N, \tag{5.6}$$

образует ограниченное множество в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)^l$. Тогда $-\mathcal{A}_p$ является инфинитезимальным производящим оператором аналитической полугруппы в $\mathcal{H}_p$. При достаточно малых $\nu, T > 0$ справедливо представление

$$e^{-z\mathcal{A}_p} = J(z) + \int\limits_0^z J(z-z')\Phi(z')\,dz', \quad |z| < T, \quad |\arg z| < \alpha',$$

и оценка

$$\|\Phi(z)\|_{\mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_p} \leqslant M|z|^{-\kappa}, \quad |z| < T, \quad |\arg z| < \alpha',$$

где $\kappa \in (0, 1)$.

Аналогичный результат имеет место также и для пространства $C(\mathbf{M})^l$ (вместо $\mathcal{H}_p$) в предположении ограниченности семейства вектор-функций (5.6) в $L_1(\mathbb{R}^n)^l$.

Литература

[1] Александрян Р. А., Березанский Ю. М., Ильин В. А., Костюченко А. Г. Некоторые вопросы спектральной теории для уравнений с частными производными // Дифференциальные уравнения с частными производными. — М.: Наука, 1970. — С. 3—35.

[2] Арсеньев А. А. Асимптотические свойства следа спектральной функции самосопряжённого эллиптического оператора второго порядка // ДАН СССР. — 1964. — Т. 157, № 4. — С. 71—74.

[3] Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. Вып. 14. — М.: ВИНИТИ, 1977. — С. 5—58.

[4] Бойматов К. Х. Самосопряжённость эллиптических дифференциальных операторов второго порядка // Дифференц. уравн. — 1976. — Т. 12, № 11. — С. 2089—2091.

[5] Бойматов К. Х. Спектральная асимптотика дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в негладкой области // ДАН СССР. — 1978. — Т. 242, № 4. — С. 749—752.

[6] Бойматов К. Х. Распределение собственных значений вырождающихся эллиптических операторов // ДАН СССР. — 1979. — Т. 248, № 3. — С. 521—524.

[7] Бойматов К. Х. Спектральная асимптотика дифференциальных и псевдодифференциальных операторов. I // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1981. — Вып. 7. — С. 50—100.

[8] Бойматов К. Х. Спектральная асимптотика дифференциальных и псевдодифференциальных операторов. II // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1983. — Вып. 9. — С. 240—263.

[9] Бойматов К. Х. Спектральная асимптотика дифференциальных и псевдодифференциальных операторов. III // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1984. — Вып. 10. — С. 78—106.

[10] Бойматов К. Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Тр. МИАН СССР. — 1984. — Т. 170. — С. 37—76.

[11] Бойматов К. Х., Гадоев М. Г. Об условиях m-секториальности и квази-m-аккретивности минимальных реализаций матричных дифференциальных и псевдодифференциальных выражений // Докл. РАН. — 2002. — Т. 385, № 3. — С. 295—298.

[12] Бойматов К. Х., Костюченко А. Г. Распределение собственных значений эллиптических операторов во всём пространстве // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1976. — Вып. 2. — С. 113—143.

[13] Гадоев М. Г. Интегральное представление голоморфных полугрупп, порождённых сильно позитивными матричными псевдодифференциальными операторами на компактных многообразиях // Докл. РАН. — 2002. — Т. 385, № 4. — С. 450—452.

[14] Ивасишен С. Д. Матрица Грина для параболических по И. Г. Петровскому систем общего вида // Мат. сб. — 1981. — Т. 114, № 1. — С. 110—166.

[15] Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д. Оценки матрицы Грина однородной параболической граничной задачи // ДАН СССР. — 1967. — Т. 172, № 6. — С. 1262—1265.

[16] Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.

[17] Коваленко В. Ф., Семёнов Ю. А. К L^p-теории шрёдингеровских полугрупп // Укр. мат. журн. — 1987. — Т. 39, № 5. — С. 620—624.

[18] Коваленко В. Ф., Семёнов Ю. А. Полугруппы, порождаемые эллиптическим оператором второго порядка // Применение методов функционального анализа в задачах математической физики. — Киев, 1987. — С. 17—36.

[19] Костюченко А. Г. Распределение собственных значений для сингулярных дифференциальных операторов // ДАН СССР. — 1966. — Т. 168, № 1. — С. 21—24.

[20] Костюченко А. Г. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов // Мат. заметки. — 1967. — Т. 1, вып. 3. — С. 365—378.

[21] Костюченко А. Г. Асимптотическое поведение спектральной функции самосопряжённых эллиптических операторов // Четвёртая математическая школа. — Киев, 1968. — С. 42—117.

[22] Костюченко А. Г. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов: Дис.. . . докт. физ.-мат. наук. — М., 1996.

[23] Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.

[24] Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Теория операторов и некорректные задачи. — Новосибирск, 1999.

[25] Левитан Б. М. Об асимптотическом поведении функции Грина и разложении по собственным функциям уравнения Шрёдингера // Мат. сб. — 1957. — Т. 41, № 4. — С. 439—458.

[26] Рофе-Бекетов Ф. С. Самосопряжённость эллиптических операторов и оценки энергетического типа во всём $\mathbb{R}^n$ // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 54. — Харьков, 1990. — С. 3—16.

[27] Семёнов Ю. А. К спектральной теории эллиптических дифференциальных операторов второго порядка // Мат. сб. — 1985. — Т. 128 (170), № 10. — С. 221—247.

[28] Солонников В. А. О матрицах Грина для параболических краевых задач // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1969. — Т. 14. — С. 256—287.

[29] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Науки, 1973.

[30] Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы в $\mathbb{R}^n$ // ДАН СССР. — 1971. — Т. 196, № 2. — С. 316—319.

[31] Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. — М.: Наука, 1978.

[32] Эйдельман С. Д. Параболические системы. — М.: Наука, 1964.

[33] Эйдельман С. Д. Параболические уравнения // Итоги науки и техн. Т. 63. — М.: ВИНИТИ, 1990. — С. 201—313.

[34] Эйдельман С. Д., Ивасишен С. Д. Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи // Тр. ММО. — 1970. — Т. 23. — С. 179—234.