Базисы Грёбнера—Ширшова правосимметричных алгебр Винберга—Козюля—Герстенхабера

Л. А. БОКУТЬ
Южно-Китайский нормальный университет, Гуанчжоу (Китай),
Институт математики имени С. Л. Соболева РАН, Новосибирск
e-mail: bokut@math.nsc.ru

ЮЙЦЮНЬ ЧЭНЬ
Южно-Китайский нормальный университет, Гуанчжоу (Китай)
e-mail: yqchen@scnu.edu.cn

ЮЙ ЛИ
Южно-Китайский нормальный университет, Гуанчжоу (Китай)
e-mail: liyu820615@126.com

УДК 512.7

Ключевые слова: правосимметричная алгебра, базис Грёбнера—Ширшова, нормальная форма.

Аннотация

В работе доказана лемма о композиции для правосимметричных алгебр. В качестве приложения получен базис Грёбнера—Ширшова универсальной обёртывающей правосимметричной алгебры для алгебры Ли.

Abstract

L. A. Bokut, Yuqun Chen, Yu Li, Gröbner—Shirshov bases for Vinberg—Koszul—Gerstenhaber right-symmetric algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 8, pp. 55—67.

In this paper, we establish the composition lemma (diamond lemma) for right-symmetric algebras. As an application, we give a Gröbner—Shirshov basis for the universal enveloping right-symmetric algebra of a Lie algebra.

1. Введение

Теории базисов Грёбнера и Грёбнера—Ширшова были введены независимо А. И. Ширшовым [16] для случая алгебр Ли и Х. Хиронака [45] и Б. Бухбергером [36, 37] для случая ассоциативно-коммутативных алгебр.

Работа А. И. Ширшова [16] основывалась на его работах [15] о базисах Грёбнера—Ширшова и алгоритме приведения (исключения старшего слова) для (анти)коммутативных алгебр и [13] о словах Линдона—Ширшова (они были введены несколько ранее в работе Р. Линдона [56], но эта работа оставалась неизвестной в России в течение 25 лет, и поэтому указанные слова назывались

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 8, с. 55—67.

правильными словами (в смысле Ширшова), см., например, [1, 9, 18—20, 41, 60]) и базисе Линдона—Ширшова свободной алгебры Ли (см. также [40]). Работы А. И. Ширшова [13, 15] основывались на его кандидатской диссертации [10], выполненной под руководством А. Г. Куроша и опубликованной в трёх работах: [11] о свободных алгебрах Ли (доказаны K_d-лемма (процесс исключения Линдона—Ширшова) и теорема о свободе подалгебр (теорема Ширшова—Витта)), [12] о свободных (анти)коммутативных алгебрах (рассмотрены линейные базисы и теорема о свободе подалгебр) и [14] о свободных алгебрах Ли (рассмотрена серия баз с произвольным упорядочением базисных слов, таким что $[w] = \big[[u][v]\big] > [v]$, см. также [61]; эти базы называются также множествами Холла [58] или базами Холла—Ширшова). Диссертация А. И. Ширшова, в свою очередь, основывалась на работе А. Г. Куроша [8] о свободных неассоциативных алгебрах (доказана теорема о свободе подалгебр). Кроме того, работа А. И. Ширшова [15] была в определённом смысле продолжением работы другого аспиранта А. Г. Куроша А. И. Жукова [7] (о свободных неассоциативных алгебрах: доказана разрешимость проблемы равенства для этих алгебр). Отличие подхода А. И. Ширшова от подхода А. И. Жукова состояло в том, что А. И. Жуков рассматривал только частичный (не линейный) порядок неассоциативных слов по их степени (длине).

Исходя из изложенного, не будет большим преувеличением сказать, что работа А. И. Ширшова [16] шла в русле программы А. Г. Куроша изучения свободных алгебр в различных классах неассоциативных алгебр.

Работа А. И. Ширшова [16] содержит неявно также теорию базисов Грёбнера—Ширшова для ассоциативных алгебр просто потому, что лиевы многочлены (элементы свободной алгебры Ли) рассматриваются одновременно как некоммутативные многочлены (после замен $[xu, v]$ на $uv - vu$). Например, максимальное слово лиева многочлена определяется как его максимальное слово как некоммутативного многочлена; композиция (S-многочлен) двух лиевых многочленов определяется через их композицию как некоммутативных многочленов с последующей расстановкой лиевых скобок и т. д. Основная лемма о композиции (diamond lemma) для ассоциативных многочленов на самом деле доказана в [16], надо только «забыть» о лиевых скобках в доказательстве этой леммы для лиевых многочленов, т. е. заменить везде лиевы многочлены на некоммутативные многочлены [16, лемма 3]. В явном виде лемма о композиции была сформулирована в работах Л. А. Бокутя [2] и Дж. Бергмана [21].

Последние годы появилось довольно много работ о базисах Грёбнера—Ширшова для ассоциативных алгебр, алгебр Ли, лиевых супералгебр, неприводимых модулей, алгебр Каца—Муди, конформных алгебр, групп Кокстера, групп кос, квантовых групп, Ω-алгебр в смысле Куроша, диалгебр и алгебр Лейбница (в смысле Лодея), алгебр Рота—Бакстера и др. (см., например, книги [34, 57], работы [22—24, 30—32, 35, 46—49, 52—55, 57], обзоры [3, 4, 25, 28, 29, 33]. Конформные алгебры, диалгебры, алгебры Рота—Бакстера являются примерами Ω-алгебр. Для неассоциативных Ω-алгебр лемма о композиции доказана в [42]. Случай ассоциативных Ω-алгебр (ассоциативных алгебр с любым множеством полилинейных операций Ω) рассмотрен в [27] с приложениями к свободным (λ-)алгебрам Рота—Бакстера; последние определяются как ассоциативные алгебры с линейной операцией $P(x)$, удовлетворяющей тождеству $P(x)P(y) = P(P(x)y) + P\big(xP(y)\big) + \lambda P(xy)$, где λ — фиксированный элемент основного поля (см., например, [43]). Лемма о композиции для диалгебр [26] имеет приложения к теореме Пуанкаре—Биркгофа—Витта для универсальной обёртывающей диалгебры для алгебры Лейбница (см. [17]).

