О проблеме свободы в группах Кокстера экстрабольшого типа

И. В. ДОБРЫНИНА
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

УДК 519.4

Ключевые слова: группа Кокстера экстрабольшого типа, проблема свободы, подгруппа без кручения, конечно порождённая подгруппа.

Аннотация

В статье доказывается, что в группах Кокстера экстрабольшого типа всякая конечно порождённая подгруппа без кручения является свободной.

Abstract

I. V. Dobrynina, On the freedom problem in Coxeter groups of extra large type, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 8, pp. 101—116.

In this paper, it is proved that in a Coxeter group of extra large type every torsion-free, finitely generated subgroup is free.

Пусть J — конечное множество и $(m_{ij})_{i,j\in J}$ — матрица, в которой $m_{ij} \geqslant 3$, называемая матрицей Кокстера. Группа G, заданная системой образующих a_i, $i \in J$, и системой определяющих соотношений $a_i^2 = 1$ для всех $i \in J$ и $(a_ia_j)^{m_{ij}} = 1$, $i \neq j$, $i,j \in J$, где m_{ij} — элемент матрицы Кокстера (m_{ij}), $i,j \in J$, соответствующей данной группе, называется группой Кокстера большого типа [7]. В случае $m_{ij} > 3$ имеем группу Кокстера экстрабольшого типа.

Проблемы равенства и сопряжённости слов в группах Кокстера экстрабольшого и большого типа решены в [2, 7]. Для групп Кокстера экстрабольшого типа, соответствующих матрице Кокстера (m_{ij}), $i,j \in J$, с $m_{ij} \geqslant 3k+1$, доказано [8], что всякая k-порождённая подгруппа без кручения является свободной в G. В данной работе доказывается, что в группах Кокстера экстрабольшого типа конечно порождённые подгруппы без кручения являются свободными.

Пусть $F_i = \langle a_i; a_i^2\rangle$, $F = \prod\limits_{i=1}^{n} *F_i$ — свободное произведение циклических групп порядка 2. Отождествим каждый образующий a_i группы F с его обратным a_i^{-1}. Слово $w = a_{i_1}\dots a_{i_n}$ группы F называется приведённым, если индексы рядом стоящих букв a_{i_j} и $a_{i_{j+1}}$ в записи w различны; длина w равна n. Пусть $m_{ij} < \infty$ и $r_{ij} = (a_ia_j)^{m_{ij}}$. Тогда в F существуют в точности две различные перестановки r_{ij}: $r_{ij} = (a_ia_j)^{m_{ij}}$ и $r_{ji} = (a_ja_i)^{m_{ij}}$ $(i \neq j)$. Обозначим

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 8, с. 101—116.

через F_{ij} группу $F_{ij} = F_i * F_j$, через G_{ij} группу Кокстера экстрабольшого типа $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, r_{ij}, r_{ji}\rangle$.

Обозначим через R_{ij} множество всех нетривиальных слов, циклически приведённых в свободном произведении F_{ij} и равных 1 в группе G_{ij}, $R_{ij} = \{r_{ij}^l, r_{ji}^m\}$, $l, m \in \mathbb{N}$ [2]. Элемент $r \in R_{ij}$ будем называть соотношением типа (i, j).

В дальнейшем под R будем понимать $R = \bigcup\limits_{i,j \in J} R_{ij}$ — симметризованное подмножество свободного произведения F. Тогда группа Кокстера может быть задана представлением $G = \langle a_i; a_i^2, R, i = \overline{1, n}\rangle$. Пусть w — нетривиальное циклически приведённое в F слово, равное единице в группе G Кокстера экстрабольшого типа, т. е. $w \in \langle R\rangle^F$, где $\langle R\rangle^F$ — нормальное замыкание симметризованного множества R в свободном произведении F.

Подвергнем R-диаграмму M следующему преобразованию. Если две области D_1, D_2 являются одновременно R_{ij}-диаграммами и пересекаются по ребру с меткой $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)$, то, стирая это ребро, объединим D_1 и D_2 в одну область D. При этом возможно, что метка границы полученной области равна единице в свободном произведении F. Тогда, удалив эту область, склеим её границу. Таким образом через конечное число шагов мы получим приведённую связную односвязную R-диаграмму M, инвариантную относительно рассмотренного преобразования с граничной меткой, равной w, причём если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то длина метки этого ребра равна единице. Каждая приведённая связная односвязная R-диаграмма M группы Кокстера экстрабольшого типа удовлетворяет условию $C(8)$.

Обозначим через ∂M граничный цикл M. Область $D \subset M$ назовём граничной, если $\partial M \cap \partial D \neq \varnothing$. Через $|w|$ будем обозначать длину слова w.

Будем говорить, что $\partial D \cap \partial M$ — правильная часть M, если $\partial D \cap \partial M$ есть объединение последовательности $l_1, l_2, \ldots, l_n$ замкнутых рёбер, где $l_1, \ldots, l_n$ встречаются в данном порядке в некотором граничном цикле для D и в некотором граничном цикле для M.

Граничную область D R-диаграммы M назовём простой, если $\partial D \cap \partial M$ — правильная часть. Простая область D диаграммы M, $\partial M = \gamma \cup \delta$, называется деновской, если $|\partial D \cap \gamma| > |\partial D \setminus \partial D \cap \partial M|$.

Связная односвязная диаграмма M называется диском, если её граничный цикл ∂M — простая замкнутая кривая.

Определение 1. Пусть M_1 — приведённая связная, односвязная поддиаграмма R-диаграммы M группы Кокстера экстрабольшого типа с границей $\partial M_1 = e_1\gamma e_2\delta$, где e_1 — ребро AB, γ — путь BC, e_2 — ребро CD, δ — путь DA. Тогда последовательность областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $n \geqslant 2$, из M_1 ($e_1 \in D_1$, $e_2 \in D_n$) образует полосу в M, если

1) для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\partial D_i \cap \gamma$, $\partial D_i \cap \delta$ — правильные части M_1;
2) для любого i, $1 \leqslant i < n$, границы областей D_i и D_{i+1} пересекаются по ребру;

3) $|\partial D_1 \cap \gamma| = |\partial D_1 \cap \delta| + 2$, $|\partial D_n \cap \gamma| = |\partial D_n \cap \delta| + 2$, $|\partial D_j \cap \gamma| = |\partial D_j \cap \delta|$, $2 \leqslant j < n$.

Удаление деновской области диаграммы M, т. е. удаление её граничного пути, называется деновским сокращением диаграммы M или R-сокращением. Будем говорить, что диаграмма M является R-приведённой, если она не содержит деновских областей.

Пусть Π — полоса диаграммы M. Замену диаграммы M на диаграмму M_1, полученную из M удалением полосы Π, назовём специальным R-сокращением или $\bar{R}$-сокращением. Если M не содержит полос, то назовём диаграмму M специально R-приведённой или $\bar{R}$-приведённой. Слово $w \in G$ назовём R-приведённым, если w является граничной меткой приведённой диаграммы, не содержащей деновских областей. Назовём слово w циклически R-приведённым, если все его циклические перестановки являются R-приведёнными словами.

