# О йонсоновской стабильности и некоторых её обобщениях

**А. Р. ЕШКЕЕВ**
*Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, Казахстан*
e-mail: modth1705@mail.ru

УДК 510.67

**Ключевые слова:** йонсоновская стабильность, теория моделей, $P$-стабильность.

**Аннотация**

В работе рассмотрены йонсоновские аналоги понятий стабильности и $P$-стабильности, и относительно этих понятий рассмотрены свойства и связи йонсоновской теории и её центра.

**Abstract**

*A. R. Yeshkeyev, On Jonsson stability and some of its generalizations*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 8, pp. 117—128.

We consider Jonsson analogues of the concepts of stability and $P$-stability. We also consider properties and connections of a Jonsson theory and its center that concern these concepts.

## Введение

Данная работа посвящена изучению некоторых свойств йонсоновских теорий.

В обзорной статье «Основы теории моделей» в [17] известный математик-логик Х. Дж. Кейслер определил основные понятия и направления развития теории моделей. Им было выделено два исторических направления в развитии теории моделей, называемых западной и восточной теорией моделей. Такое деление связано с тем, что А. Тарский жил на западном побережье США, а А. Робинсон — на восточном, но полезно и с математической точки зрения. Западная теория моделей в большей степени связана с задачами теории чисел, анализа и теории множеств, и в ней, как правило, используются все формулы логики первого порядка. Восточная теория моделей связана с задачами абстрактной алгебры, в ней рассматриваются формулы с пренексом длины не более двух. В западном варианте в качестве морфизмов рассматриваются элементарные мономорфизмы, а в восточном — изоморфные вложения и гомоморфизмы. С другой стороны, теория моделей едина, т. е. теоремы «восточного» характера естественно дополняют свои западные аналоги, как, например, «восточная» теорема А. Макинтайра об опускании типов дополняет известную теорему об опускании типов в «западном» смысле. Более полную информацию о связи двух направлений можно найти в [11].

Йонсоновские теории впервые стали объектом исследования в [24,28]. В середине 1980-х работами Т. Г. Мустафина было определено новое направление в изучении йонсоновских теорий. В частности, им был определён естественный подкласс йонсоновских теорий, которые он назвал совершенными. Главным методом исследования Т. Г. Мустафина было изучение свойств произвольных йонсоновских теорий с помощью переноса свойств центрального пополнения данной йонсоновской теории. В начале 1990-х автором был получен критерий совершенности йонсоновской теории [1]. В частности, в [2,3] получено полное описание йонсоновских универсалов унаров, а также исследованы связи между теорией унаров и их центром на языке стабильности. С другой стороны, одним из слабых мест в исследовании йонсоновских теорий в рамках метода, предложенного Т. Г. Мустафиным, было добавление аксиомы о существовании сильно недостижимого кардинала к аксиомам Цермело—Френкеля теории множеств в определении семантической модели. Отметим, что во время доклада Р. М. Оспанова на 5-м Казахско-французском коллоквиуме по теории моделей известными специалистами в области теории моделей Е. А. Палютиным и Б. Пуаза было указано на необходимость изменения этого определения. Это замечания было учтено в [29], где Т. Г. Мустафин переопределяет понятие $k$-однородности и семантической модели. Соответственно изменённое определение совершенности йонсоновской теории появилось в [4]. В этой работе в рамках нового определения [4] были передоказаны основные результаты, полученные ранее в [5].

Йонсоновские теории изучаются в восточной теории моделей. Заметим, что в общем случае йонсоновские теории не полны. На сегодняшний день аппарат теории моделей развит в основном для полных теорий, и поэтому представляет интерес изучение теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий в классе неполных индуктивных теорий.

В данной статье изучаются свойства йонсоновских теорий, связанные со стабильностью. При этом рассмотрены йонсоновские аналоги классического определения стабильности и некоторого его обобщения.