В этой работе мы излагаем теорию базисов Грёбнера—Ширшова для правосимметричных алгебр (RS-алгебр). Эти алгебры определяются тождеством $(x, y, z) = (x, z, y)$ для ассоциаторов $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$. Под таким именем их ввёл Э. Б. Винберг [6] (на самом деле он рассматривал антиизоморфные им левосимметричные алгебры (LS-алгебры) с тождеством $(x, y, z) = (y, x, z)$). Независимо эти алгебры определили также Ж.-Л. Козюль [50] и М. Герстенхабер [44] (последний под именем пред-Ли алгебр). Как указано в обзоре Д. Бурде [38], правосимметричные алгебры рассматривал ещё А. Келли в 1896 г. (см. [39]). Обзор [38] содержит детальное обсуждение возникновения, теории и приложений в геометрии и физике левосимметричных алгебр, а также подробную (хотя и неполную) библиографию.

Д. Сигал [59] нашёл линейный базис свободной LS-алгебры и применил его для доказательства теоремы Пуанкаре—Биркгофа—Витта для универсальной LS-обёртывающей алгебры некоторой алгебры Ли. Е. Васильева и А. А. Михалёв [5] нашли другое доказательство результата Сигала о базисе (и более общего результата для RS-супералгебр) с помощью леммы о композиции из работы А. И. Жукова [7]. Д. Казыбаев, Л. Макар-Лиманов и У. Умирбаев [51] установили новые свойства базисных неассоциативных слов Сигала и применили их для доказательства теоремы о свободе и разрешимости проблемы равенства для RS-алгебр с одним определяющим соотношением. Эти утверждения обобщает известные результаты А. И. Ширшова для алгебр Ли с одним соотношением [15].

2. Лемма о композиции для правосимметричных алгебр

Пусть $X = \{x_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество, X^* — множество всех слов u в алфавите X, X^{**} — множество всех неассоциативных слов (u) в алфавите X и $|(u)|$ — длина слова (u).

Пусть I — вполне упорядоченное множество. Упорядочим множество X^{**} индукцией по сумме длин $|(u)| + |(v)|$ слов (u) и (v) из X^{**}:

1) если $|(u)| + |(v)| = 2$, то $(u) = x_i > (v) = x_j$, если $i > j$;
2) если $|(u)| + |(v)| > 2$, то $(u) > (v)$ в том и только том случае, когда

   а) $|(u)| > |(v)|$;

б) если $|(u)| = |(v)|$, $(u) = \big((u_1)(u_2)\big)$ и $(v) = \big((v_1)(v_2)\big)$, то либо $(u_1) >$ $> (v_1)$, либо $(u_1) = (v_1)$ и $(u_2) > (v_2)$.

Это упорядочение называется deg-lex-упорядочением (степенно-лексикографическом упорядочением). Очевидно, что $(X^{**}, <)$ — вполне упорядоченное множество.

Приведём теперь определение *хороших* слов (см. [59]) индукцией по длине:

1) x_i — хорошие слова для $x_i \in X$;
2) пусть определены хорошие слова длины меньше n. Неассоциативное слово $\big((v)(w)\big)$ называется хорошим, если
   а) оба слова (v) и (w) хорошие;
   б) если $(v) = \big((v_1)(v_2)\big)$, то $(v_2) \leqslant (w)$.

Хорошие слова мы будем обозначать через $[u]$ (в прямых скобках).

Пусть W — множество всех хороших слов в алфавите X и $\mathrm{RS}\langle X\rangle$ — свободная правосимметричная алгебра над полем k, порождённая X. Тогда W образует линейный базис $\mathrm{RS}\langle X\rangle$ [59].

Любой элемент f из $\mathrm{RS}\langle X\rangle$ единственным образом представляется в виде

$$f = \lambda_1[w_1] + \lambda_2[w_2] + \ldots + \lambda_n[w_n],$$

где $[w_i] \in W$, $0 \neq \lambda_i \in k$ для всех i и $[w_1] > [w_2] > \ldots > [w_n]$. Обозначим через $\bar{f}$ максимальное слово $[w_1]$ из f. Многочлен f называется унитальным, если коэффициент при $\bar{f}$ равен 1.

Для любых $(w), (w_1) \in X^{**}$ обозначим

$$(w)\mathrm{R}_{(w_1)} = \big((w)(w_1)\big).$$

Следующие утверждения доказаны в [51].

Лемма 2.1 [51]. *В X^{**} любое хорошее слово $[w] \in W$ имеет вид*

$$[w] = x_i \mathrm{R}_{[w_1]} \mathrm{R}_{[w_2]} \cdots \mathrm{R}_{[w_n]},$$

где $[w_j] \in W$ для всех j и $[w_1] \leqslant [w_2] \leqslant \ldots \leqslant [w_n]$.

