# Полные полугруппы бинарных отношений, определённые полурешётками объединений

**Я. ДИАСАМИДЗЕ**
*Батумский государственный университет им. Шота Руставели*
e-mail: diasamidze_ya@mail.ru

**Ш. МАХАРАДЗЕ**
*Батумский государственный университет им. Шота Руставели*
e-mail: axiomabat@rambler.ru

УДК 512.534.1

**Ключевые слова:** полугруппы, полурёшетки, бинарные отношения.

**Аннотация**

В статье приведены интересные результаты из ещё не опубликованной книги «Полные полугруппы бинарных отношений». Описаны условия делимости бинарных отношений, идемпотентов, регулярных элементов, односторонних единиц, односторонних нулей. Охарактеризованы конечные $X$-полурешётки, объединения. Приведены методы нахождения формул для подсчёта числа идемпотентов и регулярных элементов.

**Abstract**

*Ya. Diasamidze, Sh. Makharadze, Complete semigroups of binary relations defined by $X$-semilattices of unions*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 8, pp. 73—99.

This paper is devoted to some results from the book «Complete Semigroups of Binary Relations», which is not published yet. Conditions of divisibility of binary relations, idempotents, regular elements, one-side units, and one-side zeros are described. Finite $X$-semilattices and unions are characterized. Methods of finding formulas for counting the number of idempotents and regular elements are given.

Напомним, что полугруппа есть множество с одной бинарной операцией, удовлетворяющее закону ассоциативности, а ассоциативные операции пронизывают всю математику. Абстрактное изучение обратимых ассоциативных операций взяла на себя теория групп. Абстрактное изучение ассоциативных операций, не являющихся всюду обратимыми, — задача теории полугрупп.

Теория полугрупп — одна из активно развивающихся областей современной алгебры. Она тесно связана с самыми различными математическими дисциплинами: дифференциальной геометрией, функциональным анализом, теорией графов, теорией алгоритмов, абстрактной теорией автоматов и др.

Примеры полугрупп чрезвычайно многочисленны. Всякая совокупность преобразований произвольного множества $M$, замкнутая относительно операции

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2008, том 14, № 8, с. 73—99.

композиции, будет полугруппой относительно этой операции; такова, в частности, совокупность всех преобразовании множества $M$, называемая симметрической полугруппой на множестве $M$. С другой стороны, всякая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований. Таким образом, именно понятие полугруппы оказывается наиболее подходящим для изучения преобразований в самом общем виде, более того, через рассмотрение преобразований осуществляются связи теории полугрупп с другими областями математики.

В общей теории и некоторых приложениях важен следующий пример полугрупп. Пусть $X$ — произвольное непустое множество, $X \times X$ — декартово произведение множества $X$ на себя. Напомним, что произвольное подмножество множества $X \times X$ называется бинарным отношением на множестве $X$. Пусть $\mathrm{B}_X$ — множество всех бинарных отношений на множестве $X$, $\alpha, \beta \in \mathrm{B}_X$. Отметим, что условие $(x, y) \in \alpha$ мы будем записывать в виде $x \,\alpha\, y$, а его отрицание — в виде $(x, y) \notin \alpha$. На множестве $\mathrm{B}_X$ определяется операция умножения $\circ$ бинарных отношений $\alpha$ и $\beta$ следующим образом:

$$\alpha \circ \beta = \{(x, y) \in X \times X \mid \text{существует такое } z \in X, \text{ что } x \,\alpha\, z \text{ и } z \,\beta\, y\}.$$

Операция умножения бинарных отношений ассоциативна, и поэтому множество $\mathrm{B}_X$ будет полугруппой относительно умножения бинарных отношений. Эта полугруппа называется полугруппой всех бинарных отношений на множестве $X$.

Так как любую полугруппу можно изоморфно вложить в некоторую полугруппу бинарных отношений, то при изучении подполугрупп полугруппы $\mathrm{B}_X$ изучаются полугруппы вообще.

В теории полугрупп ряд глубоких результатов связан с полугруппой бинарных отношений: обобщённая теорема Келли, теорема К. А. Зарецкого об определяемости полугруппы бинарных отношений плотно вложенными идеалами, теорема Шайна—Мак-Кензи о точном транзитивном представлении любой полугруппы бинарными отношениями, результаты Шайна, Шварца, Тамуры, Клиффорда, Батлера и др.

Скажем несколько слов о развитии теории бинарных отношений. Как известно, понятие бинарного отношения является одним из основных понятий математики. Частным случаем бинарного отношения может служить отображение некоторого множества в некоторое множество.

Впервые основные понятия теории бинарных отношений были введены в работах Де Моргана, Пирса и Фреге, посвящённых математической логике. В девяностых годах XIX века Э. Шрёдер в третьем томе своей книги «Алгебра логики» дал систематическое изложение теории бинарных отношений. В начале XX века в работе Уайтхеда и Рассела, которая опиралась на труд Э. Шрёдера, этой теории была посвящена целая глава. Но эти работы в теории бинарных отношений служили в основном в интересах основания математики и математической логики, а в других областях математики почти не применялись.

Французский математик Риге модернизировал теорию бинарных отношений Э. Шрёдера и сделал её более удобной для применения. Опираясь на эту теорию, он начал систематическое построение теории упорядоченных множеств.

Отметим, что геометрический аспект теории бинарных отношений — это теория графов. Она является частью теории бинарных отношений, хотя рассматривается изолированно от последней, так как теория графов изучает свойства бинарных отношений для специальных приложений этой теории.

Отметим, что язык бинарных отношений очень удобен и естественен для приложения в математической лингвистике, математической биологии и целом ряде других прикладных областей математики.

Теория бинарных отношений имеет также важное приложение в теории автоматов. В частности, каждый конечный универсальный автомат можно представить, как помеченный ориентированный граф, называемый диаграммой состояний.

Для алгебры теория бинарных отношений является особенно важной. Здесь появляется необходимость изучения не только бинарных, но также $n$-арных отношений, поскольку $n$-арная алгебраическая операция представляет собой $(n+1)$-арное отношение.

Теория бинарных отношений особенно важна в той части математики, которая называется алгеброй частичных отображений. Учитывая это, В. В. Вагнер дал систематическое изложение теории бинарных отношений и общей теории $n$-отношений в том виде, в каком она наиболее подходит для применения в алгебре частичных отображений.

Известно, что алгебра отношений, алгебра булевых матриц и теория решёток тесно связаны друг с другом. Задачи алгебры отношений можно решить методами теории графов, методами алгебры булевых матриц, методами теории решёток, а методами алгебры отношений также можно решать некоторые задачи теории решёток, теории графов и алгебры булевых матриц.

Одной из главных задач теории полугрупп, как и других алгебраических теорий, является классификация всевозможных полугрупп, описание их строения. Оно осуществляется, прежде всего, наложением на рассматриваемые полугруппы различных ограничений и выделением тем самым различных типов полугрупп. Ограничения могут иметь разную природу. Полугруппа может удовлетворять фиксированной системе тождеств (типичные примеры — коммутативные полугруппы, полугруппы идемпотентов) или другим условиям, выражаемым формулой узкого исчисления предикатов (например, регулярные полугруппы).

Сложность изучения полугрупп бинарных отношений связана с тем, что они, как правило, не являются регулярными полугруппами, что технически затрудняет их исследование. В этой связи весьма интересным представляется систематическое изучение полугрупп бинарных отношений и их наиболее важных классов при помощи полных $X$-полурешёток объединений. Опишем этот метод. Для этого сначала введём несколько определений и обозначений.

Через $D$ обозначается некоторое непустое множество подмножеств множества $X$, замкнутое относительно теоретико-множественного объединения элементов множества $D$. Очевидно, что множество $D$ является коммутативной полугруппой идемпотентных элементов относительно операции теоретико-множественного объединения. Кроме того, $D$ является таким частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения, что его любое непустое подмножество обладает точной верхней гранью, т. е. оно является полной полурешёткой. В дальнейшем множество $D$ будем называть полной $X$-полурешёткой объединений. По определению множества $D$ имеем, что $\bigcup D = \bigcup_{Y\in D} Y \in D$. Этот элемент в дальнейшем будем обозначать через $\breve{D}$, т. е. $\bigcup D = \breve{D}$ и $\breve{D}$ является наибольшим элементом множества $D$.

Пусть $x$, $y$, $z$ — некоторые элементы множества $X$, $Y$ — произвольное подмножество множества $X$, $\alpha$ — произвольный элемент полугруппы $\mathrm{B}_X$, через $\varnothing$ обозначено пустое множество, или пустое бинарное отношение. Тогда

$$\alpha^{-1} = \{(x,y) \mid y\alpha x\}, \quad x\alpha = \{y \in X \mid x\alpha y\}, \quad Y\alpha = \bigcup_{x\in Y} x\alpha,$$
$$ax = x\alpha^{-1}, \quad \alpha Y = Y\alpha^{-1}, \quad 2^X = \{Y \mid Y \subseteq X\},$$
$$X^* = \{Y \mid \varnothing \neq Y \subseteq X\},$$
$$V(D,\alpha) = \{Y\alpha \mid Y \in D\}, \quad V^{-1}(D,\alpha) = \{\alpha Y \mid Y \subseteq \breve{D}\}.$$

Ясно, что множества $2^X$, $X^*$, $V(D,\alpha)$ и $V^{-1}(D,\alpha)$ являются полными $X$-полурешётками объединений.

Пусть $B$ — произвольная подполугруппа полугруппы $\mathrm{B}_X$ и

$$D(B) = \bigcup_{\alpha\in B} V(X^*,\alpha).$$

Мы докажем, что $D(B)$ для любого $B$ является полной $X$-полурешёткой объединений. Отметим, что существуют такие подполугруппы $B$ и $B'$ полугруппы $\mathrm{B}_X$, что $B \neq B'$ и $D(B) = D(B')$. Теперь допустим, что полугруппа $B$ фиксирована. Ставится вопрос, существует ли в множестве всех тех подполугрупп $B'$ полугруппы $\mathrm{B}_X$, для которых $D(B') = D(B)$, такая полугруппа $\bar{B}$, которая содержит все полугруппы данного множества и удовлетворяет условию $D(\bar{B}) = D(B)$. Заметим, что такая полугруппа существует, и мы её построим.