Вопрос о том, как свойства полной теории $T$ связаны со свойствами теории $T_P$ пар моделей исходной теории, целенаправленно начал изучаться в работе [31] французского математика Б. Пуаза. В этой работе Б. Пуаза рассмотрел структуры общего вида, в которых выделяются элементарные подструктуры. Им был сформулирован вопрос о поиске условий, при которых теория элементарных пар является полной. В дальнейшем изучению этого вопроса были посвящены работы [14,19,20] и др. Э. Бускарен в [20] предположила, что решение этого вопроса должно оказаться различным в разных классах стабильных теорий. Она привела ряд необходимых и несколько достаточных условий полноты теории элементарных пар в стабильных и суперстабильных классах. Замечено (Д. Ласкар), что $\omega$-стабильная теория, элементарные пары которой эквивалентны, должна быть несчётно категоричной. В [14] А. Т. Нуртазин приводит решение вопроса о полноте теории элементарных пар для класса несчётно категоричных теорий. Т. Г. Мустафин в [10] вводит понятие $T^*$-$\lambda$-стабильности и перечисляет ряд свойств, обобщающих известные факты о $\lambda$-стабильности в классическом смысле. В частности, изучается $P$-стабильность, которая непосредственно связана с понятием элементарных пар. В [12] получена характеризация $P$-стабильности для любой суперстабильной теории. В [16] Е. А. Палютиным введено понятие $E^*$-стабильной теории. Основной результат статьи [16] (теорема 3.1) состоит в доказательстве определимости типов для $E^*$-стабильных теорий. Это понятие отличается от $T^*$-стабильности добавлением условия непрерывности, тривиально выполняющегося для важнейших частных случаев (стабильности, $P$-стабильности и др.). Следствием этого результата, кроме упомянутой определимости типов для стабильных теорий, является также определимость типов над любыми $P$-множествами в $P$-стабильных теориях, которая была установлена Т. Нурмагамбетовым и Б. Пуаза для типов над $P$-моделями [13].

Одним из вопросов, сформулированных Т. Г. Мустафиным на первом советско-французском коллоквиуме в 1990 году, был следующий: если теория $T$ $P$-$\lambda$-стабильна, то всегда ли она $\lambda$-стабильна? На этот вопрос Э. Бускарен был дан отрицательный ответ, а именно:

1) существует $P$-$\omega$-стабильная, суперстабильная, но не $\omega$-стабильная теория;
2) существует $P$-$\omega$-стабильная, несуперстабильная, но стабильная теория.

В данной работе вопрос Т. Г. Мустафина рассмотрен в некотором классе неполных индуктивных теорий. При соответствующих обобщениях определений $\lambda$-стабильности и $P$-$\lambda$-стабильности в йонсоновских теориях из теорем 3 и 12 данной статьи можно сделать вывод, что вопрос имеет тот же смысл и в совершенном йонсоновском случае.

## 1. Стабильные йонсоновские теории

Дадим основные определения.

**Определение 1.** Теория $T$ языка $L$ называется йонсоновской, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $T$ имеет бесконечную модель;
2) $T$ индуктивна;
3) $T$ обладает свойством совместного вложения;
4) $T$ обладает свойством амальгамы.

**Определение 2.** Пусть $k \geqslant \omega$. Модель $M$ теории $T$ называется $k$-универсальной для $T$, если каждая модель $T$, мощность которой строго меньше $k$, изоморфно вкладывается в $M$. Модель $M$ теории $T$ называется $k$-однородной для $T$, если для любых двух моделей $A$ и $A_1$ теории $T$, являющихся подмоделями $M$ мощности строго меньше $k$, и изоморфизма $f\colon A \to A_1$ для каждого расширения $B$ модели $A$, являющегося подмоделью $M$ и моделью $T$ мощности строго меньше $k$, существуют расширение $B_1$ модели $A_1$, являющееся подмоделью $M$, и изоморфизм $g\colon B \to B_1$, продолжающий $f$.

**Определение 3.** Модель $C_T$ йонсоновской теории $T$ называется семантической моделью теории $T$, если она $\omega^+$-однородная универсальная модель $T$.

**Определение 4.** Семантическим пополнением (центром) йонсоновской теории $T$ называется элементарная теория $T^*$ семантической модели $C_T$ теории $T$, т. е. $T^* = \mathrm{Th}(C_T)$.

**Определение 5.** Йонсоновская теория $T$ называется совершенной, если каждая семантическая модель $T$ является насыщенной моделью $T^*$.

Легко заметить, что все семантические модели элементарно эквивалентны друг другу.

**Определение 6.** $\sharp$-компаньоном йонсоновской теории $T$ называется такая теория $T^\sharp$, что

1) $(T^\sharp)_\forall = T_\forall$;
2) для любой йонсоновской теории $T'$, если $T_\forall = T'_\forall$, то $T^\sharp = (T')^\sharp$;
3) $T \subseteq T^\sharp$.