Лемма 2.2 [51]. *Пусть $[u]$ и $[v]$ — произвольные хорошие слова,*

$$[u] = x_i \mathrm{R}_{[u_1]} \mathrm{R}_{[u_2]} \cdots \mathrm{R}_{[u_n]}.$$

Тогда в $\mathrm{RS}\langle X\rangle$

$$\overline{[u][v]} = x_i \mathrm{R}_{[u_1]} \cdots \mathrm{R}_{[u_s]} \mathrm{R}_{[v]} \mathrm{R}_{[u_{s+1}]} \cdots \mathrm{R}_{[u_n]},$$

где $[u_1] \leqslant \ldots \leqslant [u_s] \leqslant [v] < [u_{s+1}] \leqslant \ldots \leqslant [u_n]$ и $s \leqslant n$.

Из леммы 2.2 выводится следствие.

Следствие 2.3. *Пусть $[u], [v] \in W$ и*

$$[u] = x_i \mathrm{R}_{[u_1]} \cdots \mathrm{R}_{[u_{m-1}]} \mathrm{R}_{[u_m]} = [u'][u_m],$$

где $[u'] = x_i \mathrm{R}_{[u_1]} \cdots \mathrm{R}_{[u_{m-1}]}$. Если $[u_m] > [v]$, то в $\mathrm{RS}\langle X\rangle$

$$\overline{[u][v]} = \overline{([u'][v])}[u_m], \quad \overline{[u']([u_m][v])}, \overline{[u']([v][u_m])} < \overline{[u][v]}.$$

Лемма 2.4 [51]. *Пусть* $[u]$, $[v]$, $[w]$ — *произвольные хорошие слова. Если* $[u] < [v]$, *то* $\overline{[w][u]} < \overline{[w][v]}$ *и* $\overline{[u][w]} < \overline{[v][w]}$. *Отсюда следует, что для любых* $f, g \in \mathrm{RS}\langle X\rangle$, $\overline{fg} = \overline{\bar{f}\bar{g}}$.

Определение 2.5. Пусть $S \subset A$ — некоторое множество приведённых многочленов, $s \in S$, $(u) \in X^{**}$. Мы рассматриваем S как некоторое множество символов. Определим S-слова $(u)_s$, $s \in S$, по индукции:

1) $(u)_s = s$ — S-слово S-длины 1;
2) если $(u)_s$ — S-слово S-длины k и $[v]$ — хорошее слово длины l, то $(u)_s[v]$ и $[v](u)_s$ — S-слова S-длины $k + l$.

Определение 2.6. S-слово $(u)_s$ назовём нормальным S-словом, если $(u)_{\bar{s}} = (a\bar{s}b)$ — хорошее слово. Обозначим $(u)_s$ через $[u]_s$, если $(u)_s$ — нормальное S-слово. Из леммы 2.4 следует, что $\overline{[u]_s} = [u]_{\bar{s}}$.

Определение 2.7. Пусть $f, g \in \mathrm{RS}\langle X\rangle$ — унитальные многочлены, $[w] \in W$ и $a, b \in X^*$. Определим два вида композиций.

1. Если $\bar{f} = [a\bar{g}b]$, то композиция
$$(f, g)_{\bar{f}} = f - [agb]$$
называется композицией включения.
2. Если $(\bar{f}[w])$ не является хорошим словом, то композиция
$$f \cdot [w]$$
называется композицией правого умножения.

Пусть $S \subset \mathrm{RS}\langle X\rangle$ непусто. Композиция включения $(f, g)_{\bar{f}}$ называется тривиальной по модулю S, если
$$(f, g)_{\bar{f}} = \sum_i \alpha_i [a_i s_i b_i],$$
где $\alpha_i \in k$, $a_i, b_i \in X^*$, $s_i \in S$, $[a_i s_i b_i]$ — нормальные S-слова и $[a_i \bar{s}_i b_i] < \bar{f}$. В этом случае будем писать
$$(f, g)_{\bar{f}} \equiv 0 \mod (S, \bar{f}).$$

Вообще, для любых $p, q \in \mathrm{RS}\langle X\rangle$ и хорошего слова $[w]$ формула
$$p \equiv q \mod (S, [w])$$
означает по определению, что $p - q = \sum \alpha_i [a_i s_i b_i]$, где $\alpha_i \in k$, $a_i, b_i \in X^*$, $s_i \in S$, $[a_i s_i b_i]$ — нормальные S-слова и $[a_i \bar{s}_i b_i] < [w]$ для всех i.

Композиция правого умножения $f \cdot [w]$ называется тривиальной по модулю S, если
$$f \cdot [w] = \sum_i \alpha_i [a_i s_i b_i],$$
где $\alpha_i \in k$, $a_i, b_i \in X^*$, $s_i \in S$, $[a_i s_i b_i]$ — нормальные S-слова и $[a_i \bar{s}_i b_i] \leqslant \overline{f \cdot [w]}$. В этом случае мы пишем
$$f \cdot [w] \equiv 0 \mod (S).$$

Определение 2.8. Пусть $S \subset \mathrm{RS}\langle X\rangle$ — непустое множество унитальных многочленов и порядок $<$ на X^{**} определён как выше. S называется базисом Грёбнера—Ширшова в $\mathrm{RS}\langle X\rangle$, если любая композиция многочленов из S тривиальна по модулю S.

Лемма 2.9. *Пусть $S \subset \mathrm{RS}\langle X\rangle$ и любая композиция правых умножений многочленов из S тривиальна. Тогда любое S-слово $(u)_s$ представимо в виде*

$$(u)_s = \sum_i \alpha_i [u_i]_{s_i},$$

где $\alpha_i \in k$, $[u_i]_{s_i}$ — нормальные S-слова и $\overline{[u_i]_{s_i}} \leqslant \overline{(u)_s}$.