В самом деле, пусть $X$ — произвольное непустое множество и $D$ — полная $X$-полурешётка объединений. Пусть $f$ — произвольное отображение множества $X$ в множество $D$. Каждому такому отображению $f$ поставим в соответствие бинарное отношение $\alpha_f$ на множестве $X$, удовлетворяющее условию $\alpha_f = \bigcup_{x\in X} \bigl(\{x\} \times f(x)\bigr)$. Множество всех таких $\alpha_f$ ($f\colon X \to D$) обозначим через $\mathrm{B}_X(D)$. Очевидно, что $\mathrm{B}_X(D)$ есть подмножество полугруппы $\mathrm{B}_X$ всех бинарных отношений на множестве $X$. Доказывается, что $\mathrm{B}_X(D)$ является подполугруппой полугруппы $\mathrm{B}_X$ и наибольшей полугруппой среди тех подполугрупп $B'$ полугруппы $\mathrm{B}_X$, для которых справедливо равенство $D(B') = D$. Необходимо отметить, что $\mathrm{B}_X(2^X) = \mathrm{B}_X$ и $|\mathrm{B}_X(D)| = |D|^{|X|}$, если $X$ — конечное множество.

Класс всех полных полугрупп бинарных отношений обозначим $\Xi$. Очевидно, что каждый элемент класса $\Xi$ зависит как от множества $X$, так и от полных $X$-полурешёток объединений, которыми они определяются.

Для подтверждения тесной связи $X$-полурешётки объединений с той полной полугруппой бинарных отношений, которая определяется заданной полурешёткой, можно привести следующие утверждения, сопровождающиеся соответствующими определениями и обозначениями.

**Теорема 1.** *Пусть $\alpha, \beta \in \mathrm{B}_X(D)$. В полугруппе $\mathrm{B}_X(D)$ отношение $\alpha$ делится справа на отношение $\beta$ в том и только в том случае, если $V(X^*, \alpha) \subseteq V(D, \beta)$.*

**Теорема 2.** *Пусть $x \in \breve{D}$, $\alpha, \beta \in \mathrm{B}_X(D)$, $U_x(\beta, \alpha) = \{y \in \breve{D} \mid \beta x \subseteq \alpha y\}$ и $U(\beta, \alpha) = \{U_x(\beta, \alpha) \mid x \in \breve{D}\}$. Тогда в полугруппе $\mathrm{B}_X(D)$ отношение $\alpha$ делится на отношение $\beta$ слева в том и только в том случае, если $V^{-1}(D, \alpha) \subseteq V^{-1}(D, \beta)$ и $U(\alpha, \beta) \subseteq D$.*

**Теорема 3.** *Бинарное отношение $\varepsilon \in \mathrm{B}_X(D)$ является правой единицей данной полугруппы в том и только в том случае, если $\varepsilon$ идемпотентно и $D = V(D, \varepsilon)$.*

**Теорема 4.** *Пусть $D$ — полная $X$-полурешётка объединений и $|D| > 1$. Тогда следующие три условия для полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$ эквивалентны:*

а) *бинарное отношение $\varepsilon \in \mathrm{B}_X$ есть левая единица полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$;*
б) *бинарное отношение $\varepsilon$ идемпотентно и $V^{-1}(D, \varepsilon) = V(\varepsilon) = D \cup \{\varnothing\} = 2^X$;*
в) *бинарное отношение $\varepsilon$ есть единица полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$.*

Из теоремы 4 при $|D| > 1$ непосредственно следует, что левую единицу (единицу) могут иметь только полугруппы $\mathrm{B}_X(X^*)$ и $\mathrm{B}_X(2^X) = \mathrm{B}_X$.

Если $|D| = 1$, т. е. $D = \{Y\}$ для некоторого подмножества $Y$ множества $X$, то $\mathrm{B}_X(D) = \{X \times Y\}$, и поэтому $X \times Y$ есть единица полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$.

**Теорема 5.** *Пусть $\varnothing \notin D$ и $|D| \geqslant 1$. Тогда правыми нулями полугруппы $K_X(D) = \{X \times Y \mid Y \in D\}$ являются элементы множества $\mathrm{B}_X(D)$ и только они.*

**Следствие 1.** *Пусть $\varnothing \notin D$ и $|D| > 1$. Тогда полугруппа $\mathrm{B}_X(D)$ не имеет левых нулей.*

Отметим, что если $\varnothing \in D$, то пустое бинарное отношение есть нуль полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$.

**Определение 1.** Пусть $D$ — полная $X$-полурешётка объединений, $\varnothing \neq D' \subseteq D$ и $N(D, D') = \{Z \in D \mid Z \subseteq Z'$ для любого $Z' \in D'\}$. Ясно, что $N(D, D')$ — множество всех нижних граней непустого подмножества $D'$ из $D$ в полурешётке $D$. Если $N(D, D') \neq \varnothing$, то $\bigcup N(D, D') \in D$ и есть точная нижняя грань множества $D'$ в $D$. Обозначим этот элемент через $\Lambda(D, D')$, т. е. $\Lambda(D, D') = \bigcup N(D, D')$.

Отметим, что если элемент $\Lambda(D, D')$ в полурешётке $D$ существует, то мы будем писать $\Lambda(D, D') \in D$, в противном случае — $\Lambda(D, D') \notin D$.

**Определение 2.** Будем говорить, что полная $X$-полурешётка объединений $D$ является $XI$-полурешёткой объединений, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

а) $\Lambda(D, D_t) \in D$ для любого $t \in \check{D}$;

б) $Z = \bigcup\limits_{t \in Z} \Lambda(D, D_t)$ для любого непустого элемента $Z$ полурешётки $D$.

**Теорема 6.** *Пусть $D$ — полная $X$-полурешётка объединений. Полугруппа $B_X(D)$ обладает правой единицей в том и только в том случае, если $D$ является $XI$-полурешёткой объединений.*

**Теорема 7.** *Пусть $\beta \in B_X(D)$. Бинарное отношение $\beta$ является регулярным элементом полугруппы $B_X(D)$ в том и только в том случае, когда полная $X$-полурешётка объединений $D' = V(D, \beta)$ удовлетворяет следующим двум условиям:*

а) $V(X^*, \beta) \subseteq D'$;

б) *$D'$ есть полная $XI$-полурешётка объединений.*

**Определение 3.** Пусть $D$ — произвольная полная $X$-полурешётка объединений, $\alpha \in B_X(D)$ и $Y_T^\alpha = \{x \in X \mid x\alpha = T\}$. Если

$$V[\alpha] = \begin{cases} V(X^*, \alpha), & \text{если } \varnothing \notin D, \\ V(X^*, \alpha), & \text{если } \varnothing \in V(X^*, \alpha), \\ V(X^*, \alpha) \cup \{\varnothing\}, & \text{если } \varnothing \notin V(X^*, \alpha) \text{ и } \varnothing \in D, \end{cases}$$

то очевидно, что любое бинарное отношение $\alpha$ полугруппы $B_X(D)$ всегда можно представить в виде $\alpha = \bigcup\limits_{T \in V[\alpha]} (Y_T^\alpha \times T)$. В дальнейшем такое представление бинарного отношения $\alpha$ будем называть квазинормальным.

Отметим, что при квазинормальном представлении бинарного отношения $\alpha$ не все множества $Y_T^\alpha$ могут быть отличными от пустого множества. Но при таком представлении всегда выполняются следующие условия:

а) $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha = \varnothing$ для любых $T, T' \in D$ и $T \neq T'$;

б) $X = \bigcup\limits_{T \in V[\alpha]} Y_T^\alpha$.

**Определение 4.** Пусть $\tilde{D}$ и $D'$ — некоторые непустые подмножества полной $X$-полурешётки объединений $D$. Будем говорить, что подмножество $\tilde{D}$ полурешётки $D$ порождает множество $D'$, если любой элемент множества $D'$ есть теоретико-множественное объединение некоторых элементов множества $\tilde{D}$. В частности, множество $\tilde{D}$ будем называть неприводимым порождающим множеством множества $D'$, если $\tilde{D}$ порождает множество $D'$ и в множестве $\tilde{D}$ нет собственного подмножества, порождающего $D'$.

**Теорема 8.** *Пусть $\alpha \in B_X(D)$, $D(\alpha)$ — некоторое порождающее множество полурешётки $V(D, \alpha) \setminus \{\varnothing\}$, $Z \in D(\alpha)$ и $\ddot{D}(\alpha)_Z = \{T \in D(\alpha) \mid T \subseteq Z\}$. Бинарное отношение $\alpha$, имеющее квазинормальное представление вида $\alpha = \bigcup\limits_{T \in D(\alpha)} (Y_T^\alpha \times T)$, является идемпотентным элементом данной полугруппы в том и только в том случае, когда подмножества $Y_T^\alpha$ $(T \in D(\alpha))$ множества $X$ и элементы $Z$ из множества $D(\alpha)$ удовлетворяют следующим условиям:*

а) $\bigcup\limits_{T'\in \ddot{D}(\alpha)_Z} Y^{\alpha}_{T'} \supseteq Z$ *для любого элемента* $Z$ *множества* $D(\alpha)$;

б) *для любого непустого элемента* $Z$ *множества* $D(\alpha)$ *существует такое подмножество* $B(Z)$ *множества* $\ddot{D}(\alpha)_Z$, *что* $Y^{\alpha}_{T'} \cap Z \neq \varnothing$ *для всех* $T' \in B(Z)$ *и* $\bigcup B(Z) = Z$.

Пусть $D'$ — произвольное непустое подмножество полной $X$-полурешётки объединений $D$, $T \in D'$ и $l(D', T) = \bigcup (D' \setminus D'_T)$, где $D'_T = \{Z \in D' \mid T \subseteq Z\}$.

**Определение 5.** Будем говорить, что непустое множество $T$ является предельным элементом множества $D'$, если $T \setminus l(D'T) = \varnothing$.

**Определение 6.** Будем говорить, что непустое множество $T$ является непредельным элементом множества $D'$, если $T \setminus l(D'T) = \varnothing$.