Циклически R-приведённое слово w группы G Кокстера экстрабольшого типа назовём $\bar{R}$-приведённым, если w является граничной меткой приведённой диаграммы, не содержащей полос. Если слово w' получено из w R- или $\bar{R}$-приведением, то $|w'| < |w|$.

Теорема 1 [4]. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведённого слова w группы Кокстера экстрабольшого типа выяснить, является ли слово w R- или $\bar{R}$-приведённым.*

Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны относительно ребра e, в которой склеенные рёбра e и e^{-1} пересекают граничный цикл D, называется $(s-i)$-областью.

Лемма 1 [4]. *Если M — приведённая связная односвязная R-диаграмма над группой Кокстера экстрабольшого типа, то она не содержит $(s-i)$-областей.*

Лемма 2 [5]. *Пусть M — приведённая связная односвязная R-диаграмма над группой Кокстера экстрабольшого типа, σ — граничный цикл M, слово $\varphi(\sigma)$ R- и $\bar{R}$-несократимо. Тогда диаграмма M является однослойной.*

Лемма 3 [1]. *Слово w группы Кокстера экстрабольшого типа G имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда оно сопряжено с некоторым словом $w' \in G_{ab} = \langle a, b; (ab)^{m_{ab}} = 1,\ a^2 = b^2 = 1\rangle$.*

Лемма 4 [3]. *Пусть слово $w \in G$ имеет бесконечный порядок. Тогда существует слово, сопряжённое w или w^2 в группе G, любая степень которого циклически R- и $\bar{R}$-несократима.*

Теорема 2. *Конечно порождённая подгруппа без кручения группы Кокстера G экстрабольшого типа является свободной.*

Доказательство. Пусть H — конечно порождённая подгруппа без кручения группы Кокстера G экстрабольшого типа. Рассмотрим несократимый элемент $g \in G$ в образующих G. Выделим с начала и конца g максимальные куски (подслова) из подгрупп G_{ij}. Затем выполним в них R-сокращения. Подгруппы G_{ij}, G_{ik}, $j \neq k$, назовём смежными. Далее выделим следующие максимальные куски, двигаясь к центру. Если рядом стоят куски из смежных подгрупп G_{ij}, G_{ik} и предшествующий кусок из G_{ij} заканчивается на a_i, то a_i присоединяем к куску из G_{ik}. В этих кусках также выполняем R-сокращения, и т. д. Получим, что всякий элемент $g \in G$ может быть представлен в виде

$$g = l_{1g} \dots l_{kg} K_g r_{kg} \dots r_{1g}, \tag{1}$$

где l_{ig}, r_{ig}, $i = \overline{1,k}$, будем называть соответственно левыми и правыми множителями слова g, кусок из подгруппы G_{ij} K_g будем называть ядром слова g, если g имеет нечётную длину в кусках, $K_g = 1$, если g имеет чётную длину в кусках. Выполним другие возможные R- и $\bar{R}$-сокращения. Для этого между последовательными кусками из смежных подгрупп вставим квадраты образующих (между смежными кусками из G_{ij} и G_{ik}, $k \neq j$, вставим a_i^2) и будем выполнять R-сокращения только тогда, когда это уменьшает длину некоторых кусков и не увеличивает длины остальных. Представление (1) будем называть приведённой формой слова g, куски $l_{1g}, \dots, l_{kg}, K_g, r_{kg}, \dots, r_{1g}$ также будем называть слогами или множителями g. Заметим, что длина каждого множителя не превосходит половины длины соответствующего определяющего слова. В дальнейшем под длиной слова g будем понимать число $L(g) = 2k + 1$, если $K_g \neq 1$, и число $L(g) = 2k$, если $K_g = 1$.

В слове (1) длины $2k + 1$ начальный отрезок $l_{1g} \dots l_{kg} K_g$ (конечный отрезок $K_g r_{kg} \dots r_{1g}$) назовём большим начальным (большим конечным) отрезком, отрезок $l_{1g} \dots l_{kg}$ ($r_{kg} \dots r_{1g}$) — левой (правой) половиной.

Будем выполнять объединение не взаимно обратных первого слога слова v и последнего слога слова u в произведении слов uv, если они принадлежат одной подгруппе G_{ij}, и выполнять возможное R-сокращение в объединённом слоге.

Далее мы не будем различать слоги p, t, если

1) p и t^{-1} являются взаимно обратными;
2) $pt^{-1} = R = 1$, где R — определяющее слово;
3) $u = u_1 p$, $v = v_1 t$, где u_1, v_1 — подслова u, v, а $t = a_i p$ и образующий a_i можно присоединить к последнему куску, принадлежащему G_{ij}, подслова u_1 (и выполнить в этом куске возможное R-сокращение). Действительно, $u = u_1 p = u_1 a_i^2 p = u_1 a_i t$.

Далее слоги p и t^{-1}, где p, t из 1)—3), будем называть взаимно обратными.

Также не будем различать подслова u_1, v_1 слов u, v вида (1), если они имеют одинаковые слоги. Так как H — конечно порождённая подгруппа без кручения, то левая и правая половины слова (1) длины $2k+1$ не являются взаимно обратными.

Для слова (1) длины $2k$ левая и правая половины определяются аналогично. В слове (1) длины $2k$ начальный отрезок $l_{1g} \dots l_{kg} r_{kg}$ (конечный кусок $l_{kg} r_{kg} \dots r_{1g}$) назовём большим начальным (большим конечным) отрезком.

Пусть $W = \{w_i\}$, $i = \overline{1,n}$, — конечное множество слов группы G, каждое из которых приведено к виду (1). Будем говорить, что у слова $w_j^\varepsilon = l_1 \dots l_k K r_k \dots r_1$, где $\varepsilon = \pm 1$, начальный отрезок $l_1 \dots l_i$ изолирован в W, если он не является начальным отрезком ни для какого слова w_i^η, где $\eta = \pm 1$, $w_i \in W \setminus \{w_j\}$. Будем говорить, что у слова $w_j^\varepsilon = l_1 \dots l_k K r_k \dots r_1$, где $\varepsilon = \pm 1$, конечный отрезок $r_i \dots r_1$ изолирован в W, если он не является конечным отрезком ни для какого слова w_i^η, где $\eta = \pm 1$, $w_i \in W \setminus \{w_j\}$.

Рассмотрим конечное множество образующих $W = \{w_i\}$, $i = \overline{1, n}$, подгруппы H без кручения вида (1). С помощью элементарных нильсеновских преобразований [6] сведём данное множество к множеству слов минимальной длины. Большой начальный и большой конечный отрезки w_i, $i = \overline{1, n}$, изолированы в W. Далее для слов чётной длины всюду изолируем левую половину. Для слов нечётной длины с помощью элементарных нильсеновских преобразований изолируем всюду левую половину, если это не ведёт к увеличению длины образующих. Выполним в словах полученного множества возможные R- и $\bar{R}$-сокращения с помощью вставок квадратов образующих, как описано выше. Такое множество образующих подгруппы H назовём *специальным*. Заметим, что выполнение R- и $\bar{R}$-сокращений с помощью вставок квадратов образующих не меняет слогов в соответствии со сказанным ранее.