Доказательство. Проведём индукцию по старшему слову $\overline{(u)_s}$. Если $\overline{(u)_s} = \bar{s}$, то $(u)_s = s$, и результат верен. Пусть $\overline{(u)_s} > \bar{s}$. Тогда $(u)_s = (v)_s[w]$ или $(u)_s = [w](v)_s$. Рассмотрим только первый случай (второй рассматривается аналогично).

По индукции мы можем считать, что $(v)_s$ — нормальное S-слово, т. е. $(u)_s = [v]_s[w]$. Если $[v]_s = s$, то результат следует из тривиальности композиций правого умножения. Пусть $[v]_s = [v_1]_s[v_2]$ или $[v]_s = [v_1][v_2]_s$. Рассмотрим опять только первый случай. Если $[v_2] \leqslant [w]$, то $(u)_s = [v]_s[w]$ — нормальное S-слово, и утверждение доказано. Если $[v_2] > [w]$, то

$$(u)_s = ([v_1]_s[v_2])[w] = ([v_1]_s[w])[v_2] + [v_1]_s([v_2][w]) - [v_1]_s([w][v_2]).$$

По индукции $[v_1]_s[w] = \sum\limits_j \beta_j [v_j]_{s_j}$, где $\beta_j \in k$, $[v_j]_{s_j}$ — нормальные S-слова и $\overline{[v_j]_{s_j}} \leqslant \overline{[v_1]_s[w]}$. Если $\overline{[v_j]_{s_j}} = \overline{[v_1]_s[w]}$, то $[v_j]_{s_j}[v_2]$ — нормальное S-слово, поскольку

$$[v_j]_{\overline{s_j}}[v_2] = \overline{[v_j]_{s_j}}[v_2] = \overline{([v_1]_s[w])}[v_2] = \overline{([v_1]_s[v_2])[w]} = \overline{(u)_s}$$

по следствию 2.3. Если $\overline{[v_j]_{s_j}} < \overline{[v_1]_s[w]}$, то

$$\overline{[v_j]_{s_j}[v_2]} < \overline{([v_1]_s[w])[v_2]} = \overline{([v_1]_s[w])}[v_2] = \overline{(u)_s},$$

и по следствию 2.3 имеем

$$\overline{[v_1]_s([v_2][w])}, \overline{[v_1]_s([w][v_2])} < \overline{([v_1]_s[w])[v_2]} = \overline{(u)_s}.$$

Утверждение следует из предположения индукции. □

Лемма 2.10. *Пусть $S \subset \mathrm{RS}\langle X\rangle$ — базис Грёбнера—Ширшова, $[a_1s_1b_1]$, $[a_2s_2b_2]$ — нормальные S-слова. Если $[w] = [a_1\overline{s_1}b_1] = [a_2\overline{s_2}b_2]$, то*

$$[a_1s_1b_1] \equiv [a_2s_2b_2] \mod (S, [w]).$$

Доказательство. Имеем равенство ассоциативных слов

$$w = a_1\bar{s}_1b_1 = a_2\bar{s}_2b_2.$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Предположим, что подслова $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$ не пересекаются (точнее, не содержат одно другого в качестве подслова), скажем, $|a_2| \geqslant |a_1| + |\bar{s}_1|$. Тогда

$$a_2 = a_1\bar{s}_1c, \quad b_1 = c\bar{s}_2b_2$$

для $c \in X^*$. Поэтому $[w] = [a_1\bar{s}_1c\bar{s}_2b_2]$. Теперь мы имеем

$$\begin{aligned}[a_1s_1b_1] - [a_2s_2b_2] &= [a_1s_1c\bar{s}_2b_2] - [a_1\bar{s}_1cs_2b_2] = \\ &= [a_1s_1c\bar{s}_2b_2] - (a_1s_1cs_2b_2) + (a_1s_1cs_2b_2) - [a_1\bar{s}_1cs_2b_2] = \\ &= (a_1s_1c(\bar{s}_2 - s_2)b_2) + (a_1(s_1 - \bar{s}_1)cs_2b_2).\end{aligned}$$

Поскольку $[\overline{\bar{s}_2 - s_2}] < \bar{s}_2$ и $[\overline{s_1 - \bar{s}_1}] < \bar{s}_1$, то согласно леммам 2.4, 2.9

$$[a_1s_1b_1] - [a_2s_2b_2] = \sum_i \alpha_i[u_is_iv_i],$$

где $\alpha_i \in k$, $[u_is_iv_i]$ — нормальные S-слова, такие что $[u_i\bar{s}_1v_i] < [w]$. Следовательно,

$$[a_1s_1b_1] \equiv [a_2s_2b_2] \mod (S, [w]).$$

Случай 2. Пусть $\bar{s}_1$ содержит $\bar{s}_2$ как подслово. Пусть $\bar{s}_1 = [a\bar{s}_2b]$, $a_2 = a_1a$ и $b_2 = bb_1$, т. е. $[w] = [a_1[a\bar{s}_2b]b_1]$ для нормального S-слова $[as_2b]$. Имеем

$$[a_1s_1b_1] - [a_2s_2b_2] = [a_1s_1b_1] - [a_1[as_2b]b_1] = (a_1(s_1 - [as_2b])b_1) = (a_1(s_1, s_2)_{\bar{s}_1}b_1).$$

Поскольку S — базис Грёбнера—Ширшова, то $(s_1, s_2)_{\bar{s}_1} = \sum_i \alpha_i[c_is_id_i]$ для $\alpha_i \in k$ и нормальных S-слов $[c_is_id_i]$ с условием $[c_i\bar{s}_id_i] < \bar{s}_1$. Согласно леммам 2.4, 2.9 имеем

$$[a_1s_1b_1] - [a_2s_2b_2] = (a_1(s_1, s_2)_{\bar{s}_1}b_1) = \sum_i \alpha_i(a_1[c_is_id_i]b_1) = \sum_j \beta_j[a_js_jb_j]$$

для $\beta_j \in k$ и нормальных S-слов $[a_js_jb_j]$, таких что $[a_j\bar{s}_jb_j] < [w] = [a_1\bar{s_1}b_1]$.