Пусть $\alpha \in \mathrm{B}_X(D)$. Тогда

$$T \in V(X^*, \alpha), \quad Y^{\alpha}_T = \{y \in X \mid y\alpha = T\}$$

и

$$V\langle\alpha\rangle = \{T \in V(X^*, \alpha) \mid Y^{\alpha}_T \neq \varnothing\}.$$

**Теорема 9.** *Пусть* $\alpha \in \mathrm{B}_X(D)$, $D(\alpha)$ — *некоторое порождающее множество полурешётки* $V(D, \alpha) \setminus \{\varnothing\}$, $Z \in D(\alpha)$ *и* $\ddot{D}(\alpha)_Z = \{T \in D(\alpha) \mid T \subseteq Z\}$. *Бинарное отношение* $\alpha$, *имеющее квазинормальное представление вида* $\alpha = \bigcup\limits_{T\in D(\alpha)} (Y^{\alpha}_T \times T)$, *является идемпотентным элементом данной полугруппы в том и только в том случае, когда подмножества* $Y^{\alpha}_T$ $(T \in D(\alpha))$ *множества* $X$ *и элементы* $Z$ *из множества* $D(\alpha)$ *удовлетворяют следующим условиям*:

а) $\bigcup\limits_{T'\in \ddot{V}\langle\alpha\rangle_Z} Y^{\alpha}_{T'} \supseteq Z$ *для любого* $Z$ *из* $V\langle\alpha\rangle$;

б) $Y^{\alpha}_Z \cap Z \neq \varnothing$ *для любого непредельного элемента* $Z$ *множества* $V\langle\alpha\rangle$;

в) *для любого предельного элемента* $Z$ *из* $V\langle\alpha\rangle$ *существует подмножество* $B(Z)$ *множества* $\ddot{V}\langle\alpha\rangle_Z \setminus \{Z\}$, *такое что* $Y^{\alpha}_{T'} \cap Z \neq \varnothing$ *для всех* $T' \in B(Z)$ *и* $\bigcup B(Z) = Z$.

**Определение 7.** Взаимно-однозначное отображение $\varphi$ между полными $X$-полурешётками объединений $D'$ и $D''$ будем называть полным изоморфизмом, если для каждого непустого подмножества $D_1$ полурешётки $D'$ выполняется условие $\varphi\big(\bigcup D_1\big) = \bigcup\limits_{T'\in D_1} \varphi(T')$.

**Определение 8.** Пусть $\alpha \in \mathrm{B}_X(D)$. Будем говорить, что полный изоморфизм $\varphi$ между полными полурешётками объединений $V(D, \alpha)$ и $D'$ является полным $\alpha$-изоморфизмом, если $\varphi(\varnothing) = \varnothing$ при $\varnothing \in V(D, \alpha)$ и $\varphi(T)\alpha = T$ для любого $T \in V(D, \alpha)$.

**Теорема 10.** *Пусть* $\alpha$ *и* $\sigma$ — *такие бинарные отношения полугруппы* $\mathrm{B}_X(D)$, *что* $\alpha \circ \sigma \circ \alpha = \alpha$. *Если* $D(\alpha)$ — *некоторое порождающее множество полурешётки* $V(D, \alpha) \setminus \{\varnothing\}$ *и* $\alpha = \bigcup\limits_{T\in V(D,\alpha)} (Y^{\alpha}_T \times T)$ *является квазинормальным представлением отношения* $\alpha$, *то* $V(D, \alpha)$ *будет полной* $XI$*-полурешёткой объединения.*

*Кроме того, существует полный $\alpha$-изоморфизм $\varphi$ между полурешётками $V(D,\alpha)$ и $D' = \{T\sigma \mid T \in V(D,\alpha)\}$, который удовлетворяет следующим условиям:*

а) $\varphi(T) = T\sigma$ *для любого* $T \in V(D,\alpha)$;

б) $\bigcup\limits_{T' \in \ddot{D}(\alpha)_T} Y^{\alpha}_{T'} \supseteq \varphi(T)$ *для любого* $T \in D(\alpha)$;

в) $Y^{\alpha}_T \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ *для любого непредельного элемента* $T$ *множества* $\ddot{D}(\alpha)_T$;

г) *если* $T$ — *предельный элемент множества* $\ddot{D}(\alpha)_T$, *то для множества* $B(T) = \{Z \in \ddot{D}(\alpha)_T \mid Y^{\alpha}_Z \cap \varphi(T) \neq \varnothing\}$ *всегда справедливо равенство* $\bigcup B(T) = T$.

С другой стороны, пусть $\alpha$ — такое бинарное отношение полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$, что множество $V(D,\alpha)$ есть $XI$-полурешётка объединений. Если для некоторого полного $\alpha$-изоморфизма $\varphi$ полурешётки $V(D,\alpha)$ на некоторую подполурешётку $D'$ полурешётки $D$ выполняются условия а)—г) данной теоремы, то $\alpha$ будет регулярным элементом полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$.

**Определение 9.** Пусть $\alpha \in \mathrm{B}_X$ и $\varphi$ — взаимно-однозначное отображение некоторого подмножества $D'_1$ полурешётки $D$ на полурешётку $V(X^*,\alpha)$. Будем говорить, что представление бинарного отношения $\alpha$ в виде $\alpha = \bigcup\limits_{T\in D_1} \big(Y^{\alpha}_T \times \varphi(T)\big)$ является нормальным, если для $Y^{\alpha}_T$ и $\varphi(T)$ данного представления одновременно выполняются следующие условия:

а) $D_1 \subseteq D'_1$;

б) $\varnothing \neq Y^{\alpha}_T \subset X$ для любого $T \in D_1$;

в) $Y^{\alpha}_T = Y^{\alpha}_{T'}$, если $\varphi(T) = \varphi(T')$;

г) $Y^{\alpha}_T \cap Y^{\alpha}_{T'} = \varnothing$, если $T, T' \in D_1$ и $T \neq T'$;

д) $\bigcup\limits_{T\in D_1} Y^{\alpha}_T = X$.

Через $\mathrm{G}_X(D,\varepsilon)$ обозначим максимальную подгруппу полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$, единицей которой является идемпотентное бинарное отношение полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$.

**Теорема 11.** *Пусть* $\varepsilon = \bigcup\limits_{T\in V\langle\varepsilon\rangle} (Y^{\varepsilon}_T \times T)$ — *нормальное представление идемпотентного бинарного отношения* $\varepsilon$ *полугруппы* $\mathrm{B}_X(D)$. *Тогда бинарное отношения* $\alpha$ *полугруппы* $\mathrm{B}_X(D)$ *принадлежит к группе* $\mathrm{G}_X(D,\varepsilon)$ *в том и только в том случае, когда его нормальное представление имеет вид* $\alpha = \bigcup\limits_{T\in V\langle\varepsilon\rangle} \big(Y^{\varepsilon}_T \times \varphi_\alpha(T)\big)$, *где* $\varphi_\alpha$ — *некоторый полный автоморфизм полной* $X$-*полурешётки объединений* $V(D,\varepsilon)$.

**Теорема 12.** *Для любого идемпотентного бинарного отношения* $\varepsilon$ *полугруппы* $\mathrm{B}_X(D)$ *группа* $\mathrm{G}_X(D,\varepsilon)$ *антиизоморфна группе всех полных автоморфизмов полурешётки* $V(D,\varepsilon)$.

**Определение 10.** Будем говорить, что элемент $\alpha$ полугруппы $S$ является внешним, если для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in S \setminus \{\alpha\}$ выполнено $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq \alpha$.

**Теорема 13.** *Пусть полная $X$-полурешётка объединений $D$ есть цепь. Полугруппа $B_X(D)$ обладает правой единицей в том и только в том случае, если $\bigcap D = \varnothing$ или $\bigcap D \in D$.*

**Теорема 14.** *Пусть $D$ — конечная цепь. Тогда все правые единицы полугруппы $B_X(D)$ являются внешними элементами полугруппы $B_X(D)$.*

**Теорема 15.** *Пусть полная $X$-полурешётка объединений $D$ есть цепь вида*

$$T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_m \quad (T_p \neq T_q,\ p \neq q,\ p, q = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

*и $|T_j \setminus T_{j-1}| = k_j$, где $j = 1, 2, \ldots, m$. Если $X$ — конечное множество, то число $s$ всех правых единиц полугруппы $B_X(D)$ равно*

$$s = (2^{k_1} - 1) \cdot (3^{k_2} - 2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot \big((m+1)^{k_m} - m^{k_m}\big) \cdot |D|^{|X \setminus \breve{D}|}.$$

**Определение 11.** Будем говорить, что элемент $\alpha$ полугруппы $S$ является внутренним, если существуют такие $\alpha_1, \alpha_2 \in S \setminus \{\alpha\}$, что $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha$.

**Определение 12.** Пусть $Y$ и $Z$ — различные подмножества множества $X$. Будем говорить, что пара множеств $Y$ и $Z$ нецепная, если $Y \cap Z = \varnothing$ или $Y \setminus Z \neq \varnothing$ и $Z \setminus Y \neq \varnothing$, если $Y \cap Z \neq \varnothing$.

**Определение 13.** Пусть $\tilde{D}$ — множество подмножеств множества $X$. Будем говорить, что $\tilde{D}$ есть множество нецепных пар, если каждая пара различных непустых элементов множества $\tilde{D}$ является нецепной.

Очевидно, $\tilde{D}$ есть множество нецепных пар, если теоретико-множественное пересечение любых двух различных элементов множества $\tilde{D}$ является пустым множеством.

**Теорема 16.** *Пусть $\tilde{D}$ — множество нецепных пар, порождающее полную $X$-полурешётку объединений $D$, такое что $Z_1 \cap Z_2 \neq \varnothing$ для некоторых различных элементов $Z_1$ и $Z_2$ множества $\tilde{D}$, $T$ и $T'$ соответственно — произвольные элементы множества $\tilde{D}$ и теоретико-множественного объединения всех элементов множества $\tilde{D}$, отличных от $T$. Если $\varnothing \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ для всех $T \in \tilde{D}^* = \tilde{D} \setminus \{\varnothing\}$, $\bar{T}$ и $f$ соответственно — произвольное непустое подмножество множества $T \setminus T'$ и произвольное отображение множества $X \setminus \breve{D}$ в $D$ и $\bar{D} = \{\bar{T} \mid T \in \tilde{D}^*\}$, то бинарное отношение*

$$\varepsilon = \varepsilon(\bar{D}, f) = \bigcup_{T \in \tilde{D}^*} (\bar{T} \times T) \cup \bigcup_{t \in X \setminus \breve{D}} \big(\{t\} \times f(t)\big)$$

*есть правая единица полугруппы $B_X(D)$.*

Обратно, если $\varepsilon'$ — произвольная правая единица полугруппы $B_X(D)$, то для неё существуют $\bar{D}'$ и $f'$, такие что $\varepsilon' = \varepsilon'(\bar{D}', f')$.