В дальнейшем под $W = \{w_i\}$, $i = \overline{1, n}$, будем понимать специальное множество образующих подгруппы H.

Будем рассматривать слова $u_1 u_2 \dots u_m$, где $u_i \neq 1$, $i = \overline{1, m}$, $u_i \in W \cup W^{-1}$, $i = \overline{1, m}$, $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$, $i = \overline{1, m-1}$.

Определение 2. Слово $u_1 u_2 \dots u_m$ будем называть простым, если

$$L(u_1 u_2 \dots u_m) = \max\{L(u_1), L(u_2), \dots, L(u_m)\}.$$

Лемма 5. *Пусть $u_1 u_2 \dots u_m$ — слово из подгруппы, порождённой специальным множеством слов $W = \{w_i\}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда $L(u_1 u_2 \dots u_m) \geqslant L(u_i)$, $i = \overline{1, m}$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала простое слово $u_1 u_2 \dots u_m$. Покажем, что оно удовлетворяет системе соотношений

$$L(u_1 u_2 \dots u_i) = \max\{L(u_1 \dots u_{i-1}), L(u_i)\}, \quad i = \overline{2, m}.$$

Предположим, что это не так. Тогда разобьём слово $u_1 u_2 \dots u_m$ на подслова $v_1, v_2, \dots, v_k$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&w_1 = u_1 u_2, && \text{если} \quad L(u_1 u_2) = \max\{L(u_1), L(u_2)\};\\
&w_2 = w_1 u_3, && \text{если} \quad L(w_1 u_3) = \max\{L(w_1), L(u_3)\};\\
&\quad\dots\\
&w_{k1-1} = w_{k1-2} u_{k1}, && \text{если} \quad L(w_{k1-2} u_{k1}) = \max\{L(w_{k1-2}), L(u_{k1})\}.
\end{aligned}$$

Если $L(w_{k1-1} u_{k1+1}) > \max\{L(w_{k1-1}), L(u_{k1+1})\}$, то обозначим $w_{k1-1} = u_1 u_2 \dots u_{k1}$ через v_1. Начиная с u_{k1+1}, последовательно строим слова $w_{k1}, \dots, w_{k2-1}$, и если $L(w_{k2-1} u_{k2+1}) > \max\{L(w_{k2-1}), L(u_{k2+1})\}$, то слово $w_{k2-1} = u_{k1+1} u_{k1+2} \dots u_{k2}$ обозначаем через v_2, и т. д. Через конечное число шагов получим разбиение слова $u_1 u_2 \dots u_m$ на подслова $v_1, v_2, \dots, v_k$: $u_1 u_2 \dots u_m = v_1 v_2 \dots v_k$, и так как $L(v_1 v_2 \dots v_k) > L(v_i), i = \overline{1, k}$, то $L(u_1 u_2 \dots u_m) > L(u_j)$, $j = \overline{1, m}$.

Последнее соотношение противоречит тому, что слово $u_1u_2\dots u_m$ простое, поэтому $u_1u_2\dots u_m = v_1$. Теперь рассмотрим произвольное слово $u_1u_2\dots u_m$ и разобьём его на простые слова аналогично тому, как это сделано выше. Получим, что $u_1u_2\dots u_m = v_1v_2\dots v_t$, где каждое v_i, $i=\overline{1,t}$, — простое слово. Поэтому $L(u_1u_2\dots u_m) = L(v_1v_2\dots v_t) > L(v_i) \geqslant L(u_j)$, $i=\overline{1,t}$, $j=\overline{1,m}$. □

Следствие 1. *Если в слове $u_1u_2\dots u_m$ выполнить сокращение в группе G, то оно не затронет по крайней мере левой половины слова u_1.*

Лемма 6. *Подгруппа, порождённая специальным множеством слов $W = \{w_i\}$, $i=\overline{1,n}$, является свободной.*

Доказательство. Покажем, что элемент вида $g = u_1u_2\dots u_t$ где $u_i \neq 1$, $i=\overline{1,t}$, $u_i \in W \cup W^{-1}$, $i=\overline{1,t}$, $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$, $i=\overline{1,t-1}$, не равен единице в группе G. Более того, покажем, что после сокращений в слове $g = u_1u_2\dots u_t$ остаётся одно из следующих слов:

1) $Wl_m^{-1}\dots l_1^{-1}$, где W — некоторое слово, $l_1\dots l_m$ — изолированная левая половина образующего $w_i = u_t^{-1}$ чётной длины;
2) $Wbl_m^{-1}\dots l_1^{-1}$, где W — некоторое слово, $l_1\dots l_m$ — левая половина образующего $w_i = u_t^{-1}$ нечётной длины, b — слог из той же подгруппы G_{jk}, что и ядро образующего w_i;
3) $WK_{u_t}r_m\dots r_1$, где W — некоторое слово, $K_{u_t}r_m\dots r_1$ — изолированный большой конечный отрезок образующего $w_i = u_t$ нечётной длины;
4) $Wbr_m\dots r_1$, где W — некоторое слово, $r_m\dots r_1$ — правая половина образующего $w_i = u_t$ чётной длины, b — слог из той же подгруппы G_{jk}, что и последний слог l_m левой половины образующего w_i.

Доказательство проведём индукцией по t.

Докажем утверждение для $t=2$, $g=u_1u_2$. Рассмотрим все возможные случаи для u_1, u_2. Далее будем рассматривать результат максимально возможных сокращений и объединений в слове u_1u_2. Объединение не взаимно обратных слогов $p, l \in G_{ij}$ будем обозначать (pl).

1. Пусть $L(u_1) = L(u_2)$.

1.1. $L(u_1) = 2m$.

1.1.1. $u_1 = l_1\dots l_m r_m\dots r_1$, $u_2 = l'_1\dots l'_m r'_m\dots r'_1$. Тогда
$$g = l_1\dots l_m(r_m l'_m)r'_m\dots r'_1 = Wbr'_m\dots r'_1.$$

1.1.2. $u_1 = l_1\dots l_m r_m\dots r_1$, $u_2 = {r'_1}^{-1}\dots {r'_m}^{-1}{l'_m}^{-1}\dots {l'_1}^{-1}$. Тогда
$$g = l_1\dots l_m {l'_m}^{-1}\dots {l'_1}^{-1} = W{l'_m}^{-1}\dots {l'_1}^{-1}.$$

1.1.3. $u_1 = r_1^{-1}\dots r_m^{-1}l_m^{-1}\dots l_1^{-1}$, $u_2 = l'_1\dots l'_m r'_m\dots r'_1$. Тогда
$$g = r_1^{-1}\dots r_m^{-1}(l_m^{-1}l'_m)r'_m\dots r'_1 = Wbr'_m\dots r'_1.$$

1.1.4. $u_1 = r_1^{-1}\dots r_m^{-1}l_m^{-1}\dots l_1^{-1}$, $u_2 = {r'_1}^{-1}\dots {r'_m}^{-1}{l'_m}^{-1}\dots {l'_1}^{-1}$. Тогда
$$g = r_1^{-1}\dots r_m^{-1}(l_m^{-1}{r'_m}^{-1}){l'_m}^{-1}\dots {l'_1}^{-1} = W{l'_m}^{-1}\dots {l'_1}^{-1}.$$

1.2. $L(u_1) = 2m+1$.