Существуют следующие естественные примеры: если $\sharp \in \{\mathrm{o}, *, \mathrm{e}, \mathrm{f}\}$, то мы имеем соответственно оболочку Кайзера теории $T$, центр теории $T$, $\mathrm{Th}(E_T)$, где $E_T$ — класс $T$-экзистенционально замкнутых моделей теории $T$, форсинг-компаньон $T^\mathrm{f}$ теории $T$.

**Теорема 1 [4].** *Пусть $T$ — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$T$ совершенна*;
2) *$T^*$ — модельный компаньон теории $T$*;
3) $\mathrm{Mod}\, T^* = E_T$;
4) $T^* = T^\mathrm{f}$.

**Теорема 2 [4].** *Пусть $T$ — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$T$ модельно полна*;
2) *$T$ полна.*

Пусть $T$ — йонсоновская теория, $S^J(X)$ — множество всех экзистенционально полных $n$-типов над $X$, совместных с $T$, для каждого конечного $n$.

**Определение 7.** Мы говорим, что йонсоновская теория $T$ $J$-$\lambda$-стабильна, если для любой $T$-экзистенционально замкнутой модели $A$ и любого подмножества $X$ множества $A$ из $|X| \leqslant \lambda$ следует, что $|S^J(X)| \leqslant \lambda$.

Оказывается, что такое обобщение понятия стабильности может дать следующий результат, который связывает понятия $J$-стабильности и классической стабильности.

**Теорема 3.** *Пусть $T$ — полная для экзистенциональных предложений совершенная йонсоновская теория, $\lambda \geqslant \omega$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *теория $T$ $J$-$\lambda$-стабильна*;
2) *теория $T^*$ — центр теории $T$ — $\lambda$-стабильна.*

**Доказательство.** Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Если $T \subset T^*$, то $E_n(T) \subset \subset E_n(T^*)$, где $E_n(T)$, $E_n(T^*)$ — это соответствующие решётки экзистенциональных формул. Теория $T$ полна для экзистенциональных предложений, следовательно, $E_n(T) = E_n(T^*)$. Теория $T$ совершенна, следовательно, теория $T^*$ модельно полна по теореме 1 тогда и только тогда, когда

$$\forall\, n < \omega \ \forall\, \varphi \in F_n(T^*) \ \exists\, \theta \in E_n(T^*) \ (T^* \vdash \varphi \leftrightarrow \theta).$$

Пусть теория $T$ $J$-$\lambda$-стабильна. Тогда по определению для каждой модели $A \in E_T$ мы имеем, что для каждого подмножества $X \subset A$, если $|X| \leqslant \lambda$, то $|S^J(X)| \leqslant \lambda$.

Предположим, что теория $T^*$ не $\lambda$-стабильна. Тогда по теореме 1 существует модель $A \in E_T = \operatorname{Mod} T^*$, такая что существует подмножество $X \subset A$, такое что если $|X| < \lambda$ и существует $n < \omega$, то $|S^J(X)| > \lambda$. Для каждой формулы $\varphi \in p$, где $p \in S_n(X)$, мы заменим $\varphi$ на $\theta$, удовлетворяющую свойствам $T^* \vdash \varphi \leftrightarrow \theta$ и $\theta \in E_n(T^*)$. Пусть $p'$ будет $p$ после замены. Тогда $p' \in S^J(X)$ и $|S^J(X)| > \lambda$. Это противоречит $J$-$\lambda$-стабильности теории $T$.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) тривиальна. $\square$

Известен следующий вопрос Е. А. Палютина: существует ли $\omega$-категоричный универсал $K$, не являющийся $\omega_1$-категоричным? Мы рассматриваем $\omega$-категоричный универсал йонсоновских теорий в связи с этим вопросом.

**Лемма 1.** *Если йонсоновская теория $T$ $\omega$-категорична, то она совершенна.*

**Доказательство.** Если теория $T$ $\omega$-категорична, то по теореме Сарачино [32] существует такая теория $T'$, что $T'$ — модельный компаньон теории $T$ и $T'$ $\omega$-категорична. Следовательно, по теореме Эклофа—Саббаха [21] $E_T$ — элементарный класс. По теореме 1 $\operatorname{Th}(E_T) = T^*$. Следовательно, $T$ совершенна. $\square$

**Лемма 2.** *Пусть $\kappa \geqslant \omega$. Если йонсоновская теория $T$ $\kappa$-категорична, то $\sharp$-компаньон теории $T$ $\kappa$-категоричен.*

**Доказательство.** Если теория $T^\sharp$ не $\kappa$-категорична, то найдутся $A, B \in \in \operatorname{Mod}(T^\sharp)$, такие что $|A| = |B| = \kappa$, $A$ не изоморфна $B$. Тогда $A, B \in \operatorname{Mod}(T)$, так как $T \subseteq T^\sharp$. Но теория $T$ $\kappa$-категорична. Противоречие. $\square$

Следствием указанных фактов является следующая теорема.