**Теорема 17.** *Пусть $\tilde{D}$ — множество нецепных пар, порождающее полную $X$-полурешётку объединений $D$, такое что $Z_1 \cap Z_2 \neq \varnothing$ для некоторых различных $Z_1$ и $Z_2$ множества $\tilde{D}$. Если полугруппа $B_X(D)$ обладает правой единицей, то все правые единицы полугруппы $B_X(D)$ являются её внутренними элементами.*

**Теорема 18.** *Пусть $\tilde{D}$ — множество нецепных пар, порождающее полную $X$-полурешётку объединений $D$, такое что $Z_1 \cap Z_2 \neq \varnothing$ для некоторых различных элементов $Z_1$ и $Z_2$ множества $\tilde{D}$, $T$ — произвольный элемент множества $\tilde{D}^* = \tilde{D} \setminus \{\varnothing\}$ и $T'$ — теоретико-множественное объединение всех элементов множества $\tilde{D}$, отличных от $T$. Если $X$ — конечное множество, $\varnothing \in D$ и $T \setminus T' \neq \varnothing$ для всех $T \in \tilde{D}^*$, то число всех правых единиц полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$ равно*

$$s = \prod_{T \in \tilde{D} \setminus \{\varnothing\}} \left(2^{|T \setminus T'|} - 1\right) |D|^{|X \setminus \check{D}|}.$$

**Теорема 19.** *Если $\tilde{D}$ — некоторое непустое множество попарно непересекающихся подмножеств множества $X$, порождающее полную $X$-полурешётку объединений $D$, то полугруппа $\mathrm{B}_X(D)$ обладает правой единицей.*

**Теорема 20.** *Пусть $\varnothing \in \tilde{D}$ и $\tilde{D}$ — множество попарно непересекающихся подмножеств конечного множества $X$, порождающего полную $X$-полурешётку объединений $D$. Тогда число $s$ всех правых единиц полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$ равно*

$$s = \prod_{T \in \tilde{D}^*} \left(2^{|T|} - 1\right) |D|^{|X \setminus \check{D}|}.$$

**Следствие 2.** *Пусть $\varnothing \notin \tilde{D}$ и $\tilde{D}$ — множество попарно непересекающихся подмножеств конечного множества $X$, порождающее полную $X$-полурешётку объединений $D$. Тогда число $s$ всех правых единиц полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$ равно*

$$s = |D|^{|X \setminus \check{D}|}.$$

**Теорема 21.** *Пусть $D'$ — множество всех минимальных элементов полной $X$-полурешётки объединений $D$, $|D'| \geqslant 2$ и $B = \{\alpha \in \mathrm{B}_X(D) \mid V(X^*, \alpha) = D\}$. Тогда любой элемент множества $B$ является внешним элементом полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$, если полурешётка $D$ и множество $D'$ удовлетворяют хотя бы одному из следующих условий*:

а) *мощность множества $D'$ больше мощности любого подмножества полурешётки $D$, состоящего только из попарно непересекающихся элементов полурешётки $D$;*

б) *полурешётка $D$ конечная, $\bigcup D' = \check{D}$ и мощность любого неприводимого порождающего множества полурешётки $D$ больше мощности множества $D'$;*

в) *полурешётка $D$ конечная и в множестве $D'$ существуют хотя бы два различных элемента, имеющих непустое пересечение.*

Пусть $t' \in \check{D}$ и $D_{t'} = \{Z \in D \mid t' \in Z\}$.

**Следствие 3.** *Пусть $D$ — конечная $X$-полурешётка объединений. Если для некоторого $t \in \check{D}$ выполнено $\Lambda(D, D_{t'}) \notin D$, то любой элемент множества $B = \{\alpha \in \mathrm{B}_X(D) \mid V(X^*, \alpha) = D\}$ является внешним элементом полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$.*

Из теоремы 7 следует, что для описания строений регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$ необходим метод, позволяющий найти все $XI$-подполурешётки полной $X$-полурешётки объединений $D$. Из определения 2 следует, что главной трудностью в этом направлении является нахождение точной нижней грани $\Lambda(D, D_t)$ множества $D_t$ $(t \in \breve{D})$ в полурешётке $D$. Этот вопрос для конечной полурешётки решается следующим образом.

**Теорема 22.** *Пусть $D = \{\breve{D}, Z_1, Z_2, \ldots, Z_{m-1}\}$ — некоторая конечная $X$-полурешётка объединений, $C(D) = \{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}\}$ — семейство множеств попарно непересекающихся подмножеств множества $X$. Если $\chi$ — отображение полурешётки $D$ на семейство множеств $C(D)$, удовлетворяющее условиям $\chi(\breve{D}) = P_0$ и $\chi(Z_i) = P_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, m-1$, и $\hat{D}_Z = D \setminus \{T \in D \mid Z \subseteq T\}$, то справедливы следующие равенства*:

$$\breve{D} = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_{m-1}, \quad Z_i = P_0 \cup \bigcup_{T \in \hat{D}_{Z_i}} \chi(T). \tag{1}$$

В дальнейшем приведённые равенства будем называть формальными.

Доказывается, что при представлении элементов полурешётки $D$ в виде (1) среди параметров $P_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ найдутся такие, которые для данной полурешётки $D$ не могут быть пустыми множествами. Такие множества $P_i$ $(0 < i \leqslant m-1)$ будем называть базисными источниками, а те множества $P_j$ $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$, которые могут быть и пустыми множествами, будем называть источниками полноты.

Доказывается, что число покрывающих элементов прообраза базисного источника при отображении $\chi$ всегда равно единице, а число покрывающих элементов прообраза источника полноты при отображении $\chi$ всегда больше единицы, если такие элементы существуют.

Отметим, что множество $P_0$ всегда считается источником полноты.

Продемонстрируем работу теоремы 22 на практике. Пусть $X$-полурешётка объединений $D = \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ задаётся следующими условиями:

$$Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D}, \quad Z_4 \subset Z_1 \subset \breve{D}, \quad Z_4 \subset Z_2 \subset \breve{D},$$
$$Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing, \quad Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing, \quad Z_4 \setminus Z_3 \neq \varnothing, \quad Z_3 \setminus Z_4 \neq \varnothing.$$

Диаграмма заданной полурешётки изображена на рис. 1. Формальные равенства данной полурешётки имеют вид

$$\begin{gathered}\breve{D} = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4, \quad Z_1 = P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4, \\ Z_2 = P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4, \quad Z_3 = P_0 \cup P_2 \cup P_4, \quad Z_4 = P_0 \cup P_3,\end{gathered} \tag{2}$$

где $|P_1| \geqslant 1$, $|P_2| \geqslant 1$, $|P_3| \geqslant 1$, $|P_0| \geqslant 0$, $|P_4| \geqslant 0$, т. е. элементы $P_1$, $P_2$ и $P_3$ являются базисными источниками, а $P_0$ и $P_4$ — источники полноты $X$-полурешётки объединений $D$.

Теперь пусть $t \in \breve{D}$. Тогда согласно формальным равенствам (2) получим, что подмножества $D_t$ и точные нижние грани $\Lambda(D, D_t)$ множества $D_t$ в полурешётке $D$ определяются следующим образом:

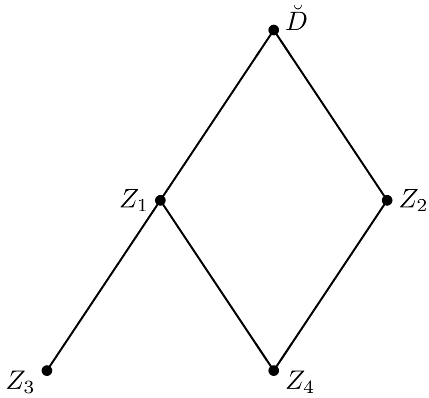



Рис. 1

$$D_t = \begin{cases} D, & \text{если } t \in P_0, \\ \{\breve{D}, Z_2\}, & \text{если } t \in P_1, \\ \{\breve{D}, Z_3, Z_1\}, & \text{если } t \in P_2, \\ \{\breve{D}, Z_4, Z_2, Z_1\}, & \text{если } t \in P_3, \\ \{\breve{D}, Z_3, Z_2, Z_1\}, & \text{если } t \in P_4, \end{cases} \qquad \Lambda(D, D_t) = \begin{cases} Z_2, & \text{если } t \in P_1, \\ Z_3, & \text{если } t \in P_2, \\ Z_4, & \text{если } t \in P_3. \end{cases}$$

Получили, что $\Lambda(D, D_t) \notin D$, когда $t \in P_0 \cup P_4$, и $\Lambda(D, D_t) \in D$, когда $t \in P_1 \cup \cup P_2 \cup P_3$. Таким образом, полурешётка $D$ не является $XI$-полурешёткой, если $P_0 \cup P_4 \neq \varnothing$.

По определению полурешётки $D$ имеем, что множества $P_0$ и $P_4$ являются источниками полноты. Поэтому мы можем допустить, что $P_0 = P_4 = \varnothing$. В этом случае $\Lambda(D, D_t) \in D$ для любого $t \in \breve{D}$, а множество всех нижних граней $D^\wedge = \{Z_4, Z_3, Z_2\}$ порождает полурешётку $D$. Поэтому $D$ является $XI$-полурешёткой объединений.

Если $P_0 = P_4 = \varnothing$, то согласно формальным равенствам (2) имеем $Z_3 = P_2$ и $Z_2 = P_1 \cup P_3$, т. е. $Z_3 \cap Z_2 = \varnothing$, так как $P_0 = P_4 = \varnothing$ по определению множеств $P_2$ и $P_3$.

Обратно, если $Z_3 \cap Z_2 = \varnothing$, то из равенств $Z_3 = P_0 \cup P_2 \cup P_4$ и $Z_2 = P_0 \cup \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4$ выводим $P_0 \cup P_4 = \varnothing$, т. е. $P_0 = P_4 = \varnothing$.

Итак, полурешётка $D$ в том и только в том случае является $XI$-полурешёткой, когда $Z_3 \cap Z_2 = \varnothing$.

Отметим, что применением формальных равенств вопрос, является или нет конечная $X$-полурешётка объединений $XI$-полурешёткой, решается сравнительно просто.

**Теорема 23.** *Пусть $D'$ — полная подполурешётка полной $X$-полурешётки объединений $D$, $\breve{D}' = \bigcup D'$ и $f$ — произвольное отображение множества $X \setminus \breve{D}'$*

*в $D'$. Если $D'$ — полная $XI$-полурешётка объединений, то бинарное отношение*

$$\alpha = \alpha(D', f) = \bigcup_{t \in \breve{D}'} \big(\{t\} \times \Lambda(D, D'_t)\big) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}'} \big(\{t'\} \times f(t')\big)$$

*является идемпотентным элементом полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$ и $D' = V(D', \alpha)$.*

Отметим, что в случае $D' = D$, принимая во внимание теорему 6, получим следующее утверждение.