Итак, $[a_1s_1b_1] \equiv [a_2s_2b_2] \mod (S, [w])$. □

Лемма 2.11. *Пусть $S \subset \mathrm{RS}\langle X\rangle$ — множество унитальных многочленов,*

$$\mathrm{Irr}(S) = \{[u] \in W \mid [u] \neq [a\bar{s}b],\ a, b \in X^*,\ s \in S,\ [asb] \text{ — нормальное } S\text{-слово}\}.$$

Тогда любой многочлен $f \in \mathrm{RS}\langle X\rangle$ можно представить в виде

$$f = \sum_{[u_i] \leqslant \bar{f}} \alpha_i[u_i] + \sum_{[a_j\bar{s}_jb_j] \leqslant \bar{f}} \beta_j[a_js_jb_j],$$

где $\alpha_i, \beta_j \in k$, $[u_i] \in \mathrm{Irr}(S)$ и $[a_js_jb_j]$ — нормальные S-слова.

Доказательство. Пусть $f = \sum_i \alpha_i[u_i] \in \mathrm{RS}\langle X\rangle$, где $0 \neq \alpha_i \in k$ и $[u_1] > [u_2] > \ldots$. Если $[u_1] \in \mathrm{Irr}(S)$, положим $f_1 = f - \alpha_1[u_1]$. Если $[u_1] \notin \mathrm{Irr}(S)$, то $\bar{f} = [a_1\bar{s_1}b_1]$ для некоторых $s \in S$, $a_1, b_1 \in X^*$. Положим $f_1 = f - \alpha_1[a_1s_1b_1]$. В обоих случаях $\bar{f}_1 < \bar{f}$. Утверждение доказывается индукцией по $\bar{f}$. □

Теорема 2.12. *Пусть* $S \subset \mathrm{RS}\langle X\rangle$ — *непустое множество унитальных многочленов и порядок* $<$ *на* $X^{*}*$ *определён выше. Через* $\mathrm{Id}(S)$ *обозначим идеал, порождённый* S. *Следующие условия эквивалентны*:

1) S — *базис Грёбнера—Ширшова в* $\mathrm{RS}\langle X\rangle$ *относительно порядка* $<$;
2) *если* $f \in \mathrm{Id}(S)$, *то* $\bar{f} = [a\bar{s}b]$ *для некоторых* $s \in S$ *и* $a, b \in X^*$, где $[asb]$ — *нормальное* S-*слово*;

2′) *если* $f \in \mathrm{Id}(S)$, *то* $f = \alpha_1[a_1s_1b_1] + \alpha_2[a_2s_2b_2] + \ldots$, где $\alpha_i \in k$, $[a_1\bar{s}_1b_1] > > [a_2\bar{s}_2b_2] > \ldots$ *и* $[a_is_ib_i]$ — *нормальные* S-*слова*;

3) *множество*
$$\mathrm{Irr}(S) = \{[u] \in W \mid [u] \neq [a\bar{s}b],\ a, b \in X^*,\ s \in S,\ [asb] - \text{нормальное } S\text{-слово}\}$$
является линейным базисом алгебры $\mathrm{RS}\langle X|S\rangle = \mathrm{RS}\langle X\rangle / \mathrm{Id}(S)$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть S — базис Грёбнера—Ширшова и $0 \neq f \in \mathrm{Id}(S)$. По лемме 2.9 имеем
$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [a_is_ib_i],$$
где $\alpha_i \in k$, $a_i, b_i \in X^*$, $s_i \in S$ и $[a_is_ib_i]$ — нормальные S-слова. Пусть
$$[w_i] = [a_i\bar{s}_ib_i], \quad [w_1] = [w_2] = \ldots = [w_l] > [w_{l+1}] \geqslant \ldots .$$
Для доказательства утверждения используем индукцию по l и $[w_1]$.

Если $l = 1$, то $\overline{f} = \overline{[a_1s_1b_1]} = [a_1\bar{s}_1b_1]$, и утверждение справедливо. Пусть $l \geqslant 2$. Тогда по лемме 2.10 имеем
$$[a_1s_1b_1] \equiv [a_2s_2b_2] \mod (S, [w_1]).$$
Поэтому, если $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ или $l > 2$, утверждение справедливо. В противном случае применяем индукцию по $[w_1]$. Утверждение доказано.

Проверим справедливость импликации 2) $\Longrightarrow$ 2′). Пусть выполняется условие 2) и $0 \neq f \in \mathrm{Id}(S)$. Пусть $f = \alpha_1\overline{f} + \ldots$. По 2) $\overline{f} = [a_1\bar{s}_1b_1]$. Поэтому $f_1 = f - \alpha_1[a_1s_1b_1]$, $\overline{f_1} < \overline{f}$, $f_1 \in \mathrm{Id}(S)$. Теперь можно воспользоваться индукцией по $\overline{f}$.