**Теорема 4.** *В случае негативного ответа на вопрос Е. А. Палютина для йонсоновской теории, которая удовлетворяет условиям вопроса Е. А. Палютина, центр йонсоновской теории не может быть конечно аксиоматизирован.*

Доказательство следует из предыдущих лемм и теоремы Зильбера о тотальной категоричности и конечной аксиоматизируемости [6].

**Определение 8.** Йонсоновская теория $T$, полная для $\exists$-предложений, называется $J$-недвукардинальной, если для любой $T$-экзистенционально замкнутой модели $A$ для каждой $\exists$-формулы $\varphi(x, \bar{y})$, $\bar{a} \in A$, $l(\bar{a}) = l(\bar{y})$, множество $\varphi(A, \bar{a})$ либо конечно, либо имеет мощность $|A|$.

Следующие результаты принадлежат Е. А. Палютину [15].

**Теорема 5.** *Если $T$ — $\omega$-категоричная универсальная теория, то полная теория $T_\infty$ недвукардинальна.*

**Теорема 6.** *Если $T$ — $\omega$-категоричная универсальная теория, то следующие условия эквивалентны*:

1) *теория $T$ $\omega_1$-категорична*;
2) *теория $T_\infty$ $\omega$-стабильна*;
3) *некоторое несущественное расширение $T$ имеет сильно минимальную формулу.*

Мы можем получить следующие результаты.

**Теорема 7.** *Если $T$ — $\omega$-категоричная универсальная йонсоновская теория, то теория $T^\sharp$ недвукардинальна.*

Доказательство следует из теорем 5 и 1 и лемм 1 и 2.

**Определение 9.** Для любой йонсоновской теории $T$, любой экзистенционально замкнутой модели $M$ теории $T$ и любого $\bar{a} \in M$ $T' = \mathrm{Th}_{\forall\exists}(M, \bar{a})$ — $J$-несущественное расширение теории $T$.

**Определение 10.** Пусть $T$ — $\exists$-полная йонсоновская теория. Тогда $\exists$-формула $\varphi(x, \bar{a})$ называется сильно минимальной в $T$, если она бесконечна, но для любой $\exists$-формулы $\varphi(x, \bar{b})$ одна из формул $\varphi(x, \bar{a}) \wedge \psi(x, \bar{a})$, $\varphi(x, \bar{a}) \wedge \neg\psi(x, \bar{a})$ конечна в $T$.

**Теорема 8.** *Если $T$ — $\omega$-категоричная универсальная йонсоновская теория, полная для $\exists$-предложений, то следующие условия эквивалентны*:

1) *теория $T$ $\omega_1$-категорична*;
2) *теория $T^\sharp_\infty$ $J$-$\omega$-стабильна*;
3) *некоторое $J$-несущественное расширение $T$ имеет $J$-сильно минимальную формулу.*

Доказательство следует из теорем 6 и 1 и лемм 1 и 2.

## 2. Аксиоматическое задание форкинга в йонсоновских теориях

Основной целью данного раздела является определение понятия форкинга для совершенных йонсоновских теорий. Сведения о форкинге для универсального класса можно найти в [23, 30, 33]. Мы предлагаем определение форкинга для индуктивных теорий, являющихся йонсоновскими.

В [9, 18, 25] можно увидеть различные пути аксиоматизации форкинга. Мы следуем в основном [9] в «йонсоновских» обобщениях основных понятий из [9, теорема 19.1].

**Определение 11.** Пусть $M$ — $\exists$-насыщенная экзистенционально замкнутая модель мощности $\kappa$ йонсоновской теории $T$ ($\kappa$ — достаточно большой кардинал, $\exists$-насыщенность означает насыщенность относительно экзистенциональных типов). Пусть $\mathbf{A}$ — класс всех подмножеств $M$, $\mathbf{P}$ — класс всех $\exists$-типов (не обязательно полных). Пусть $\mathrm{JNF} \subseteq \mathbf{P} \times \mathbf{A}$ — некоторое бинарное отношение. Мы требуем выполнения следующих аксиом для JNF.