**Следствие 4.** *Пусть $D$ — полная $X$-полурешётка объединений, $f$ — произвольное отображение множества $X \setminus \breve{D}$ в полурешётку $D$. Если $D$ — полная $XI$-полурешётка объединений, то бинарное отношение*

$$\alpha = \alpha(D, f) = \bigcup_{t \in \breve{D}} \big(\{t\} \times \Lambda(D, D_t)\big) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \big(\{t'\} \times f(t')\big)$$

*является правой единицей полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$.*

Через $\Sigma_n(X, m)$ обозначим класс всех полных $X$-полурешёток объединений, каждый элемент которого изоморфен некоторой фиксированной полурешётке $D$ мощности $m$.

**Теорема 24.** *Пусть $X$ — конечное множество, $|\Sigma_n(X, m)| = s$, $\delta$ — число базисных источников, $q$ — число всех автоморфизмов полурешётки $D$. Если $|X| = n \geqslant \delta$, то*

$$s = \frac{1}{q} \sum_{p=\delta}^{m} \sum_{i=1}^{p+1} \frac{(-1)^{p+j+1} C_{m-\delta}^{p-\delta}\,(p!)\, i^n}{(i-1)!\,(p+1-i)!},$$

*где $C_j^k = \frac{j!}{k!\,(j-k)!}$.*

Здесь же отметим, что изучение класса $\Xi$ посредством изучения каждого элемента данного класса — непосильная задача. Более естественным является подход, когда из класса $\Xi$ выделяются подклассы, замкнутые относительно изоморфных образов элементов данного класса, и затем изучаются выделенные классы. Одно из решений поставленной задачи даёт следующее утверждение.

**Теорема 25.** *Пусть $\varnothing \in D_1$. Если полугруппы $\mathrm{B}_X(D_1)$ и $\mathrm{B}_X(D_2)$, определённые полными $X$-полурешётками объединений $D_1$ и $D_2$, изоморфны, то также изоморфны $D_1$ и $D_2$ как частично упорядоченные множества относительно теоретико-множественного включения.*

Из приведённой теоремы непосредственно следует, что для изучения подклассов класса $\Xi$ более естественно заранее зафиксировать некоторую полную $X$-полурешётку объединений и рассмотреть такой класс полных полугрупп бинарных отношений, каждый элемент которого определяется полной $X$-полурешёткой объединений, изоморфной заранее заданной полурешётке.

Если $X$-полурешётка объединений — конечное множество, то, учитывая, что диаграммы изоморфных частично упорядоченных множеств идентичны, вместо фиксирования $X$-полурешётки объединений можно фиксировать диаграмму данной полурешётки и рассмотреть такой класс полных полугрупп бинарных отношений, каждый элемент которого определяется полной $X$-полурешёткой объединений, диаграмма которой совпадает с заранее заданной диаграммой.

Следует отметить, что подкласс класса $\Xi$, выделенный описанным выше способом, в общем случае может содержать несколько подклассов неизоморфных полугрупп.

Отметим, что исключительно важную роль при изучении абстрактных свойств полугрупп играют регулярные элементы, идемпотенты, односторонние единицы, неприводимые и внешние элементы изучаемых полугрупп.

Сначала отметим, что если $X$ — конечное множество, то число $s$ из теоремы 25 указывает на мощность класса полных полугрупп бинарных отношений, каждый элемент которого определяется некоторой полурешёткой из класса $\Sigma_n(X, m)$.

Теперь укажем общий метод, при помощи которого описываются идемпотентные и регулярные элементы полугрупп, принадлежащих некоторому фиксированному подклассу класса $\Xi$. Более того, в случае когда $X$ — конечное множество, будут указаны формулы для вычисления их числа.

**Теорема 26.** *Пусть $D$, $\Sigma(D)$, $E_X^{(1)}(D')$ и $I$ обозначают соответственно полную $X$-полурешётку объединений, множество всех таких подполурешёток $D'$ полурешётки $D$, для которых полугруппы $B_X(D')$ обладают правыми единицами, множество всех правых единиц полугруппы $B_X(D')$ и множество всех идемпотентов полугруппы $B_X(D)$. Пусть $\Sigma_\varnothing(D) = \{D' \in \Sigma(D) \mid \varnothing \in D'\}$. Тогда для множеств $E_X^{(1)}(D')$ и $I$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $\varnothing \in D$, то*
   - а) $E_X^{(r)}(D') \cap E_X^{(r)}(D'') = \varnothing$ *для любых $D'$ и $D''$ из $\Sigma_\varnothing(D)$, удовлетворяющих условию $D' \neq D''$;*
   - б) $I = \bigcup\limits_{D' \in \Sigma_\varnothing(D)} E_X^{(r)}(D')$;
   - в) *для конечного множества $X$ справедливо* $|I| = \bigcup\limits_{D' \in \Sigma_\varnothing(D)} |E_X^{(r)}(D')|$.
2. *Если $\varnothing \notin D$, то*
   - а$'$) $E_X^{(r)}(D') \cap E_X^{(r)}(D'') = \varnothing$ *для любых $D'$ и $D''$ из $\Sigma(D)$, удовлетворяющих условию $D' \neq D''$;*
   - б$'$) $I = \bigcup\limits_{D' \in \Sigma(D)} E_X^{(r)}(D')$;
   - в$'$) *для конечного множества $X$ справедливо* $|I| = \sum\limits_{D' \in \Sigma(D)} |E_X^{(r)}(D')|$.

**Теорема 27.** *Пусть $D$ — полная $XI$-полурешётка объединений. Если $D^\wedge = \{\Lambda(D, D_t) \mid t \in \breve{D}\}$ — неприводимое порождающее множество полурешётки $D$, то бинарное отношение $\varepsilon$ полугруппы $B_X(D)$, имеющее квазинормальное представление вида $\varepsilon = \bigcup\limits_{T \in D} (Y_T^\varepsilon \times T)$, является правой единицей полугруппы $B_X(D)$*

*в том и только в том случае, когда для любого элемента* $Z$ *множества* $D^{\wedge}$ *выполняются следующие три условия*:

а) $\bigcup\limits_{T \in \ddot{D}_Z^{\wedge}} Y_T^{\varepsilon} \supseteq Z$;

б) $Y_Z^{\varepsilon} \cap Z \neq \varnothing$ *для любого непредельного элемента* $Z$ *множества* $D^{\wedge}$;

в) *для любого предельного элемента* $Z$ *множества* $D^{\wedge}$ *существует подмножество* $B(Z)$ *множества* $\ddot{D}_Z \setminus \{Z\}$, *такое что* $Y_{T'}^{\varepsilon} \cap Z \neq \varnothing$ *для любого* $T' \in B(Z)$ *и* $\bigcup B(Z) = Z$.

Теорема 26 показывает, что для описания всех идемпотентов полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$ надо выделить полные подполугруппы бинарных отношений полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$, которые обладают правыми единицами. В силу теоремы 6 для выделения полных подполугрупп бинарных отношений полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$, которые обладают правыми единицами, сначала надо найти все такие множества $D'$ подполурешётки полной $X$-полурешётки объединений $D$, которые являются $XI$-полурешётками, и затем охарактеризовать правые единицы полугрупп $\mathrm{B}_X(D')$. При этом, если $\varnothing \in D$, берутся все те $XI$-подполурешётки полурешётки $D$, которые содержат пустое множество. Если $\varnothing \notin D$, то берутся все $XI$-подполурешётки полурешётки $D$. Для описания правых единиц полугрупп $\mathrm{B}_X(D')$ используется теорема 27.

**Определение 14.** Пусть $Q$ и $D'$ — некоторые $XI$-подполурешётка и $X$-подполурешётка полной $X$-полурешётки объединений $D$ соответственно. Тогда $R_{\varphi}(Q, D')$ — такое подмножество полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$, что $\alpha \in R_{\varphi}(Q, D')$ только в том случае, когда для элементов $\alpha$ и $\varphi$ выполняются следующие условия:

а) бинарное отношение $\alpha$ регулярно;

б) $V(D, \alpha) = Q$;

в) $\varphi$ — полный $\alpha$-изоморфизм между полными полурешётками объединений $Q$ и $D'$.

Теперь пусть

$$R(Q, D') = \bigcup_{\varphi \in \Phi(Q, D')} R_{\varphi}(Q, D'),$$

где $\Phi(Q, D')$ — множество всех полных $\alpha$-изоморфизмов полурешётки $Q$ на полурешётку $D'$.

Отметим, что множества $R_{\varphi}(Q, D')$ и $R_{\psi}(Q, D')$ для различных $\varphi$ и $\psi$ ($\varphi, \psi \in \Phi(Q, D')$) всегда считаются различными. При этом если $\alpha \in R_{\varphi}(Q, D')$, то для полного $\alpha$-изоморфизма между полурешётками $Q = V(D, \alpha)$ и $D'$ всегда берётся полный изоморфизм $\varphi$.

Пусть

$$R(D') = \bigcup_{Q' \in \Omega(Q)} R(Q', D'),$$

где $\Omega(Q)$ — множество всех таких $XI$-подполурешёток полной $X$-полурешётки объединений $D$, что $Q' \in \Omega(Q)$ только в том случае, когда существует некоторый полный изоморфизм между полурешётками $Q'$ и $Q$.

**Определение 15.** Пусть $\Sigma'_{XI}(D)$ обозначает множество всех подполурешёток $X$-полурешётки объединений $D$, каждый элемент которого при $\varnothing \in D$ есть образ некоторого полного $\alpha$-изоморфизма некоторой $XI$-подполурешётки $X$-полурешётки объединений $D$, содержащий пустое множество, или обозначает множество всех подполурешёток $X$-полурешётки объединений $D$, каждый элемент которого есть образ некоторого полного $\alpha$-изоморфизма некоторой $XI$-подполурешётки $X$-полурешётки объединений $D$.

Пусть $D', D'' \in \Sigma'_{XI}(D)$ и $\vartheta_{XI} \subseteq \Sigma'_{XI}(D) \times \Sigma'_{XI}(D)$. Будем считать, что $D' \ \vartheta_{XI} \ D''$ только в том случае, когда существует некоторый полный изоморфизм $\varphi$ между полурешётками $D'$ и $D''$. Легко проверяется, что бинарное отношение $\vartheta_{XI}$ есть отношение эквивалентности на множестве $\Sigma'_{XI}(D)$.