1.2.1. $u_1 = l_1 \dots l_m K_{u_1} r_m \dots r_1$, $u_2 = l'_1 \dots l'_m K_{u_2} r'_m \dots r'_1$. Тогда

$$g = l_1 \dots l_m K_{u_1} K_{u_2} r'_m \dots r'_1 = W K_{u_2} r'_m \dots r'_1.$$

1.2.2. $u_1 = l_1 \dots l_m K_{u_1} r_m \dots r_1$, $u_2 = {r'_1}^{-1} \dots {r'_m}^{-1} K_{u_2}^{-1} {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$. Тогда

$$g = l_1 \dots l_m (K_{u_1} K_{u_2}^{-1}) {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W b {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

1.2.3. $u_1 = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} K_{u_1}^{-1} l_m^{-1} \dots l_1^{-1}$, $u_2 = l'_1 \dots l'_m K_{u_2} r'_m \dots r'_1$. Тогда

$$g = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} K_{u_1}^{-1} K_{u_2} r'_m \dots r'_1 = W K_{u_2} r'_m \dots r'_1.$$

1.2.4. $u_1 = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} K_{u_1}^{-1} l_m^{-1} \dots l_1^{-1}$, $u_2 = {r'_1}^{-1} \dots {r'_m}^{-1} K_{u_2}^{-1} {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$. Тогда

$$g = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} K_{u_1}^{-1} K_{u_2}^{-1} {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

2. Пусть $L(u_1) < L(u_2)$.

2.1. $L(u_1) = 2m$, $L(u_2) = 2k$.

2.1.1. $u_1 = l_1 \dots l_m r_m \dots r_1$, $u_2 = l'_1 \dots l'_k r'_k \dots r'_1$. Тогда

$$g = l_1 \dots l_m l'_{m+1} \dots l'_k r'_k \dots r'_1 = W b r'_k \dots r'_1.$$

2.1.2. $u_1 = l_1 \dots l_m r_m \dots r_1$, $u_2 = {r'_1}^{-1} \dots {r'_k}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$. Тогда

$$g = l_1 \dots l_m {r'_{m+1}}^{-1} \dots {r'_k}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

2.1.3. $u_1 = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} l_m^{-1} \dots l_1^{-1}$, $u_2 = l'_1 \dots l'_k r'_k \dots r'_1$. Тогда

$$g = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} (l_m^{-1} l'_m) \dots l'_k r'_k \dots r'_1 = W b r'_k \dots r'.$$

2.1.4. $u_1 = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} l_m^{-1} \dots l_1^{-1}$, $u_2 = {r'_1}^{-1} \dots {r'_k}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$.

$$g = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} (l_m^{-1} {r'_m}^{-1}) \dots {r'_k}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

2.2. $L(u_1) = 2m$, $L(u_2) = 2k+1$.

2.2.1. $u_1 = l_1 \dots l_m r_m \dots r_1$, $u_2 = l'_1 \dots l'_k K_{u_2} r'_k \dots r'_1$. Тогда

$$g = l_1 \dots l_m l'_{m+1} \dots l'_k K_{u_2} r'_k \dots r'_1 = W K_{u_2} r'_k \dots r'_1.$$

2.2.2. $u_1 = l_1 \dots l_m r_m \dots r_1$, $u_2 = {r'_1}^{-1} \dots {r'_k}^{-1} K_{u_2}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$. Тогда

$$g = l_1 \dots l_m {r'_{m+1}}^{-1} \dots {r'_k}^{-1} K_{u_2}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W b {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

2.2.3. $u_1 = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} l_m^{-1} \dots l_1^{-1}$, $u_2 = l'_1 \dots l'_k K_{u_2} r'_k \dots r'_1$. Тогда

$$g = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} (l_m^{-1} l'_m) \dots l'_k K_{u_2} r'_k \dots r'_1 = W K_{u_2} r'_k \dots r'_1.$$

2.2.4. $u_1 = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} l_m^{-1} \dots l_1^{-1}$, $u_2 = {r'_1}^{-1} \dots {r'_k}^{-1} K_{u_2}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$. Тогда

$$g = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} (l_m^{-1} {r'_m}^{-1}) \dots {r'_k}^{-1} K_{u_2}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W b {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

В случае $L(u_1) = 2m + 1$, $L(u_2) = 2k$ получаем результаты, аналогичные пункту 2.1. В случае $L(u_1) = 2m+1$, $L(u_2) = 2k+1$ получаем результаты, аналогичные пункту 2.2.

3. Пусть $L(u_1) > L(u_2)$.

3.1. $L(u_1) = 2m$, $L(u_2) = 2k$.

3.1.1. $u_1 = l_1 \dots l_m r_m \dots r_1$, $u_2 = l'_1 \dots l'_k r'_k \dots r'_1$. Тогда
$$g = l_1 \dots l_m r_m \dots (r_k l'_k) r'_k \dots r'_1 = W b r'_k \dots r'_1.$$

3.1.2. $u_1 = l_1 \dots l_m r_m \dots r_1$, $u_2 = {r'_1}^{-1} \dots {r'_k}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$. Тогда
$$g = l_1 \dots l_m r_m \dots r_{k+1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

3.1.3. $u_1 = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} l_m^{-1} \dots l_1^{-1}$, $u_2 = l'_1 \dots l'_k r'_k \dots r'_1$. Тогда
$$g = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} l_m^{-1} \dots (l_k^{-1} l'_k) r'_k \dots r'_1 = W b r'_k \dots r'_1.$$

3.1.4. $u_1 = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} l_m^{-1} \dots l_1^{-1}$, $u_2 = {r'_1}^{-1} \dots {r'_k}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$. Тогда
$$g = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} l_m^{-1} \dots l_{k+1}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

3.2. $L(u_1) = 2m$, $L(u_2) = 2k + 1$.