Утверждение 2′) $\Longrightarrow$ 2) ясно.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Предположим, что $\sum\limits_i \alpha_i[u_i] = 0$ в $\mathrm{RS}\langle X|S\rangle$, где $\alpha_i \in k$, $[u_i] \in \mathrm{Irr}(S)$. Это означает, что $\sum\limits_i \alpha_i[u_i] \in \mathrm{Id}(S)$ в $\mathrm{RS}\langle X\rangle$. Все α_i равны нулю, иначе $\overline{\sum\limits_i \alpha_i[u_i]} = [u_j]$ для некоторого j, что противоречит 2).

По лемме 2.11 $\mathrm{Irr}(S)$ является множеством линейных порождающих фактор-алгебры. Утверждение 3) доказано.

Убедимся, что справедлива импликация 3) $\Longrightarrow$ 1). Применяя лемму 2.11 к некоторой композиции многочленов из S, согласно 3) мы легко получаем, что любая композиция тривиальна по модулю S (поскольку композиция лежит в $\mathrm{Id}(S)$). □

3. Базис Грёбнера—Ширшова универсальной обёртывающей правосимметричной алгебры для алгебры Ли

Универсальная обёртывающая правосимметричная алгебра для алгебры была определена в [59]. Мы находим базис Грёбнера—Ширшова этой алгебры.

Теорема 3.1. *Пусть* $(\mathcal{L}, [,])$ — *алгебра Ли с вполне упорядоченным базисом* $\{e_i \mid i \in I\}$. *Пусть таблица умножения алгебры* $\mathcal{L}$ *задана по правилу*

$$[e_i, e_j] = \sum_m \alpha_{ij}^m e_m, \quad i > j,$$

где $\alpha_{ij}^m \in k$. *Обозначим* $\sum\limits_m \alpha_{ij}^m e_m$ *через* $\{e_i e_j\}$. *Пусть*

$$U(\mathcal{L}) = \mathrm{RS}\langle \{e_i\}_I \mid e_i e_j - e_j e_i = \{e_i e_j\},\ i, j \in I,\ i > j\rangle -$$

универсальная обёртывающая правосимметричная алгебра для алгебры $\mathcal{L}$. *Положим*

$$S = \{f_{ij} = e_i e_j - e_j e_i - \{e_i e_j\},\ i, j \in I,\ i > j\}.$$

Тогда

1) S — *базис Грёбнера—Ширшова в* $\mathrm{RS}\langle X\rangle$, *где* $X = \{e_i\}_I$;
2) $\mathcal{L}$ *вкладывается в* $U(\mathcal{L})$ *как лиева подалгебра* (см. [59]).

Доказательство. Докажем первое утверждение. Понятно, что $\overline{f_{ij}} = e_i e_j$ $(i > j)$. Поэтому существует единственный вид композиций правого умножения, а именно $f_{ij} e_k$ $(i > j > k)$. Тогда в $\mathrm{RS}\langle X\rangle$ имеем

$$\begin{aligned}
&f_{ij}e_k - f_{ik}e_j + f_{jk}e_i - e_i f_{jk} + e_j f_{ik} - e_k f_{ij} - \\
&\quad - \sum_m \alpha_{jk}^m f_{im} - \sum_m \alpha_{ij}^m f_{km} - \sum_m \alpha_{ik}^m f_{mj} = \\
&\quad = (e_ie_j)e_k - (e_je_i)e_k - \{e_ie_j\}e_k - (e_ie_k)e_j + (e_ke_i)e_j + \{e_ie_k\}e_j + \\
&\quad + f_{jk}e_i - e_i f_{jk} + e_j f_{ik} - e_k f_{ij} - \sum_m \alpha_{jk}^m f_{im} - \sum_m \alpha_{ij}^m f_{km} - \sum_m \alpha_{ik}^m f_{mj} = \\
&\quad = (e_ie_k)e_j + e_i(e_je_k) - e_i(e_ke_j) - (e_je_k)e_i - e_j(e_ie_k) + e_j(e_ke_i) - \{e_ie_j\}e_k - \\
&\quad - (e_ie_k)e_j + (e_ke_j)e_i + e_k(e_ie_j) - e_k(e_je_i) + \{e_ie_k\}e_j + \\
&\quad + f_{jk}e_i - e_i f_{jk} + e_j f_{ik} - e_k f_{ij} - \sum_m \alpha_{jk}^m f_{im} - \sum_m \alpha_{ij}^m f_{km} - \sum_m \alpha_{ik}^m f_{mj} = \\
&\quad = -(e_je_k)e_i + (e_ke_j)e_i + e_i(e_je_k) - e_i(e_ke_j) + e_j(e_ke_i) - e_j(e_ie_k) - \\
&\quad - e_k(e_je_i) + e_k(e_ie_j) - \{e_ie_j\}e_k + \{e_ie_k\}e_j + \\
&\quad + f_{jk}e_i - e_i f_{jk} + e_j f_{ik} - e_k f_{ij} - \sum_m \alpha_{jk}^m f_{im} - \sum_m \alpha_{ij}^m f_{km} - \sum_m \alpha_{ik}^m f_{mj} = \\
&\quad = -\{e_je_k\}e_i + e_i\{e_je_k\} - e_j\{e_ie_k\} + e_k\{e_ie_j\} - \{e_ie_j\}e_k + \{e_ie_k\}e_j -
\end{aligned}$$

$$-\sum_m \alpha_{jk}^m f_{im} - \sum_m \alpha_{ij}^m f_{km} - \sum_m \alpha_{ik}^m f_{mj} =$$
$$= -\{\{e_k e_i\}e_j\} - \{\{e_i e_j\}e_k\} - \{\{e_j e_k\}e_i\} = 0 \ \text{(согласно тождеству Якоби).}$$

Поэтому $f_{ij}e_k \equiv 0 \mod (S)$. Таким образом, S — базис Грёбнера—Ширшова алгебры $U(\mathcal{L})$.