Ясно, что каждый $\vartheta_{XI}$-класс эквивалентности $\vartheta_{XI}$ множества $\Sigma'_{XI}(D)$ содержит некоторую $XI$-подполурешётку $X$-полурешётки объединений $D$. В каждом $\vartheta_{XI}$-классе эквивалентности $\vartheta_{XI}$ множества $\Sigma'_{XI}(D)$ выберем такой представитель и через $\Sigma_{XI}(D)$ обозначим множество представителей всех $\vartheta_{XI}$-классов эквивалентности $\vartheta_{XI}$ множества $\Sigma'_{XI}(D)$.

Далее, если $Q \in \Sigma'_{XI}(D)$, то через $Q\vartheta_{XI}$ обозначается тот $\vartheta_{XI}$-класс эквивалентности $\vartheta_{XI}$ множества $\Sigma'_{XI}(D)$, который содержит элемент $Q \in \Sigma'_{XI}(D)$, и

$$R^*(Q) = \bigcup_{D' \in Q\vartheta_{XI}} R(D').$$

Теперь пусть $I(D')$ — множество всех идемпотентов, содержащихся в множеств $R(D')$, и

$$I^*(Q) = \bigcup_{D' \in Q\vartheta_{XI}} I(D').$$

**Теорема 28.** *Пусть $R$ — множество всех регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) *$R(D') \cap R(D'') = \varnothing$ для любых $D', D'' \in \Sigma_{XI}(D)$ и $D' \neq D''$*;

б) *$R = \bigcup_{D' \in \Sigma_{XI}(D)} R(D')$*;

в) *если $X$ — конечное множество, то $|R| = \sum_{D' \in \Sigma_{XI}(D)} |R(D')|$.*

**Следствие 5.** *Пусть $Q$ — некоторая $XI$-подполурешётка $X$-полурешётки объединений $D$. Если через $\mathrm{i}(Q, D)$ обозначено число всех идемпотентных бинарных отношений полугруппы $B_X(D)$, для которых $V(D, \alpha) = Q$, то*

$$\mathrm{i}(Q, D) = \frac{1}{m_0 q} |R(D')|,$$

*где $\Phi(Q, Q) = q$ и $\Omega(Q) = m_0$.*

Теорема 7 показывает, что для описания всех регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$ сначала надо выделить все такие подполурешётки $Q$ полной $X$-полурешётки объединений $D$, которые являются $XI$-полурешётками, и после этого надо охарактеризовать все бинарные отношения множества $R(D')$. Регулярные элементы полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$ описываются при помощи теоремы 10.

Продемонстрируем вышеприведённый метод на примере.

Пусть $X$ — произвольное непустое множество и $\Sigma_5(X,5)$ — класс $X$-полурешёток объединений, каждый элемент которого изоморфен некоторой $X$-полурешётке объединений $D=\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, удовлетворяющей условиям

$$Z_1\setminus Z_2\neq\varnothing,\quad Z_2\setminus Z_1\neq\varnothing,$$
$$Z_4\subset Z_3\subset Z_1\subset\breve{D},\quad Z_4\subset Z_3\subset Z_2\subset\breve{D}.$$

$X$-полурешётка, удовлетворяющая приведённым условиям, изображена на рис. 2. Будем считать, что $C(D)=\{C,P_1,P_2,P_3,P_4\}$ — некоторое семейство множеств попарно непересекающихся подмножеств множества $X$ и

$$\varphi=\begin{pmatrix}\breve{D} & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4\\ C & P_1 & P_2 & P_3 & P_4\end{pmatrix}.$$

Тогда формальные равенства для элементов заданной полурешётки будут иметь вид

$$\breve{D}=C\cup P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4,\quad Z_1=C\cup P_2\cup P_3\cup P_4,$$
$$Z_2=C\cup P_1\cup P_3\cup P_4,\quad Z_3=C\cup P_4,\quad Z_4=C,$$

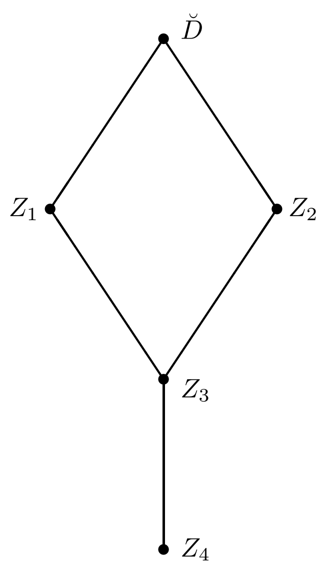



Рис. 2

где $|C| \geqslant 0$, $|P_3| \geqslant 0$, $|P_1| \geqslant 1$, $|P_2| \geqslant 1$, $|P_4| \geqslant 1$, т. е. элементы $C$ и $P_3$ являются источниками полноты, а $P_1$, $P_2$ и $P_4$ — базисными источниками $X$-полурешётки объединений $D$.

**Лемма 1.** *Пусть $X$ — конечное множество $|X| = n \geqslant 3$ и $|\Sigma_5(x, 5)| = s$. Тогда*

$$s = \frac{1}{2} \cdot (6^n - 3 \cdot 5^n + 3 \cdot 4^n - 3^n).$$

**Пример 1.** Пусть $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Тогда соответственно получим

$$s = 3,\ 54,\ 615,\ 5\,670,\ 41\,763,\ 348\,919,\ 2\,492\,535,\ 17\,127\,990;$$

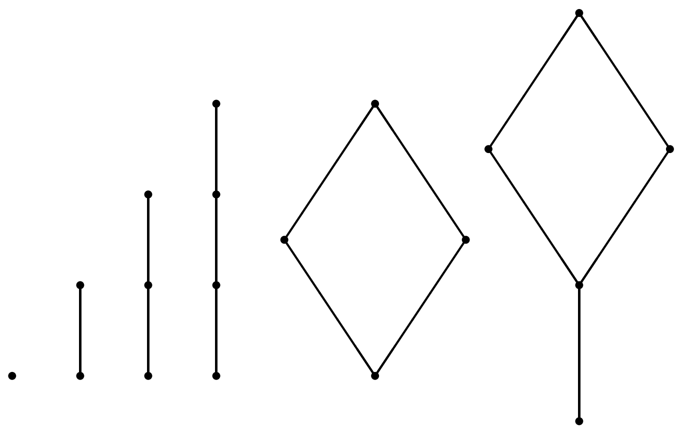
$$\mathrm{B}_X(D)| = 125,\ 625,\ 3\,125,\ 15\,625,\ 78\,125,\ 390\,625,\ 1\,953\,625,\ 9\,765\,625.$$

**Лемма 2.** *Подмножествами вида*

1) $\{\breve{D}\}$, $\{Z_1\}$, $\{Z_2\}$, $\{Z_3\}$, $\{Z_4\}$;
2) $\{Z_4, Z_3\}$, $\{Z_4, Z_2\}$, $\{Z_4, Z_1\}$, $\{Z_4, \breve{D}\}$, $\{Z_3, Z_2\}$, $\{Z_3, Z_1\}$, $\{Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_2, \breve{D}\}$;
3) $\{Z_4, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_4, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_4, Z_3, Z_2\}$, $\{Z_4, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_4, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_3, Z_2, \breve{D}\}$;
4) $\{Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$;
5) $\{Z_4, Z_1, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\}$;
6) $D = \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

*исчерпываются все $XI$-подполурешётки полурешётки $D = \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$.*

Данная лемма доказывается при помощи теоремы 22. Из доказанной леммы непосредственно следует, что диаграммами, приведёнными на рис. 3, исчерпываются все диаграммы $XI$-подполурешёток полурешётки $D$.



1 2 3 4 5 6

Рис. 3

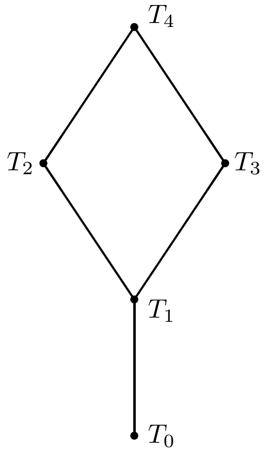



Рис. 4

**Лемма 3.** *Пусть* $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 \in D$ *и*

$$T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset T_4, \quad T_0 \subset T_1 \subset T_3 \subset T_4,$$
$$T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing, \quad T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing, \quad T_1 \cup T_2 = T_3$$

(*рис.* 4). *Если* $XI$*-полурешётки* $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4\}$ *и* $D' = \{\bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3, \bar{T}_4\}$ $\alpha$*-изоморфны и* $|\Omega(Q)| = m_0$, *то справедливо следующее утверждение*:

$$|R(D')| =$$
$$= 2m_0(2^{|T_1 \setminus T_0|} - 1) \cdot 2^{|(T_2 \cap T_3) \setminus T_1|}\big(3^{|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_3|} - 2^{|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_3|}\big)\big(3^{|\bar{T}_3 \setminus \bar{T}_2|} - 2^{|\bar{T}_3 \setminus \bar{T}_2|}\big) \cdot 5^{|X \setminus \bar{T}_4|}.$$

**Теорема 29.** *Пусть* $D = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, \breve{D}\} \in \Sigma_5(X, 5)$ *и* $Z_4 \neq \varnothing$. *Тогда бинарное отношение* $\alpha$ *полугруппы* $B_X(D)$, *имеющее квазинормальное представление, приведённое ниже, является идемпотентным в том и только в том случае, когда оно удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий*:

а) $\alpha = X \times T$, где $T \in D$;

б) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ *для некоторых* $T, T' \in D$, $T \subset T'$, *и* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *удовлетворяющих условиям*

$$Y_T^\alpha \supseteq T, \quad Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing;$$

в) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ *для некоторых* $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, *и* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *удовлетворяющих условиям*

$$Y_T^\alpha \supseteq T, \quad Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T', \quad Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing, \quad Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing;$$

г) $\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ *для некоторых* $Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$ *и* $T \in \{Z_1, Z_2\}$, *удовлетворяющих условиям*

$$Y_4^\alpha \supseteq Z_4, \quad Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3, \quad Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T,$$
$$Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing, \quad Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing, \quad Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing;$$

д) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ *для некоторых* $T \in \{Z_4, Z_3\}$ *и* $Y_T^\alpha, Y_2, Y_1 \notin \{\varnothing\}$, *удовлетворяющих условиям*

$$Y_T^\alpha \supseteq T, \quad Y_T^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2, \quad Y_T^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1,$$
$$Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing, \quad Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing;$$

е) $\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ *для некоторых* $Y_3^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *удовлетворяющих условиям*

$$Y_4^\alpha \supseteq Z_4, \quad Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3, \quad Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1, \quad Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2,$$
$$Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing, \quad Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing, \quad Y_2^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing.$$

Введём следующие обозначения:

1) $Q_0 = \{T\}$, где $T \in D$;
2) $Q_1 = \{T, T'\}$, где $T, T' \in D$ и $T \subset T'$;
3) $Q_2 = \{T, T', T''\}$, где $T, T', T'' \in D$ и $T \subset T' \subset T''$;
4) $Q_3 = \{Z_4, Z_3, T, \breve{D}\}$, где $T \in \{Z_1, Z_2\}$;
5) $Q_3 = \{T, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, где $T \in \{Z_4, Z_3\}$;
6) $Q_5 = \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$.