3.2.1. $u_1 = l_1 \dots l_m r_m \dots r_1$, $u_2 = l'_1 \dots l'_k K_{u_2} r'_k \dots r'_1$. Тогда
$$g = l_1 \dots l_m r_m \dots r_{k+1} K_{u_2} r'_k \dots r'_1 = W K_{u_2} r'_k \dots r'_1.$$

3.2.2. $u_1 = l_1 \dots l_m r_m \dots r_1$, $u_2 = {r'_1}^{-1} \dots {r'_k}^{-1} K_{u_2}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$. Тогда
$$g = l_1 \dots l_m r_m \dots (r_{k+1} K_{u_2}^{-1}) {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W b {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

3.2.3. $u_1 = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} l_m^{-1} \dots l_1^{-1}$, $u_2 = l'_1 \dots l'_k K_{u_2} r'_k \dots r'_1$. Тогда
$$g = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} l_m^{-1} \dots l_{k+1}^{-1} K_{u_2} r'_k \dots r'_1 = W K_{u_2} r'_k \dots r'_1.$$

3.2.4. $u_1 = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} l_m^{-1} \dots l_1^{-1}$, $u_2 = {r'_1}^{-1} \dots {r'_k}^{-1} K_{u_2}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$. Тогда
$$g = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} l_m^{-1} \dots (l_{k+1}^{-1} K_{u_2}^{-1}) {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W b {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

В случае $L(u_1) = 2m + 1$, $L(u_2) = 2k$ получаем слова, аналогичные пункту 3.1. В случае $L(u_1) = 2m+1$, $L(u_2) = 2k+1$ получаем слова, аналогичные пункту 3.2.

Пусть утверждение верно для любого слова $g = u_1 u_2 \dots u_{t-1}$. Докажем его для $g = u_1 u_2 \dots u_t$.

1. Пусть $u_1 u_2 \dots u_{t-1} = W l_m^{-1} \dots l_1^{-1}$, где W — некоторое слово, $l_1 \dots l_m$ — изолированная левая половина образующего $w_i = u_{t-1}^{-1}$ чётной длины.

1.1. $L(u_t) = 2m$. Если $u_t = l'_1 \dots l'_m r'_m \dots r'_1$, то
$$g = W(l_m^{-1} l'_m) r'_m \dots r'_1 = W' b r'_m \dots r'_1.$$
Если же $u_t = {r'_1}^{-1} \dots {r'_m}^{-1} {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$, то
$$g = W(l_m^{-1} {r'_m}^{-1}) {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

1.2. $L(u_t) = 2m+1$. Если $u_t = l'_1 \dots l'_m K_{u_t} r'_m \dots r'_1$, то
$$g = W(l_m^{-1} l'_m) K_{u_t} r'_m \dots r'_1 = W' K_{u_t} r'_m \dots r'_1.$$
Если $u_t = {r'_1}^{-1} \dots {r'_m}^{-1} K_{u_t}^{-1} {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$, то
$$g = W(l_m^{-1} {r'_m}^{-1}) K_{u_t}^{-1} {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' b {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

1.3. $L(u_t) < 2m$. Пусть $L(u_t) = 2k$. Если $u_t = l'_1 \dots l'_k r'_k \dots r'_1$, то
$$g = W l_m^{-1} \dots (l_k^{-1} l'_k) r'_k \dots r'_1 = W' b r'_k \dots r'_1.$$
Если $u_t = {r'_1}^{-1} \dots {r'_k}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$, то
$$g = W l_m^{-1} \dots l_{k+1}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$
Пусть $L(u_t) = 2k+1$. Имеем
$$g = W l_m^{-1} \dots l_{k+1}^{-1} K_{u_t} r'_k \dots r'_1 = W' K_{u_t} r'_k \dots r'_1$$
или
$$g = W l_m^{-1} \dots (l_{k+1}^{-1} K_{u_t}^{-1}) {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' b {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

1.4. $L(u_t) > 2m+1$. Пусть $L(u_t) = 2k$. Имеем
$$g = W(l_m^{-1} l'_m) \dots l'_k r'_k \dots r'_1 = W' b r'_k \dots r'_1$$
или
$$g = W(l_m^{-1} {r'_m}^{-1}) \dots {r'_k}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$
Пусть $L(u_t) = 2k+1$. Имеем
$$g = W(l_m^{-1} l'_m) \dots l'_k K_{u_t} r'_k \dots r'_1 = W' K_{u_t} r'_k \dots r'_1$$
или
$$g = W(l_m^{-1} {r'_m}^{-1}) \dots {r'_k}^{-1} K_{u_t}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' b {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

2. Пусть $u_1 u_2 \dots u_{t-1} = W b l_m^{-1} \dots l_1^{-1}$, где W — некоторое слово, $l_1 \dots l_m$ — левая половина образующего $w_i = u_{t-1}^{-1}$ нечётной длины, b — слог из той же подгруппы G_{jk}, что и ядро образующего w_i.

2.1. $L(u_t) = 2m$. Если $u_t = l'_1 \dots l'_m r'_m \dots r'_1$, то
$$g = W b (l_m^{-1} l'_m) r'_m \dots r'_1 = W' b' r'_m \dots r'_1.$$
Если же $u_t = {r'_1}^{-1} \dots {r'_m}^{-1} {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$, то
$$g = W b {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

2.2. $L(u_t) = 2m + 1$. В этом случае

$$g = WbK_{u_t}r'_m \dots r'_1 = W'K_{u_t}r'_m \dots r'_1$$

или

$$g = WbK_{u_t}^{-1}{l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W'b'{l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

2.3. $L(u_t) < 2m$. Пусть $L(u_t) = 2k$. Имеем

$$g = Wbl_m^{-1} \dots (l_k^{-1}l'_k)r'_k \dots r'_1 = W'b'r'_k \dots r'_1$$

или

$$g = Wbl_m^{-1} \dots l_{k+1}^{-1}{l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W'{l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

Пусть $L(u_t) = 2k + 1$. Тогда

$$g = Wbl_m^{-1} \dots l_{k+1}^{-1}K_{u_t}r'_k \dots r'_1 = W'K_{u_t}r'_k \dots r'_1$$

или

$$g = Wbl_m^{-1} \dots (l_{k+1}^{-1}K_{u_t}^{-1}){l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W'b'{l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

2.4. $L(u_t) > 2m + 1$. Пусть $L(u_t) = 2k$. Тогда

$$g = Wbl'_{m+1} \dots l'_k r'_k \dots r'_1 = W'b'r'_k \dots r'_1$$

или

$$g = Wb{r'_{m+1}}^{-1} \dots {r'_k}^{-1}{l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W'{l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

Пусть $L(u_t) = 2k + 1$. Тогда

$$g = Wbl'_{m+1} \dots l'_k K_{u_t}r'_k \dots r'_1 = W'K_{u_t}r'_k \dots r'_1$$

или

$$g = Wb{r'_{m+1}}^{-1} \dots {r'_k}^{-1}K_{u_t}^{-1}{l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W'b'{l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

3. Пусть $u_1u_2 \dots u_{t-1} = WK_{u_{t-1}}r_m \dots r_1$, где W — некоторое слово, $K_{u_{t-1}}r_m \dots r_1$ — изолированный большой конечный отрезок образующего $w_i = u_{t-1}$ нечётной длины.