**Аксиома 1.** Если $(p, A) \in \mathrm{JNF}$, $f\colon A \to B$ — автоморфизм $M$, то $\big(f(p), f(A)\big) \in \mathrm{JNF}$.

**Аксиома 2.** Если $(p, A) \in \mathrm{JNF}$, $q \subseteq p$, то $(q, A) \in \mathrm{JNF}$.

**Аксиома 3.** Если $A \subseteq B \subseteq C$, $p \in S^J(C)$, то $(p, A) \in \mathrm{JNF}$ тогда и только тогда, когда $(p, B) \in \mathrm{JNF}$ и $(p\lceil B, A) \in \mathrm{JNF}$.

**Аксиома 4.** Если $A \subseteq B$, $\mathrm{dom}(p) \subseteq B$, $(p, A) \in \mathrm{JNF}$, то найдётся $q \in S^J(B)$, такое что $p \subseteq q$ и $(q, A) \in \mathrm{JNF}$.

**Аксиома 5.** Существует кардинал $\mu$, такой что если $A \subseteq B \subseteq C$, $p \in S^J(B)$, $(p, A) \in \mathrm{JNF}$, то

$$|\{q \in S^J(C)\colon p \subseteq q,\ (q, A) \in \mathrm{JNF}\}| < \mu.$$

**Аксиома 6.** Существует кардинал $\rho$, такой что для любого $\rho \in \mathbf{P}$ для любого $A \in \mathbf{A}$, если $(p, A) \in \mathrm{JNF}$, то найдётся $A_1 \subseteq A$, такое что $|A_1| < \rho$ и $(p, A_1) \in \mathrm{JNF}$.

**Аксиома 7.** Если $p \in S^J(A)$, то $(p, A) \in \mathrm{JNF}$.

Классическое понятие форкинга принадлежит Шелаху [33].

**Определение 12.** Множество формул $\{\varphi(\bar{x}, \bar{a_i})\colon i < k\} = p$ называется $k$-несовместным для некоторого положительного целого $k$, если каждое конечное подмножество $p$ мощности $k$ несовместно, т. е.

$$\models \neg\bar{x}\big(\varphi(\bar{x}, \bar{a_{i_1}}) \wedge \ldots \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{a_{i_k}})\big)$$

для всех $i_1 < \ldots < i_k < k$.

Частичный тип $p$ делится над множеством относительно $k \in \omega$, если существуют формула $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ и последовательность $\langle \bar{a}_i\colon i \in \omega\rangle$, такая, что

1) $p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})$;
2) $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}(\bar{a}_i/A)$ для всех $i$;
3) множество $\{\varphi(\bar{x}, \bar{a}_i)\colon i \in \omega\}$ $k$-несовместно.

Тип $p$ делится над $A$, если $p$ делится над $A$ относительно некоторого $k$. Кроме того, $p$ форкуется над $A$ в $T$, если существуют формулы $\phi_1(\bar{x}, \bar{a_0}), \ldots, \phi_n(\bar{x}, \bar{a_n})$, такие что

1) $p \models \vee_{0 \leqslant i \leqslant n} \phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$;
2) $\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$ делится над $A$ для каждого $i$.

Мы будем использовать в доказательстве теоремы 10 следующие результаты.

**Теорема 9 [7, p. 173].** *Пусть $I$ — бесконечное множество, $n < \omega$, $[I]^n$ — семейство всех подмножеств множества $I$, которые состоят ровно из $n$ элементов. Если $[I]^n = A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1}$, $k < \omega$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i < j < k$, то существует бесконечное подмножество $J \subset I$, такое что $[J]^n \subset A_i$ для некоторого $i < k$.*

**Лемма 3 [8, лемма 14.9].** *Пусть $T$ — стабильная теория, $M$ — насыщенная модель мощности $\mu^+$, типы $p_1, p_2 \in S(M)$ не форкуются над $A$. Тогда если $p_1\lceil A = p_2\lceil A$, то существует тождественный на $A$ элементарный мономорфизм $f$, такой что $f(d_1) \sim d_2$, где $d_1$, $d_2$ — схемы, определяющие $p_1$, $p_2$ соответственно.*

**Теорема 10.** *Пусть $T$ — совершенная йонсоновская теория, полная для $\exists$-предложений. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *отношение* JNF *удовлетворяет аксиомам* 1—7 *относительно теории* $T$;
2) *теория* $T^*$ *стабильна и для любых* $p \in \mathbf{P}$, $A \in \mathbf{A}$ $(p, A) \in$ JNF *тогда и только тогда, когда* $p$ *не форкуется над* $A$.