Второе утверждение следует из теоремы 2.12. □

Работа поддержана грантом Государственного фонда естественных наук Китая № 10771077 и грантом Национального научного фонда (провинция Гуанчжоу) № 06025062. Первый автор поддержан грантом «Ведущие научные школы» (проект № 344.2008.1) и Интеграционным грантом СО РАН № 2009.97.

Литература

[1] Бокуть Л. А. Неразрешимость проблемы равенства для алгебр Ли и подалгебры конечно определённых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1972. — Т. 36. — С. 1173—1219.

[2] Бокуть Л. А. Вложения в простые ассоциативные алгебры // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15. — С. 117—142.

[3] Бокуть Л. А., Колесников П. С. Базисы Грёбнера—Ширшова: от зарождения до наших дней // Зап. науч. сем. Санкт-Петербург. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2000. — Т. 272. — С. 26—67.

[4] Бокуть Л. А., Фонг Ю., Ке В.-Ф., Колесников П. С. Базисы Грёбнера и Грёбнера—Ширшова в алгебре и конформные алгебры // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 669—706.

[5] Васильева Е. А., Михалёв А. А. Свободные лево-симметричные супералгебры // Фундамент. и прикл. мат. — 1996. — Т. 2, вып. 2. — С. 611—613.

[6] Винберг Э. Б. Однородные конусы // ДАН СССР. — 1960. — Т. 133. — С. 9—12.

[7] Жуков А. И. Полные системы определяющих соотношений для неассоциативных алгебр // Мат. сб. — 1950. — Т. 69 (27). — С. 267—280.

[8] Курош А. Г. Неассоциативные свободные алгебры и свободное произведение алгебр // Мат. сб. — 1947. — Т. 20 62. — С. 239—262.

[9] Михалёв А. А. Метод композиций Ширшова для лиевых супералгебр Ли (некоммутативные базисы Грёбнера) // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1995. — Вып. 18. — С. 277—289.

[10] Ширшов А. И. Некоторые проблемы теории неассоциативных колец и алгебр: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — М., 1953.

[11] Ширшов А. И. Подалгебры свободных алгебр Ли // Мат. сб. — 1953. — Т. 33 (75), № 2. — С. 441—452.

[12] Ширшов А. И. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр // Мат. сб. — 1954. — Т. 34 (76). — С. 81—88.

[13] Ширшов А. И. О свободных кольцах Ли // Мат. сб. — 1958. — Т. 45 (87). — С. 113—122.

[14] Ширшов А. И. О базах свободных алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1962. — Т. 1, № 1. — С. 14—19.

[15] Ширшов А. И. Некоторые алгоритмические проблемы для ε-алгебр // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3. — С. 132—137.

[16] Ширшов А. И. Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3. — С. 292—296.

[17] Aymon M., Grivel P.-P. Un théorème de Poincaré—Birkhoff—Witt pour les algèbres de Leibniz // Commun. Algebra. — 2003. — Vol. 31. — P. 527—544.

[18] Bahturin Y. A. Identical Relations in Lie Algebras. — VNU Science Press, 1987.

[19] Bahturin Y. A. Groups, Rings, Lie and Hopf Algebras. — Kluwer Academis, 2003.

[20] Bahturin Y. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V. Infinite-Dimensional Lie Superalgebras. — Berlin: Walter de Gruyter, 1992. — (De Gruyter Exp. Math.; Vol. 7).

[21] Bergman G. M. The diamond lemma for ring theory // Adv. Math. — 1978. — Vol. 29. — P. 178—218.

[22] Bokut L. A. Gröbner—Shirshov bases for braid groups in Artin—Garside generators // J. Symbolic Comput. — 2008. — Vol. 43. — P. 397—405.

[23] Bokut L. A. Gröbner—Shirshov bases for the braid groups in the Birman—Ko—Lee generators // J. Algebra. — 2009. — Vol. 321. — P. 361—376.

[24] Bokut L. A., Chainikov V. V., Shum K. P. Markov and Artin normal form theorem for braid groups // Commun. Algebra. — 2007. — Vol. 35. — P. 2105—2115.

[25] Bokut L. A., Chen Y. Gröbner—Shirshov bases: Some new results // Proc. of the Second Int. Congress in Algebra and Combinatorics. — World Scientific, 2008. — P. 35—56.

[26] Bokut L. A., Chen Y., Liu C. Gröbner—Shirshov bases for dialgebras. — `arXiv.org/abs/0804.0638`.

[27] Bokut L. A., Chen Y., Qiu J. Gröbner—Shirshov bases for associative algebras with multiple operators and free Rota—Baxter algebras. — `arXiv.org/abs/0805.0640`.

[28] Bokut L., Chen Y., Zhao X. Gröbner—Shirshov beses for free inverse semigroups // Internat. J. Algebra Comput. — To appear. — `arXiv.org/abs/0804.0959`.

[29] Bokut L. A., Chibrikov E. Lyndon—Shirshov words, Gröbner—Shirshov bases, and free Lie algebras // Non-Associative Algebra and Its Applications / L. V. Sabinin, L. Sbitneva, and I. P. Shestakov, eds. — CRC Press, 2006. — P. 17—34. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 246).

[30] Bokut L. A., Fong Y., Ke W.-F. Composition diamond lemma for associative conformal algebras // J. Algebra. — 2004. — Vol. 272. — P. 739—774.

[31] Bokut L. A., Fong Y., Ke W.-F., Shiao L.-S. Gröbner—Shirshov bases for the braid semigroup // Proc. of the ICM Satellite Conf. in Algebra and Related Topics, Hong Kong, China, August 14—17, 2002. — River Edge: World Scientific, 2003. — P. 60—72.