3.1. $L(u_t) = 2m$. Тогда

$$g = WK_{u_{t-1}}(r_m l'_m)r'_m \dots r'_1 = W'b'r'_m \dots r'_1$$

или

$$g = WK_{u_{t-1}}{l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W'{l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

3.2. $L(u_t) = 2m + 1$. Тогда

$$g = WK_{u_{t-1}}K_{u_t}r'_m \dots r'_1 = W'K_{u_t}r'_m \dots r'_1$$

или

$$g = W(K_{u_{t-1}}K_{u_t}^{-1}){l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W'b'{l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

3.3. $L(u_t) < 2m$. Пусть $L(u_t) = 2k$. Имеем

$$g = WK_{u_{t-1}} r_m \dots (r_k l'_k) r'_k \dots r'_1 = W' b' r'_k \dots r'_1$$

или

$$g = WK_{u_{t-1}} r_m \dots r_{k+1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

Пусть $L(u_t) = 2k+1$. Тогда

$$g = WK_{u_{t-1}} r_m \dots r_{k+1} K_{u_t} r'_k \dots r'_1 = W' K_{u_t} r'_k \dots r'_1$$

или

$$g = WK_{u_{t-1}} r_m \dots (r_{k+1} K_{u_t}^{-1}) {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' b' {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

3.4. $L(u_t) > 2m+1$. Пусть $L(u_t) = 2k$. Тогда

$$g = W(K_{u_{t-1}} l'_{m+1}) \dots l'_k r'_k \dots r'_1 = W' b' r'_k \dots r'_1$$

или

$$g = W(K_{u_{t-1}} {r'_{m+1}}^{-1}) \dots {r'_k}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

Пусть $L(u_t) = 2k+1$. Тогда

$$g = W(K_{u_{t-1}} l'_{m+1}) \dots l'_k K_{u_t} r'_k \dots r'_1 = W' K_{u_t} r'_k \dots r'_1$$

или

$$g = W(K_{u_{t-1}} {r'_{m+1}}^{-1}) \dots {r'_k}^{-1} K_{u_t}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' b' {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

4. Пусть $u_1 u_2 \dots u_{t-1} = Wbr_m \dots r_1$, где W — некоторое слово, $r_m \dots r_1$ — правая половина образующего $w_i = u_{t-1}$ чётной длины, b — слог из той же подгруппы G_{jk}, что и последний слог l_m левой половины образующего w_i.

4.1. $L(u_t) = 2m$. Если $u_t = l'_1 \dots l'_m r'_m \dots r'_1$, то

$$g = Wb(r_m l'_m) r'_m \dots r'_1 = W' b' r'_m \dots r'_1.$$

Если $u_t = {r'_1}^{-1} \dots {r'_m}^{-1} {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}$, то

$$g = Wb {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

4.2. $L(u_t) = 2m+1$. Имеем

$$g = WbK_{u_t} r'_m \dots r'_1 = W' K_{u_t} r'_m \dots r'_1$$

или

$$g = WbK_{u_t}^{-1} {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' b' {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

4.3. $L(u_t) < 2m$. Пусть $L(u_t) = 2k$. Тогда

$$g = Wbr_m \dots (r_k l'_m) r'_k \dots r'_1 = W' b' r'_k \dots r'_1$$

или

$$g = Wbr_m \dots r_{k+1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

Пусть $L(u_t) = 2k+1$. Тогда

$$g = Wbr_m \dots r_{k+1} K_{u_t} r'_k \dots r'_1 = W' K_{u_t} r'_k \dots r'_1$$

или

$$g = Wbr_m \dots (r_{k+1} K_{u_t}^{-1}) {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' b' {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

4.4. $L(u_t) > 2m+1$. Пусть $L(u_t) = 2k$. Тогда

$$g = Wbl'_{m+1} \dots l'_k r'_k \dots r'_1 = W' b' r'_k \dots r'_1$$

или

$$g = Wb{r'}_{m+1}^{-1} \dots {r'_k}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

Пусть $L(u_t) = 2k+1$. Тогда

$$g = Wbl'_{m+1} \dots l'_k K_{u_t} r'_k \dots r'_1 = W' K_{u_t} r'_k \dots r'_1$$

или

$$g = Wb{r'}_{m+1}^{-1} \dots {r'_k}^{-1} K_{u_t}^{-1} {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1} = W' b' {l'_k}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

Лемма и теорема доказаны. □

Теорема 3. *Любой элемент $g \in H$ однозначно представи́м в виде $g = u_1 u_2 \dots u_t$, где $u_i \neq 1$, $i = \overline{1,t}$, $u_i \in W \cup W^{-1}$, $i = \overline{1,t}$, $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$, $i = \overline{1,t-1}$, $W = \{w_j\}$, $j = \overline{1,n}$, — специальное множество образующих подгруппы H.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть

$$g = u_1 u_2 \dots u_t = v_1 v_2 \dots v_p, \tag{2}$$

$v_j \in W \cup W^{-1}$, $j = \overline{1,p}$, $v_j \neq v_{j+1}^{-1}$, $j = \overline{1,p-1}$. По следствию 1 сокращения в группе G не затронут по крайней мере левых половин u_{1l}, v_{1l} слов u_1, v_1.

1. Пусть $L(u_{1l}) = L(v_{1l})$.

1.1. Пусть $L(u_1) = L(v_1) = 2m$.

1.1.1. Если u_{1l}, v_{1l} являются левыми половинами образующих, то в силу изолированности левых половин $u_1 = v_1$. Сократим u_1, v_1 в (2). По индукции получаем, что $u_i = v_i$, $t = p$, $i = \overline{1,t}$. Если $t > p$, то $u_{p+1} \dots u_t = 1$, что невозможно по лемме 6. Таким образом, далее нам надо доказывать только равенство $u_1 = v_1$.

1.1.2. Из-за изолированности левых половин невозможен случай, когда только одна из половин u_{1l}, v_{1l} является левой половиной образующего.

1.1.3. Пусть u_{1l}, v_{1l} являются обратными к правым половинам образующих:

$$u_1 = r_1^{-1} \dots r_m^{-1} l_m^{-1} \dots l_1^{-1}, \quad v_1 = {r'_1}^{-1} \dots {r'_m}^{-1} {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

Элементы r_1^{-1}, ${r'_1}^{-1}$ лежат в одной группе G_{ij}. Кроме того, r_1^{-1}, ${r'_1}^{-1}$ должны совпадать, так как в противном случае $gg^{-1} \neq 1$.

Аналогично $r_i^{-1} = r_i'^{-1}$, $i = \overline{2, m}$. Так как левые половины образующих изолированы и сокращения справа у слов u_1, v_1 не затронут l_m^{-1}, $l_m'^{-1}$, то l_m^{-1}, $l_m'^{-1}$ не принадлежат одной группе G_{ij}, иначе $L(v_1^{-1}u_1) < 2m$. Поэтому большие конечные отрезки образующих совпадают и $u_1 = v_1$.

1.2. Пусть $L(u_1) = L(v_1) = 2m + 1$.

1.2.1. Если слова u_{1l}, v_{1l} являются левыми половинами образующих, то u_{1l}, v_{1l} совпадают, иначе $gg^{-1} \neq 1$. Сокращения справа у слов u_1, v_1 не затронут ядер K_{u1}, K_{v1} слов u_1, v_1. По построению специального множества K_{u1}, K_{v1} не принадлежат одной группе G_{ij}. Но тогда $gg^{-1} \neq 1$. Поэтому $u_1 = v_1$.