**Доказательство.** Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $\lambda = 2^{\rho\cdot|T|\cdot\mu}$, где $\lambda$, $\rho$, $\mu$ — кардиналы, соответствующие аксиомам 1—7. Теперь покажем, что теория $T$ $J$-$\lambda$-стабильна. Тогда по теореме 3 мы будем иметь, что теория $T^*$ $\lambda$-стабильна. Очевидно, что $\lambda^\rho = \lambda$. Пусть $|A| = \lambda$. Если $p \in S^J(A)$, то по аксиоме 7 $(p, A) \in$ JNF и по аксиоме 6 существует $A_p \subseteq A$, такое что $|A_p| < \rho$ и $(p, A_p) \in$ JNF. Тогда по аксиоме 3 $(p\lceil A_p, A_p) \in$ JNF. Мы обозначим $p\lceil A_p$ через $g(p)$. По аксиоме 5 $|\{q \in S^J(A)\colon g(q) = g(p)\}| < \mu$. Следовательно,

$$|S^J(A)| \leqslant |\{g(p)\colon p \in S^J(A)\}| \cdot \mu \leqslant |A^\rho| \cdot 2^{\rho\cdot|T|} \cdot \mu \leqslant \lambda^\rho \cdot \lambda \cdot \lambda = \lambda^\rho = \lambda.$$

Следовательно, теория $T$ $J$-$\lambda$-стабильна, и по теореме 3 теория $T^*$ $\lambda$-стабильна.

Пусть теперь $(p, A) \in$ JNF. Покажем, что $p$ не форкуется над $A$. Пусть $B = \mathrm{dom}(p)$. Тогда по аксиоме 4 существует $q \in S^J(B)$, такой что $p \subseteq q$ и $(q, A) \in$ JNF. Докажем, что тип $q$ не форкуется над $A$ (тогда тип $p$ не форкуется над $A$ по аксиоме 2). Предположим обратное. Тогда по определению 12 вследствие совершенности теории $T$ существует такое конечное множество экзистенциональных формул $\Sigma$, что $q \vdash \bigvee\{\varphi\colon \varphi \in \Sigma\}$ и каждая формула $\varphi \in \Sigma$ делится над $A$. Пусть $C = B \cup D$, $D$ — множество констант, входящих хотя бы в одну из формул из $\Sigma$. По аксиоме 4 существует такой тип $q_0 \in S^J(C)$, что $q \subseteq q_0$ и $(q_0, A) \in$ JNF. Очевидно, что $q_0 \vdash \bigvee\{\varphi\colon \varphi \in \Sigma\}$. Следовательно, существует $\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in q_0 \cap \Sigma$. Используя теорему 9, теорему компактности и делимость $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ над $A$, мы можем показать существование последовательности $\langle \bar{a_\alpha}\colon \alpha < \mu^+\rangle$ и элементарных мономорфизмов $f_\alpha$, $\alpha < \mu^+$, тождественных на $A$, таких что $\bar{a_0} = \bar{a}$, $\bar{a}_\alpha = f_\alpha(\bar{a})$, $\alpha < \mu^+$, и множество $\{\varphi(\bar{x}, \bar{a_\alpha})\colon \alpha < \mu^+\}$ $k$-несовместно для некоторого $k < \omega$.

Пусть $E = C \cup \{\bar{a_\alpha}\colon \alpha < \mu^+\}$, $q_\alpha = f_\alpha(q_0)$, $0 < \alpha < \mu^+$. По аксиоме 1 $(q_\alpha, A) \in$ JNF, $\alpha < \mu^+$. По аксиоме 4 существуют $q'_\alpha \in S^J(E)$, такие что $q_\alpha \subseteq q'_\alpha$ и $(q'_\alpha, A) \in$ JNF. Ясно, что $\varphi(\bar{x}, \bar{a_\alpha}) \in q'_\alpha$, $q \subseteq q'_\alpha$, $\alpha < \mu^+$.