Рассмотрим следующие случаи.

А$'$. Если $Q_0 = \{T\}$, то

$$Q_0 \vartheta_{XI} = \big\{\{Z_4\}, \{Z_3\}, \{Z_2\}, \{Z_4\}, \breve{D}\big\},$$

и поэтому $|I^*(Q_0)| = 5$.

Б$'$. Если $Q_1 = \{T, T'\}$, то

$$Q_1 \vartheta_{XI} = \big\{\{Z_4, Z_3\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, \breve{D}\},$$
$$\{Z_3, Z_2\}, \{Z_3, Z_1\}, \{Z_3, \breve{D}\}, \{Z_1, \breve{D}\}, \{Z_2, \breve{D}\}\big\}.$$

Принимая во внимание теоремы 15 и 26, получим

$$|I^*(Q_1)| = \big(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\big) \cdot 2^{|X \setminus Z_3|} +$$
$$+ \big(2^{|Z_2 \setminus Z_4|} + 2^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 2\big) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \big(2^{|Z_1 \setminus Z_4|} + 2^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 2\big) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} +$$
$$+ \big(2^{|\breve{D} \setminus Z_4|} + 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|} + 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|} + 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 4\big) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|}.$$

В$'$. Если $Q_2 = \{T, T', T''\}$, то

$$Q_2 \vartheta_{XI} = \big\{\{Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_3, Z_2\},$$
$$\{Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_3, Z_2, \breve{D}\}\big\}.$$

Принимая во внимание теоремы 15 и 26, получим

$$|I^*(Q_2)| = \big(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\big)\big(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\big)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$+\big(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\big)\big(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\big)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$+\big(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\big)\big(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\big)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$+\big(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\big)\big(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\big)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$+\big(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\big)\big(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\big)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$+\big(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\big)\big(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\big)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$+\big(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\big)\big(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\big)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}.$$

Г$'$. Если $Q_3=\{Z_4,Z_3,T,\breve{D}\}$, то

$$Q_3\vartheta_{XI}=\big\{\{Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}\big\}.$$

Принимая во внимание теоремы 15 и 26, получим

$$|I^*(Q_3)| = \big(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\big)\big(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\big)\big(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\big)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$+\big(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\big)\big(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\big)\big(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\big)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}.$$

Д$'$. Если $Q_4=\{T,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, то

$$Q_4\vartheta_{XI}=\big\{\{Z_4,Z_1,Z_2,\breve{D}\},\{Z_3,Z_1,Z_2,\breve{D}\}\big\}.$$

Принимая во внимание теоремы 15 и 26, получим

$$|I^*(Q_4)| = \big(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\big)\big(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\big)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$+\big(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\big)\big(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\big)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}=2\big(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\big)\big(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\big)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}.$$

Е$'$. Если $Q_5=\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, то

$$Q_5\vartheta_{XI}=\big\{\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\big\}.$$

Принимая во внимание лемму 3 и следствие 5, получим

$$|I^*(Q_5)| =$$
$$=\big(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\big)\cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_3|}\big(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\big)\big(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\big)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}.$$

**Теорема 30.** *Пусть $X$ — конечное множество и $Z_4\neq\varnothing$. Если $I$ — множество всех идемпотентных элементов полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$, то для числа $|I|$ справедлива следующая формула*:

$$|I| = 5+\big(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\big)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|}+\big(2^{|Z_2\setminus Z_4|}+2^{|Z_2\setminus Z_3|}-2\big)+$$
$$+\big(2^{|Z_1\setminus Z_4|}+2^{|Z_1\setminus Z_3|}-2\big)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$+\big(2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4\big)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}+$$

$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$+2\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_3|}\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}.$$

При $Z_4=\varnothing$ описание идемпотентных элементов и формула их подсчёта выводится аналогичным образом, но с ограничением, что $XI$-подполурешётки полурешётки $D$ должны содержать пустое множество.

**Теорема 31.** *Пусть $Q=\{T_0,T_1,\ldots,T_m\}$ $(m\geqslant 1)$ — такая подполурешётка $X$-полурешётки объединений $D$, что $T_0\subset T_1\subset T_2\subset\cdots\subset T_m$. Тогда бинарное отношение $\alpha$ полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$, имеющее такое квазинормальное представление вида $\alpha=\bigcup\limits_{i=0}^{m}(Y_i^\alpha\times T_i)$, что $Q=V(D,\alpha)$, является регулярным элементом полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$ в том и только в том случае, когда для некоторого $\alpha$-изоморфизма $\varphi$ полурешётки $Q$ на подполурешётку $D'=\{\varphi(T_0),\ldots,\varphi(T_m)\}$ полурешётки $D$ выполняются условия*

$$Y_0^\alpha\cup Y_1^\alpha\cup\ldots\cup Y_p^\alpha\supseteq\varphi(T_p),\quad Y_q^\alpha\cap\varphi(T_q)\neq\varnothing$$

*для любых $p=0,1,\ldots,m$ и $q=1,2,\ldots,m$,*

**Теорема 32.** *Пусть $Q=\{T_0,T_1,\ldots,T_m\}$ $(m\geqslant 1)$ — такая подполурешётка полурешётки объединений $D$, что $T_0\subset T_1\subset T_2\subset\ldots\subset T_m$. Если $XI$-полурешётки $Q=\{T_0,T_1,\ldots,T_m\}$ и $D'=\{\bar{T}_0,\bar{T}_1,\ldots,\bar{T}_m\}$ изоморфны и $|\Omega(Q)|=m_0$, то*

$$|R(D')|=m_0\left(2^{|\bar{T}_1\setminus\bar{T}_0|}-1\right)\left(3^{|\bar{T}_2\setminus\bar{T}_1|}-2^{|\bar{T}_2\setminus\bar{T}_1|}\right)\times$$
$$\times\left((m+1)^{|\bar{T}_m\setminus\bar{T}_{m-1}|}-m^{|\bar{T}_m\setminus\bar{T}_{m-1}|}\right)(m+1)^{|X\setminus\bar{T}_m|}.$$

**Следствие 6.** *Пусть $\varnothing,T_1\in D$ и $Q=\{\varnothing,T_1\}$. Если $R^*(Q)$ — множество всех регулярных элементов $\alpha$ конечной полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$, имеющих такое квазинормальное представление вида $\alpha=(Y_\varnothing^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_{T_1}^\alpha\times T_1)$, что $V(D,\alpha)=Q$, то число $|R^*(Q)|$ можно вычислить по следующей формуле:*

$$|R^*(Q)|=(|D|-1)\left(2^{|\breve{D}|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+1.$$

**Теорема 33.** *Пусть* $D = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, \breve{D}\} \in \Sigma_5(X, 5)$ *и* $Z_4 = \varnothing$. *Тогда бинарное отношение* $\alpha$ *полугруппы* $B_X(D)$, *имеющее квазинормальное представление, приведённое ниже, является регулярным элементом данной полугруппы в том и только в том случае, когда существует полный* $\alpha$*-изоморфизм* $\varphi$ *полурешётки* $V(D, \alpha)$ *на некоторую подполурешётку* $D'$ *полурешётки* $D$, *удовлетворяющий хотя бы одному из условий, приведённых ниже*:

а) $\alpha = \varnothing$ *или* $\alpha = (Y_4^\alpha \times \varnothing) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ *для некоторых* $\varnothing \neq T' \in D$ *и* $Y_{T'}^\alpha \neq \varnothing$, *удовлетворяющих условиям* $Y_4^\alpha \supseteq \varnothing$ *и* $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$;

б) $\alpha = (Y_4^\alpha \times \varnothing) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ *для некоторых* $\varnothing \neq T \subset T'$ *и* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *удовлетворяющих условиям*
$$Y_4^\alpha \supseteq \varnothing, \quad Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T), \quad Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing, \quad Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing;$$

в) $\alpha = (Y_4^\alpha \times \varnothing) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ *для некоторых* $Y_3^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ *и* $T \in \{Z_1, Z_2\}$, *удовлетворяющих условиям*
$$Y_4^\alpha \supseteq \varnothing, \quad Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3, \quad Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T),$$
$$Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing, \quad Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing, \quad Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing;$$

г) $\alpha = (Y_4^\alpha \times \varnothing) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ *для некоторых* $Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *удовлетворяющих условиям*
$$Y_4^\alpha \supseteq \varnothing, \quad Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2), \quad Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1),$$
$$Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \varnothing, \quad Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing;$$

д) $\alpha = (Y_4^\alpha \times \varnothing) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ *для некоторых* $Y_3, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *удовлетворяющих условиям*
$$Y_4^\alpha \supseteq \varnothing, \quad Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3,$$
$$Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1), \quad Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2),$$
$$Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing, \quad Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing, \quad Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \varnothing.$$

Теперь пусть $T, T' \in D$. Введём следующие обозначения:

7) $Q_0 = \{\varnothing\}$;
8) $Q_1 = \{\varnothing, T'\}$, где $\varnothing \neq T' \in D$;
9) $Q_2 = \{\varnothing, T, T'\}$, где $\varnothing \neq T \subset T'$;
10) $Q_3 = \{\varnothing, Z_3, T, \breve{D}\}$, где $T \in \{Z_1, Z_2\}$;
11) $Q_4 = \{\varnothing, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$;
12) $Q_5 = \{\varnothing, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$.

Далее будем считать, что $X$ — конечное множество.

A$'$. Сначала рассмотрим такие бинарные отношения полугруппы $B_X(D)$, которые имеют квазинормальные представления вида а). В этом случае $Q_0 = \{\varnothing\}$ или $Q_1 = \{\varnothing, T'\}$.

Если $Q_0 = \{\varnothing\}$, то $Q_0 \vartheta_{XI} = \{Q_0\}$, и поэтому $|R^*(Q_0)| = 1$.

Если $Q_1 = \{\varnothing, T'\}$, то

$$Q_1\vartheta_{XI} = \big\{\{\varnothing, Z_3\}, \{\varnothing, Z_2\}, \{\varnothing, Z_1\}, \{\varnothing, \breve{D}\}\big\},$$

и согласно следствию 5 получим

$$|R^*(Q_1)| = 4\big(2^{|\breve{D}|} - 1\big) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|},$$

так как в нашем случае $|D| = 5$.