1.2.2. Пусть одно из слов u_{1l}, v_{1l} является левой половиной образующего, а другое — обратным к правой половине. Пусть

$$u_1 = r_1^{-1} \ldots r_m^{-1} K_{u1}^{-1} l_m^{-1} \ldots l_1^{-1}, \quad v_1 = l_1' \ldots l_m' K_{v1} r_m' \ldots r_1'.$$

Тогда $u_{1l} = v_{1l}$, иначе $gg^{-1} \neq 1$. Сокращения справа у слова u_1 не затронут ядра K_{u1}, а у слова v_1 не затронут ядра K_{v1}. По построению специального множества K_{u1}, K_{v1} не принадлежат одной группе G_{ij} (так как левые половины изолированы всюду, когда это не ведёт к увеличению длины образующего, и большие отрезки изолированы), но тогда $gg^{-1} \neq 1$. Поэтому $u_1 = v_1$.

1.2.3. Пусть u_{1l}, v_{1l} являются обратными к правым половинам образующих:

$$u_1 = r_1^{-1} \ldots r_m^{-1} K_{u1}^{-1} l_m^{-1} \ldots l_1^{-1}, \quad v_1 = r_1'^{-1} \ldots r_m'^{-1} K_{v1}^{-1} l_m'^{-1} \ldots l_1'^{-1}.$$

Тогда сокращения справа у слов u_1, v_1 не затронут ядер K_{u1}, K_{v1} слов u_1, v_1. Тогда $r_i^{-1} = r_i'^{-1}$, $i = \overline{1, m}$, $K_{u1} = K_{v1}$, иначе $gg^{-1} \neq 1$. Поэтому $u_1 = v_1$.

2. Пусть $L(u_{1l}) \neq L(v_{1l})$. Для определённости будем считать, что $L(u_{1l}) >$ $> L(v_{1l})$.

2.1. Пусть $L(u_1) = 2k$, $L(v_1) = 2m$.

2.1.1. Пусть u_{1l}, v_{1l} являются левыми половинами образующих:

$$u_1 = l_1 \ldots l_k r_k \ldots r_1, \quad v_1 = l_1' \ldots l_m' r_m' \ldots r_1'.$$

Справа l_m' не может ни сократиться, ни объединиться в силу минимальности длин образующих. Так как левые половины изолированы, то $l_1 \ldots l_m \neq l_1' \ldots l_m'$ и $gg^{-1} \neq 1$. Поэтому $u_1 = v_1$.

2.1.2. Пусть u_{1l} является левой половиной образующего, а v_{1l} — обратным к правой половине, т. е.

$$u_1 = l_1 \ldots l_k r_k \ldots r_1, \quad v_1 = r_1'^{-1} \ldots r_m'^{-1} l_m'^{-1} \ldots l_1'^{-1}.$$

Тогда ${r'_1}^{-1}\dots {r'_m}^{-1} = l_1\dots l_m$, иначе $gg^{-1}\neq 1$. В слове v_1 сокращения справа не затронут ${l'_m}^{-1}$, а l_{m+1}, l'_m не могут принадлежать одной группе G_{ij}, иначе $L(v_1^{-1}u_1) < 2k$, что невозможно.

2.1.3. Пусть v_{1l} является левой половиной образующего, а u_{1l} — обратным к правой половине:

$$u_1 = r_1^{-1}\dots r_k^{-1}l_k^{-1}\dots l_1^{-1},\quad v_1 = l'_1\dots l'_m r'_m\dots r'_1.$$

Так как левая половина образующих изолирована, то $r_1^{-1}\dots r_m^{-1}\neq \neq l'_1\dots l'_m$ и $gg^{-1}\neq 1$. Поэтому $u_1 = v_1$.

2.1.4. Пусть u_{1l}, v_{1l} являются обратными к правым половинам образующих:

$$u_1 = r_1^{-1}\dots r_k^{-1}l_k^{-1}\dots l_1^{-1},\quad v_1 = {r'_1}^{-1}\dots {r'_m}^{-1}{l'_m}^{-1}\dots {l'_1}^{-1}.$$

Имеем $r_1^{-1}\dots r_m^{-1} = {r'_1}^{-1}\dots {r'_m}^{-1}$, а слог ${l'_m}^{-1}$ не может полностью сократиться при сокращениях справа в v_1. Слоги r_{m+1}, l'_m не могут принадлежать одной группе G_{ij}, иначе длину u_1 можно сократить, а это не так.

2.2. Пусть $L(u_1) = 2k$, $L(v_1) = 2m+1$.

2.2.1. Пусть u_{1l}, v_{1l} являются левыми половинами образующих:

$$u_1 = l_1\dots l_k r_k\dots r_1,\quad v_1 = l'_1\dots l'_m K_{v1} r'_m\dots r'_1.$$

Справа у слова v_1 сокращения не затронут ядра K_{v1}. Тогда $l_1\dots l_m = l'_1\dots l'_m$, а K_{v1}, l_{m+1} по построению специального множества слов не могут принадлежать одной подгруппе G_{ij}, что невозможно. Поэтому $u_1 = v_1$.

2.2.2. Пусть u_{1l} является левой половиной образующего, а v_{1l} — обратным к правой половине, т. е.

$$u_1 = l_1\dots l_k r_k\dots r_1,\quad v_1 = {r'_1}^{-1}\dots {r'_m}^{-1}K_{v1}^{-1}{l'_m}^{-1}\dots {l'_1}^{-1}.$$

Тогда $l_1\dots l_m = {r'_1}^{-1}\dots {r'_m}^{-1}$. Сокращения справа у слова v_1 не затронут ядра K_{v1}, поэтому K_{v1}^{-1}, l_{m+1} принадлежат одной группе G_{ij} и должны совпадать, иначе $gg^{-1}\neq 1$. Поэтому $u_1 = v_1$.

2.2.3. Пусть v_{1l} является левой половиной образующего, а u_{1l} — обратным к правой половине:

$$u_1 = r_1^{-1}\dots r_k^{-1}l_k^{-1}\dots l_1^{-1},\quad v_1 = l'_1\dots l'_m K_{v1} r'_m\dots r'_1.$$

Имеем $r_1^{-1}\dots r_m^{-1} = l'_1\dots l'_m$. Сокращения справа у слова v_1 не затронут ядра K_{v1}, но K_{v1}, r_{m+1}^{-1} по построению специального множества слов не могут принадлежать одной подгруппе G_{ij}, что невозможно.

2.2.4. Пусть u_{1l}, v_{1l} являются обратными к правым половинам образующих:

$$u_1 = r_1^{-1}\dots r_k^{-1}l_k^{-1}\dots l_1^{-1},\quad v_1 = {r'_1}^{-1}\dots {r'_m}^{-1}K_{v1}^{-1}{l'_m}^{-1}\dots {l'_1}^{-1}.$$

Тогда $r_1^{-1}\dots r_m^{-1} = {r'_1}^{-1}\dots {r'_m}^{-1}$. Сокращения справа у слова v_1 не затронут ядра K_{v1}, поэтому K_{v1}^{-1}, r_{m+1}^{-1} принадлежат одной группе G_{ij} и должны совпадать, иначе $gg^{-1}\neq 1$.