Имеем $|\{q'_\alpha \colon \alpha < \mu^+\}| = \mu^+$, так как множество $\{\varphi(\bar{x}, \bar{a_\alpha}) \colon \alpha < \mu^+\}$ $k$-несовместно. Получили противоречие с аксиомой 5. Следовательно, тип $q$ не форкуется над $A$. Таким образом, если $(p, A) \in \mathrm{JNF}$, то тип $p$ не форкуется над $A$.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть тип $p$ не форкуется над $A$. Так как теория $T$ совершенна, то теория $T^*$ модельно полна (теорема 1) и нам достаточно работать только с экзистенциональными типами и рассматривать $\exists$-насыщенные экзистенционально замкнутые модели теории $T$. Нам нужно доказать, что $(p, A) \in \mathrm{JNF}$. Пусть $M \supseteq A$, $M \supseteq \mathrm{dom}(p)$, $|M| > 2^{\rho \cdot |T| \cdot \mu}$ и $M$ — $\exists$-насыщенная модель теории $T^*$, $t \in S^J(M)$, $p \subseteq t$, тип $t$ не форкуется над $A$. По аксиоме 7 $(t\lceil A, A) \in \mathrm{JNF}$, и по аксиоме 5 существует такой тип $q \in S^J(M)$, что $q \supseteq t\lceil A$ и $(q, A) \in \mathrm{JNF}$. Как показано выше, из $(q, A) \in \mathrm{JNF}$ следует, что тип $q$ не форкуется над $A$. По лемме 3 существует тождественный на $A$ автоморфизм $f$ модели $M$, такой что $t = f(q)$. Тогда по аксиоме 1 $(t, A) \in \mathrm{JNF}$, и по аксиоме 2 $(p, A) \in \mathrm{JNF}$. Следовательно, импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) доказана.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) следует из доказательства теоремы 19.1 [9] с обобщением соответствующих понятий в йонсоновском смысле. □

## 3. $P$-стабильность в йонсоновских теориях

Пусть $T$ — произвольная йонсоновская теория сигнатуры $\sigma$, $C$ — её семантическая модель, $A$ — подмножество модели $C$, $P$ — новый одноместный предикатный символ. Рассмотрим в сигнатуре $\sigma_P(A) = \sigma_A \cup \{P\}$ (вообще говоря, неполную) теорию

$$T_P^J(A) = \mathrm{Th}_{\forall\exists}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c_a) \mid a \in A\} \cup \{\text{«}P \subseteq\text{»}\},$$

где $\{\text{«}P \subseteq\text{»}\}$ — бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа $P$ — это экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре $\sigma$. Требование экзистенциальной замкнутости подмодели существенно в том смысле, что она не должна быть конечной, а также в силу теоремы 10. Через $S_p^J$ обозначим множество всех $\exists$-пополнений теории $T_P^J(A)$. Пусть $\lambda$ — произвольный кардинал.

**Определение 13.** Йонсоновская теория $T$ называется йонсоновской $P$-$\lambda$-стабильной (в дальнейшем $J$-$P$-$\lambda$-стабильной), если $|S_P^J| \leqslant \lambda$ для любого множества $A$ мощности не больше $\lambda$.

Йонсоновская теория $T$ называется $J$-$P$-стабильной, если $T$ является $J$-$P$-$\lambda$-стабильной для некоторого $\lambda$.

Пусть $A$ и $B$ — экзистенциально замкнутые модели йонсоновской теории $T$ и выполняется включение $A \subsetneqq B$. Пусть $\sigma_P = \sigma \cup \{P\}$ и интерпретация одноместного предикатного символа $P$ в $B$ есть $A$.

**Определение 14.** Модель $(A, B)$ называется йонсоновской элементарной парой теории $T$.

Теорией йонсоновских элементарных пар называется теория $T_P^J$ класса $K$, где $K$ — множество всех йонсоновских элементарных пар теории $T$.

**Теорема 11 [22, теорема 8.1.2].** *Пусть $L$ — язык первого порядка и $T$ — теория в языке $L$. Предположим, что $T$ обладает свойством совместного вложения, и пусть $A$ и $B$ — экзистенциально замкнутые модели теории $T$. Тогда каждое $\forall_2$-предложение языка $L$, истинное в $A$, истинно в $B$.*

**Лемма 4.** *Если $T$ — совершенная йонсоновская теория, то $T_P^J(A)$ — совершенная йонсоновская теория.*

**Доказательство.** В силу определения $T_P^J(A)$ достаточно показать, что $T_P^J(A)$ имеет семантическую модель, насыщенную в своей мощности. В качестве этой модели берём семантическую модель $C$ теории $T$, и в зависимости от подмножества $A$ и интерпретации одноместного предиката $P$ в $C$ модель $(C, M, a)_{a\in A}$ будет насыщенной в своей мощности. □