[32] Bokut L. A., Kang S.-J., Lee K.-H., Malcolmson P. Gröbner—Shirshov bases for Lie supalgebras and their universival enveloping algebras // J. Algebra. — 1999. — Vol. 217, no. 2. — P. 461—495.

[33] Bokut L. A., Kolesnikov P. S. Gröbner—Shirshov bases: Conformal algebras and pseudoalgebras // J. Math. Sci. — 2005. — Vol. 131, no. 5. — P. 5962—6003.

[34] Bokut L. A., Kukin G. P. Algorithmic and combinatorial algebra // Dordrecht: Kluwer Academic, 1994. — (Math. Its Appl.; Vol. 255).

[35] Bokut L. A., Shiao L.-S. Gröbner—Shirshov bases for Coxeter groups // Commun. Algebra. — 2001. — Vol. 29, no. 9. — P. 4305—4319.

[36] Buchberger B. Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalem Polynomideal: Dissertation. — Univ. of Innsbruck, 1965.

[37] Buchberger B. Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems // Aequationes Math. — 1970. — Vol. 4. — P. 374—383.

[38] Burde D. Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics // Central European J. Math. — 2006. — Vol. 4, no. 3. — P. 323—357.

[39] Cayley A. On the theory of analytic forms called trees // Collected Mathematical Papers. Vol. 3. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980. — P. 242—246.

[40] Chen K.-T., Fox R. H., Lyndon R. C. Free differential caculus. IV. The quotient groups of the lower central series // Ann. Math. — 1958. — Vol. 68. — P. 81—95.

[41] Cohn P. M. Universal Algebra. — New York: Harper & Row, 1965.

[42] Drensky V., Holtkamp R. Planar trees, free nonassociative algebras, invariants, and elliptic integrals. — 2008. — arxiv.org/abs/0710.0493v2.

[43] Ebrahimi-Fard K., Guo L. Free Rota—Baxter algebras and rooted trees // J. Algebra Appl. — 2008. — Vol. 7. — P. 167—194.

[44] Gerstenhaber M. The cohomology structure of an associative ring // Ann. Math. — 1963. — Vol. 78. — P. 267—288.

[45] Hironaka H. Resolution of singulatities of an algebtaic variety over a field if characteristic zero. I, II // Ann. Math. — 1964. — Vol. 79. — P. 109—203; 205—326.

[46] Kang S.-J., Lee K.-H. Gröbner—Shirshov bases for irreducible sl_{n+1}-modules // J. Algebra. — 2000. — Vol. 232. — P. 1—20.

[47] Kang S.-J., Lee K.-H. Gröbner—Shirshov bases for representation theory // J. Korean Math. Soc. — 2000. — Vol. 37. — P. 55—72.

[48] Kang S.-J., Lee I.-S., Lee K.-H., Oh H. Hecke algebras, Specht modules and Gröbner—Shirshov bases // J. Algebra. — 2002. — Vol. 252. — P. 258—292.

[49] Kang S.-J., Lee D.-I., Lee K.-H., Park H. Linear algebraic approach to Gröbner—Shirshov basis theory // J. Algebra. — 2007. — Vol. 313. — P. 988—1004.

[50] Koszul J.-L. Domaines bornés homogènes et orbites de groupes de transformations affines // Bull. Soc. Math. France. — 1961. — Vol. 89. — P. 515—533.

[51] Kozybaev D., Makar-Limanov L., Umirbaev U. The Freiheitssatz and autoumorphisms of free right-symmetric algebras // Asian-European J. Math. — 2008. — Vol. 1, no. 2. — P. 243—254.

[52] Latyshev V. N. A combinatorial complexity of Gröbner bases // J. Math. Sci. — 2000. — Vol. 102, no. 3. — P. 4134—4138.

[53] Latyshev V. N. An improved version of standard bases // Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. Proc. of the 12th Int. Conf., FPSAC'00, Moscow, Russia, June 26—30, 2000 / D. Krob, ed. — Berlin: Springer, 2000. — P. 496—505.

[54] Latyshev V. N. Canonization and standard bases on filtered structures // Lie Algebras, Rings and Related Topics. Papers of the 2nd Tainan—Moscow International Algebra Workshop '97, Tainan, Taiwan, January 11—17, 1997 / Y. Fong, ed. — Hong Kong: Springer, 2000. — P. 61—79.

[55] Latyshev V. N. A general version of standard basis and its application to T-ideals // Acta Appl. Math. — 2005. — Vol. 85, no. 1-3. — P. 219—223.

[56] Lyndon R. C. On Burnside problem // Trans. Amer. Math. Soc. — 1954. — Vol. 77. — P. 202—215.

[57] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Combinatorial Aspects of Lie Superalgebras. — Boca Raton: CRC Press, 1995.

[58] Reutenauer C. Free Lie Algebras. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1993.

[59] Segal D. Free left-symmetric algebras and an analogue of the Poincaré—Birkhoff—Witt theorem // J. Algebra. — 1994. — Vol. 164. — P. 750—772.

[60] Ufnarovskij V. A. Combinatorial and asymptotic methods in algebra // Algebra VI: Combinatorial and Asymptotic Methods of Algebra: Non-Associative Structures / A. I. Kostrikin, I. R. Shafrevich, eds. — Berlin: Birkhäuser, 1995. — (Encycl. Math. Sci.; Vol. 57).

[61] Viennot G. Algèbres de Lie Libres et Monoides Libres. — Berlin: Springer, 1978. — (Lect. Notes Math.; Vol. 691).