О независимых системах в относительно свободных унитарных алгебрах

А. В. ГРИШИН
Московский педагогический государственный университет
e-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

УДК 512.552

Ключевые слова: унитарная относительно свободная алгебра, независимая система, аффинное пространство, общая точка.

Аннотация

В унитарной относительно свободной алгебре F с ассоциативными степенями находится семейство систем многочленов достаточно общего вида (треугольные системы), которые порождают подалгебру, изоморфную алгебре F. Доказательство независимости основано на некоторых простых алгебро-геометрических соображениях.

Abstract

A. V. Grishin, On independent systems in unitary relatively free algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 8, pp. 69—71.

This paper introduces a family of polynomial systems of quite general form (triangular systems) in a unitary relatively free algebra F with associative degrees. These systems generate a subalgebra that is isomorphic to the algebra F. The proof of independency is based on some simple algebro-geometric consideration.

Пусть $F = k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ — унитарная относительно свободная счётно порождённая алгебра с ассоциативными степенями, k — бесконечное поле, которое без ущерба для общности можно считать алгебраически замкнутым. Систему полиоднородных многочленов $\{g_i\}$ из алгебры F назовём *треугольной*, если она имеет вид

$$g_1(x_1), g_2(x_1, x_2), \ldots, g_i(x_1, \ldots, x_i), \ldots,$$

причём

$$g_1(x_1) = x_1^{m_1},\ g_2(1, x_2) = x_2^{m_2}, \ldots,\ g_i(1, \ldots, 1, x_i) = x_i^{m_i}, \ldots,$$

где $(m_i, p) = 1$, если k — поле характеристики $p > 0$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Отображение*

$$\varphi\colon F \to k\langle 1, g_1, \ldots, g_i, \ldots\rangle, \quad x_i \mapsto g_i,$$

является изоморфизмом k-алгебр.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 8, с. 69—71.

Эта теорема, очевидно, эквивалентна следующему утверждению («принцип сокращения»).

Пусть $\{g_i\}$ — *произвольная треугольная система. Тогда для любого многочлена* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *алгебры* F *из* $f(g_1, \ldots, g_n) = 0$ *следует* $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Доказательство основано на очевидном факте, что алгебра F аппроксимируется конечномерными алгебрами вида $A = k + N$, где N — нильпотентный идеал алгебры A. Достаточно доказать теорему для относительно свободных алгебр многообразий $\operatorname{Var} A$, порождённых алгебрами A. Пусть $\dim A = r$. Будем рассматривать алгебру A как r-мерное аффинное пространство над полем k (точнее, A — *множество* k*-точек* этого пространства). Кроме того, рассмотрим алгебру $A(K) = K \otimes_k A$, полученную расширением поля коэффициентов до алгебраически замкнутого поля K, имеющего бесконечную степень трансцендентности над k. Множество обратимых элементов $A^* = A \setminus N$ является множеством k-точек открытого в топологии Зариского подмножества в $A(K)$.

Рассмотрим бесконечную алгебраически независимую над k систему элементов

$$\{x_i^{(j)} \mid i \in \mathbb{N},\ j = 1, \ldots, r\}$$

поля K и некоторый k-базис $e_1, \ldots, e_r$ алгебры A. Относительно свободная алгебра $\bar{F}$ многообразия $\operatorname{Var} A$ порождена следующими элементами (см. [1]):

$$\bar{x}_i = x_i^{(1)} e_1 + \ldots + x_i^{(r)} e_r,$$

т. е. $\bar{F} = k\langle 1, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots\rangle$. Докажем теорему для алгебры $\bar{F}$.

Лемма 1. *Если* $(m, p) = 1$, *то отображение*

$$g\colon A^* \to A^*, \quad a \mapsto a^m,$$

сюръективно.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что из любого элемента вида $1 + \alpha$, где $\alpha^l = 0$, можно извлечь корень степени m. При $l = 2$ корень равен $1 + \frac{1}{m}\alpha$. Общая ситуация сводится к рассмотрению конечной цепочки подгрупп

$$G_1 = \{1 + k[\alpha]\alpha\} \supset \ldots \supset G_{l-1} = \{1 + k[\alpha]\alpha^{l-1}\} \supset \{1\},$$

для которой возможность извлечения корня на всех факторах G_{i-1}/G_i очевидна. □

Лемма 2. $\bigl(g_1(\bar{x}_1), \ldots, g_n(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)\bigr)$ — *общая точка* nr*-мерного аффинного пространства* $A^n(K)$.

Доказательство. То, что координаты точки $g_1(\bar{x}_1)$ из $A(K)$ алгебраически независимы над k, следует из леммы 1. Элемент $g_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ при каждой k-специализации переменных $x_1^{(j)}$, соответствующей специализации $\bar{x}_1 \mapsto a_1 \in A^*$, индуцирует регулярное отображение $g_2(a_1, x_2)\colon A^* \to A^*$, $a_2 \mapsto g_2(a_1, a_2)$ (здесь a_1 — параметр отображения). Это отображение по лемме 1 сюръективно при $a_1 = 1$. Следовательно, координаты точки $g_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ алгебраически независимы над k и не зависят над k от координат точки $g_1(\bar{x}_1)$. Таким образом,

$\big(g_1(\bar{x}_1), g_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\big)$ — общая точка пространства $A^2(K)$. Продолжая далее аналогично, получаем утверждение леммы. □

Для завершения доказательства теоремы заметим, что по лемме 2 регулярное отображение

$$f\colon A^n(K) \to A(K), \quad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto f(a_1, \ldots, a_n),$$

равно нулю в общей точке. Следовательно, $f\big(A^n(K)\big) = 0$, или, что равносильно, $f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0$.

Следствие. *Если $f(g_1, \ldots, g_n)$ — элемент ассоциативного или коммутативного центра алгебры F, то $f(x_1, \ldots, x_n)$ обладает тем же свойством.*

Замечания.

1. Условие $(m_i, p) = 1$ существенно. Рассмотрим следующий пример. Пусть F — относительно свободная счетно порождённая ассоциативная алгебра, заданная тождеством $\big[[x_1, x_2], x_3\big] = 0$, k — поле характеристики $p > 0$. Тогда алгебра $k\langle 1, x_1^p, \ldots, x_i^p, \ldots\rangle$, как известно (см. [2]), является алгеброй коммутативных многочленов.
2. Было бы интересно найти системы $\{g_i\}$ более общего вида, для которых справедлива теорема. Например, можно исследовать полиоднородную систему с условием, что матрица (m_{ij}) кратностей вхождений переменных x_i в многочлены g_j невырожденна в поле k.
3. Пусть A — некоторая k-алгебра (не обязательно ассоциативная). Назовём систему S элементов из алгебры A *алгебраически независимой*, если $k\langle S\rangle$ является относительно свободной алгеброй многообразия $\mathrm{Var}\, A$ с множеством относительно свободных порождающих S. Нетрудно убедиться, что введённое понятие тесно связано с доказанной теоремой. Представляется достаточно интересной задача об изучении свойств алгебраически независимых систем.
4. Можно было бы построить доказательство теоремы на погружении F в алгебру формальных степенных рядов или (по крайней мере в ассоциативном случае) на более детальном анализе тождеств алгебры F. Однако предложенный метод доказательства представляется более наглядным.

Литература

[1] Гришин А. В. Показатель роста многообразия алгебр и его приложения // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26, № 5. — С. 536—557.

[2] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. О (p, n)-проблеме // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. Математика. — 2007. — Т. 57, № 7. — С. 35—55.