Б$'$. Теперь рассмотрим такие бинарные отношения полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$, которые имеют квазинормальные представления вида б).

В этом случае имеем, что $Q_2 = \{\varnothing, T, T'\}$, где $\varnothing \neq T \subset T'$, и

$$Q_2\vartheta_{XI} = \big\{\{\varnothing, Z_3, Z_2\}, \{\varnothing, Z_3, Z_1\}, \{\varnothing, Z_3, \breve{D}\}, \{\varnothing, Z_1, \breve{D}\}, \{\varnothing, Z_2, \breve{D}\}\big\}.$$

Отсюда следует, что $|\Phi(Q_2, Q_2)| = 1$ и $|\Omega(Q_2)| = 5$. Далее будем считать, что

$$D_1' = \{\varnothing, Z_3, \breve{D}\}, \quad D_2' = \{\varnothing, Z_2, \breve{D}\}, \quad D_3' = \{\varnothing, Z_1, \breve{D}\},$$
$$D_4' = \{\varnothing, Z_3, Z_2\}, \quad D_5' = \{\varnothing, Z_3, Z_1\}.$$

Поэтому

$$R^*(Q_2) = R(D_1') \cup R(D_2') \cup R(D_3') \cup R(D_4') \cup R(D_5').$$

**Лемма 4.** *Пусть $D \in \Sigma_5(X, 5)$. Тогда справедливо равенство*

$$|R^*(Q_2)| = |R(D_1')| + |R(D_2')| + |R(D_3')| - |R(D_1') \cap R(D_2')| - |R(D_1') \cap R(D_3')|.$$

**Лемма 5.** *Пусть $D \in \Sigma_5(X, 5)$. Если $X$ — конечное множество, то справедливы следующие равенства:*

а) $|R(\{\varnothing, Z_3, \breve{D}\}) \cap R(\{\varnothing, Z_2, \breve{D}\})| = 5\big(2^{|Z_2|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_3|}\big)\big(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\big) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}$;

б) $|R(\{\varnothing, Z_3, \breve{D}\}) \cap R(\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\})| = 5\big(2^{|Z_1|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_3|}\big)\big(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\big) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}$.

**Лемма 6.** *Пусть $D \in \Sigma_5(X, 5)$ и $Z_4 = \varnothing$. Если $X$ — конечное множество, то справедливо равенство*

$$\begin{aligned} |R^*(Q_2)| &= 2\big(2^{|Z_3|} - 1\big)\big(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\big) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ &+ 5\big(2^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 1\big)\big(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\big) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ &+ 5\big(2^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 1\big)\big(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\big) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}. \end{aligned}$$

В$'$. Теперь рассмотрим бинарные отношения полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$, имеющие квазинормальные представления вида в). В этом случае $Q_3 = \{\varnothing, Z_3, T, \breve{D}\}$, где $T \in \{Z_1, Z_2\}$, $\varnothing \neq Z_3 \subset T \subset \breve{D}$, и

$$Q_3\vartheta_{XI} = \big\{\{\varnothing, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{\varnothing, Z_3, Z_1, \breve{D}\}\big\}.$$

Отсюда получим, что $|\Phi(Q_3, Q_3)| = 1$ и $|\Omega(Q_3)| = 2$. Будем считать, что $D_1' = \{\varnothing, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $D_2 = \{\varnothing, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$. Тогда имеет место равенство $R^*(Q_3) = R(D_1') \cup R(D_2')$.

**Лемма 7.** *Пусть $D \in \Sigma_5(X, 5)$. Тогда справедливо равенство*

$$|R^*(Q_3)| = |R(D_1')| + |R(D_2')|.$$

**Лемма 8.** *Пусть $D \in \Sigma_5(X,5)$ и $Z_4 = \varnothing$. Если $X$ — конечное множество, то справедливо равенство*

$$|R^*(Q_3)| = 2\big(2^{|Z_3|} - 1\big)\big(3^{|Z_1\setminus Z_3|} - 2^{|Z_1\setminus Z_3|}\big)\big(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|} - 3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\big) \cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|} + \\ + 2\big(2^{|Z_3|} - 1\big)\big(3^{|Z_2\setminus Z_3|} - 2^{|Z_2\setminus Z_3|}\big)\big(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|} - 3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\big) \cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}.$$

Г$'$. Теперь рассмотрим такие бинарные отношения полугруппы $B_X(D)$, которые имеют квазинормальные представления вида г). В этом случае имеем $Q_4 = \{\varnothing, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ и $Q_4\vartheta_{XI} = \big\{\{\varnothing, Z_1, Z_2, \breve{D}\}\big\}$. Поэтому $|\Phi(Q_4,Q_4)| = 2$, $|\Omega(Q_4)| = 1$ и $R^*(Q_4) = R(\{\varnothing, Z_1, Z_2, \breve{D}\})$.

**Лемма 9.** *Пусть $D \in \Sigma_5(X,5)$ и $Z_4 = \varnothing$. Если $X$ — конечное множество, то справедливо равенство*

$$|R^*(Q_4)| = 2\big(2^{|Z_2\setminus Z_1|} - 1\big)\big(2^{|Z_1\setminus Z_2|} - 1\big) \cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}.$$

Д$'$. Теперь рассмотрим такие бинарные отношения полугруппы $B_X(D)$, которые имеют квазинормальные представления вида д). В этом случае $Q_5 = \{\varnothing, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ и $Q_5\vartheta_{XI} = \big\{\{\varnothing, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\}\big\}$ по определению полурешётки $D \in \Sigma_5(X,5)$. Отсюда получим, что $|\Phi(Q_5,Q_5)| = 2$, $|\Omega(Q_5)| = 1$ и $R^*(Q_5) = R(\{\varnothing, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\})$.

**Лемма 10.** *Пусть $D \in \Sigma_5(X,5)$ и $X$ — конечное множество. Тогда справедливо следующее равенство*:

$$|R^*(Q_5)| = 2\big(2^{|Z_3|} - 1\big) \cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_3|}\big(3^{|Z_2\setminus Z_1|} - 2^{|Z_2\setminus Z_1|}\big)\big(3^{|Z_1\setminus Z_2|} - 2^{|Z_1\setminus Z_2|}\big) \cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}$$

**Теорема 34.** *Пусть $D \in \Sigma_5(X,5)$ и $Z_4 = \varnothing$. Если $X$ — конечное множество, то для множества $R$ всех регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$ справедливо следующее утверждение:*

$$\begin{aligned}|R| = {} & 4\big(2^{\breve{D}} - 1\big) \cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|} + 1 + 5\big(2^{|Z_3|} - 1\big)\big(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\big) \cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|} + \\ & + 5\big(2^{|Z_2\setminus Z_3|} - 1\big)\big(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\big) \cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|} + \\ & + 5\big(2^{|Z_1\setminus Z_3|} - 1\big)\big(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\big) \cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|} + \\ & + 2\big(2^{|Z_3|} - 1\big) \cdot \big(3^{|Z_1\setminus Z_3|} - 2^{|Z_1\setminus Z_3|}\big)\big(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|} - 3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\big) \cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|} + \\ & + 2\big(2^{|Z_3|} - 1\big)\big(3^{|Z_2\setminus Z_3|} - 2^{|Z_2\setminus Z_3|}\big)\big(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|} - 3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\big) \cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|} + \\ & + 2\big(2^{|Z_2\setminus Z_1|} - 1\big)\big(-2^{|Z_1\setminus Z_2|} - 1\big) \cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|} + \\ & + 2\big(2^{|Z_3|} - 1\big) \cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_3|}\big(3^{|Z_2\setminus Z_1|} - 2^{|Z_2\setminus Z_1|}\big)\big(3^{|Z_1\setminus Z_2|} - 2^{|Z_1\setminus Z_2|}\big) \cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}.\end{aligned}$$

Если $Z_4 \neq \varnothing$, описание регулярных элементов и формула их подсчёта выводятся аналогичным образом.

**Примеры.** В следующей таблице при разных $X$ и $D$ выписаны числа идемпотентов и регулярных элементов полугрупп $B_X(D)$, определённых $X$-полурешётками объединений класса $\Sigma_5(X,5)$.

| № | Множество $X$ | Полурешётка $D$ | Число | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | элементов полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$ | идемпотентов полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$ | регулярных элементов полугруппы $\mathrm{B}_X(D)$ |
| 1 | $\{1,2,3\}$ | $\big\{\varnothing,\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\big\}$ | 125 | 45 | 72 |
| 2 | $\{1,2,3,4\}$ | $\big\{\varnothing,\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\big\}$ | 625 | 115 | 196 |
| 3 | $\{1,2,3,4\}$ | $\big\{\varnothing,\{1,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\big\}$ | 625 | 113 | 166 |
| 4 | $\{1,2,3,4\}$ | $\big\{\{1\},\{1,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\big\}$ | 625 | 61 | 127 |

Из утверждений, приведённых выше, непосредственно видна важная роль полных $X$-полурешёток объединений в изучении полных полугрупп бинарных отношений.

# Литература


[1] Диасамидзе Я. И. Полные полугруппы бинарных отношений. — Батуми: Аджара, 2000.

[2] Diasamidze Ya. Right units in semigroups of binary relations // Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 2002. — Vol. 128. — P. 17—36.

[3] Diasamidze Ya. To the theory of semigroups of binary relations // Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 2002. — Vol. 128. — P. 1—15.

[4] Diasamidze Ya. Complete semigroups of binary relations // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 117, no. 4. — P. 4271—4319.

[5] Diasamidze Ya., Diasamidze I. Semigroups $\mathrm{B}_X(D)$ defined by finite $X$-chains // Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 2003. — Vol. 131. — P. 107—108.

[6] Diasamidze Ya., Makharadze Sh. Complete semigroups of binary relations defined by elementary and nodal $X$-semilattices of unions // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 111, no. 1. — P. 3171—3226.

[7] Diasamidze Ya., Makharadze Sh. Maximal subgroups of complete semigroups of binary relations // Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 2003. — Vol. 131. — P. 21—38.

[8] Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Fartenadze G., Givradze O. On finite semilattices of unions // J. Math. Sci. — 2007. — Vol. 141, no. 4. — P. 1134—1181.

[9] Diasamidze Ya., Sirabidze T. Complete semigroups of binary relations, defined by 3-elemented $X$-chains // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 117, no. 4. — P. 4320—4350.

[10] Makharadze Sh. I., Diasamidze I. Ya. On the classes of complete semigroups of binary relations // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 117, no. 4. — P. 4393—4424.