2.3. Пусть $L(u_1) = 2k+1$, $L(v_1) = 2m$.

2.3.1. Пусть u_{1l}, v_{1l} являются левыми половинами образующих:

$$u_1 = l_1\dots l_k K_{u1} r_k\dots r_1, \quad v_1 = l'_1\dots l'_m r'_m\dots r'_1.$$

Сокращения справа в слове v_1 не затронут l'_m. В силу изолированности левой половины v_1 получим $l_1\dots l_m \neq l'_1\dots l'_m$ и $gg^{-1}\neq 1$, что невозможно.

2.3.2. Пусть u_{1l} является левой половиной образующего, а v_{1l} — обратным к правой половине, т. е.

$$u_1 = l_1\dots l_k K_{u1} r_k\dots r_1, \quad v_1 = {r'_1}^{-1}\dots {r'_m}^{-1}{l'_m}^{-1}\dots {l'_1}^{-1}.$$

Тогда ${r'_1}^{-1}\dots {r'_m}^{-1} = l_1\dots l_m$, иначе $gg^{-1}\neq 1$. В слове v_1 сокращения справа не затронут ${l'_m}^{-1}$, а l_{m+1}, l'_m не могут принадлежать одной группе G_{ij}, иначе $L(v_1^{-1}u_1) < 2k$, что невозможно.

2.3.3. Пусть v_{1l} является левой половиной образующего, а u_{1l} — обратным к правой половине:

$$u_1 = r_1^{-1}\dots r_k^{-1} K_{u1}^{-1} l_k^{-1}\dots l_1^{-1}, \quad v_1 = l'_1\dots l'_m r'_m\dots r'_1.$$

Так как левая половина образующих изолирована, то $r_1^{-1}\dots r_m^{-1}\neq$ $\neq l'_1\dots l'_m$ и $gg^{-1}\neq 1$. Поэтому $u_1 = v_1$.

2.3.4. Пусть u_{1l}, v_{1l} являются обратными к правым половинам образующих:

$$u_1 = r_1^{-1}\dots r_k^{-1} K_{u1}^{-1} l_k^{-1}\dots l_1^{-1}, \quad v_1 = {r'_1}^{-1}\dots {r'_m}^{-1}{l'_m}^{-1}\dots {l'_1}^{-1}.$$

Имеем $r_1^{-1}\dots r_m^{-1} = {r'_1}^{-1}\dots {r'_m}^{-1}$, а слог ${l'_m}^{-1}$ не может полностью сократиться при сокращениях справа в v_1. Слоги r_{m+1}, l'_m не могут принадлежать одной группе G_{ij}, иначе длину u_1 можно сократить, что неверно. Отсюда $u_1 = v_1$.

2.4. Пусть $L(u_1) = 2k+1$, $L(v_1) = 2m+1$.

2.4.1. Пусть u_{1l}, v_{1l} являются левыми половинами образующих:

$$u_1 = l_1\dots l_k K_{u1} r_k\dots r_1, \quad v_1 = l'_1\dots l'_m K_{v1} r'_m\dots r'_1.$$

Справа у слова v_1 сокращения не затронут ядра K_{v1}. Тогда $l_1\dots l_m = l'_1\dots l'_m$, а K_{v1}, l_{m+1} по построению специального множества слов не могут принадлежать одной подгруппе G_{ij}, что невозможно. Отсюда $u_1 = v_1$.

2.4.2. Пусть u_{1l} является левой половиной образующего, а v_{1l} — обратным к правой половине, т. е.

$$u_1 = l_1\dots l_k K_{u1} r_k\dots r_1, \quad v_1 = {r'_1}^{-1}\dots {r'_m}^{-1} K_{v1}^{-1}{l'_m}^{-1}\dots {l'_1}^{-1}.$$

Тогда $l_1 \dots l_m = {r'_1}^{-1} \dots {r'_m}^{-1}$. Сокращения справа у слова v_1 не затронут ядра K_{v1}, поэтому K_{v1}^{-1}, l_{m+1} принадлежат одной группе G_{ij} и должны совпадать, иначе $gg^{-1} \neq 1$. Поэтому $u_1 = v_1$.

2.4.3. Пусть v_{1l} является левой половиной образующего, а u_{1l} — обратным к правой половине:

$$u_1 = r_1^{-1} \dots r_k^{-1} K_{u1}^{-1} l_k^{-1} \dots l_1^{-1}, \quad v_1 = l'_1 \dots l'_m K_{v1} r'_m \dots r'_1.$$

Имеем $r_1^{-1} \dots r_m^{-1} = l'_1 \dots l'_m$. Сокращения справа у слова v_1 не затронут ядра K_{v1}, но K_{v1}, r_{m+1}^{-1} по построению специального множества слов не могут принадлежать одной подгруппе G_{ij}, что невозможно.

2.4.4. Пусть u_{1l}, v_{1l} являются обратными правым половинам образующих:

$$u_1 = r_1^{-1} \dots r_k^{-1} K_{u1}^{-1} l_k^{-1} \dots l_1^{-1}, \ \ v_1 = {r'_1}^{-1} \dots {r'_m}^{-1} K_{v1}^{-1} {l'_m}^{-1} \dots {l'_1}^{-1}.$$

Тогда $r_1^{-1} \dots r_m^{-1} = {r'_1}^{-1} \dots {r'_m}^{-1}$. Сокращения справа у слова v_1 не затронут ядра K_{v1}, поэтому K_{v1}^{-1}, r_{m+1}^{-1} принадлежат одной группе G_{ij} и должны совпадать, иначе $gg^{-1} \neq 1$.

Теорема доказана. □

Литература

[1] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Об элементах конечного порядка в группах Кокстера большого типа // Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2003. — Т. 9, вып. 1. — С. 13—22.

[2] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы сопряжённости слов в группах Кокстера большого типа // Чебышёвский сб. — 2003. — Т. 4, вып. 1 (5). — С. 10—33.

[3] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах Кокстера большого типа // Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2004. — Т. 11, вып. 1. — С. 47—61.

[4] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы обобщённой сопряжённости слов в группах Кокстера большого типа // Дискрет. мат. — 2005. — Т. 17, № 3. — С. 123—145.

[5] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы степенной сопряжённости слов в группах Кокстера экстрабольшого типа // Дискрет. мат. — 2008. — Т. 20, № 3. — С. 101—110.

[6] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Наука, 1980.

[7] Appel K. On Artin groups and Coxeter groups of large type // Contributions to Group Theory. — Amer. Math. Soc., 1984. — P. 50—78. — (Contemp. Math.; Vol. 33).

[8] Kapovich I., Schupp P. Bounded rank subgroups of Coxeter groups, Artin groups and one-relator groups with torsion // Proc. London Math. Soc. III Ser. — 2004. — Vol. 88, no. 1. — P. 89—113.