**Теорема 12.** *Пусть $T$ — совершенная йонсоновская $\exists$-полная теория. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *центр теории $T$ $P$-$\lambda$-стабилен* (*в смысле* [12]);
2) *теория $T$ $J$-$P$-$\lambda$-стабильна.*

**Доказательство.** Доказательство импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) тривиально, так как если всех пополнений не больше чем $\lambda$, то $\exists$-пополнений тем более не больше чем $\lambda$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть теория $T$ $J$-$P$-$\lambda$-стабильна. Это равносильно тому, что $T_P^J(A)$ в сигнатуре $\sigma_P(A) = \sigma_A \cup \{P\}$ совпадает с соответствующей оболочкой Кайзера $T^0$. В силу совершенности теории $T$ имеем, что $T^0 = T^*$ и $E_T = \mathrm{Mod}\, T^*$ (теорема 1), и в силу леммы 4 $T_P^J(A) = T^0$ будет совершенной йонсоновской теорией. Пусть у теории $T^0$ не более чем $\lambda$ $\exists$-пополнений. Центр теории $T$ в новой сигнатуре $\sigma_P(A) = \sigma_A \cup \{P\}$ будет равен

$$\mathrm{Th}(C, a)_{a\in A} \cup \{P(c_a) \mid a \in A\} \cup \{\text{«}P \preceq\text{»}\}.$$

Нам надо показать, что у $T^*$ всех пополнений не более чем $\lambda$. Тогда $T^*$ будет $P$-$\lambda$-стабильна (в смысле [12]).

Поймем, за счёт чего $T^*$ не полна в новой сигнатуре. Добавление констант даёт только несущественные расширения, что не изменяет количества типов экзистенциально замкнутых подмоделей $C$. Существенную роль играют реализации предиката $P$. В данном случае реализацией предиката $P$ будет некоторая элементарная подмодель $M$ модели $C$. Так как семантическая модель $C$ йонсоновской теории $T$ является экзистенциально замкнутой [11], то из смысла предиката $P$ в $C$ ($M \preceq C$) следует, что $M \in E_T$. Рассмотрим произвольное пополнение $T'$ теории $T^*$ в новой сигнатуре. По определению $T^*$ найдётся такая модель $M$ из $E_T$, что $T' = \mathrm{Th}(C, M, a)_{a\in A}$, где $M$ — интерпретация предиката $P$ в семантической модели $C$. По лемме 4 $T' = \mathrm{Th}(C, M, a)_{a\in A}$ — йонсоновская теория. В этом случае $T'$ является модельно полной теорией по теореме 2. Следовательно, в этом случае в силу модельной полноты $T'$ любая формула в $T'$ эквивалентна некоторой экзистенциальной формуле в $T'$. Тогда в силу $\exists$-полноты теории $T$ таких пополнений по условию 2) не более чем $\lambda$. Тем самым утверждение доказано. $\square$

Как следствие этого результата и леммы 2 можно получить следующее утверждение.

**Следствие 1.** *Пусть $T$ — несчётно категоричная йонсоновская $\exists$-полная теория. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *теория йонсоновских элементарных пар $T_P^J$ является $\exists$-полной теорией*;
2) *теория элементарных пар центра теории $T$ полна* (*в смысле* [14]).

## Заключение

Заметим, что так как теория, полная для экзистенциальных предложений, удовлетворяет свойству совместного вложения, но обратное неверно [26, с. 157], условие $\exists$-полноты в теореме 12 и следствии 1 снять нельзя. В связи с тем что существует континуум не элементарно эквивалентных между собой экзистенциально замкнутых групп [27], а теория групп является йонсоновской, можно сделать вывод, что в условии теоремы 12 нельзя отказаться от требования совершенности.

## Литература


[1] Ешкеев А. Р. Совершенные йонсоновские теории // Третья Междунар. конф. по алгебре: Тез. докл. — Красноярск, 1993.

[2] Ешкеев А. Р., Мустафин Т. Г. Некоторые свойства йонсоновских примитивов унаров // Исследования в теории алгебраических систем. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1995. — С. 58—61.

[3] Ешкеев А. Р., Мустафин Т. Г. Описание йонсоновских универсалов унаров // Исследования в теории алгебраических систем. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1995. — С. 51—57.

[4] Ешкеев А. Р., Оспанов Р. М. Йонсоновские теории и их компаньоны // Материалы 10-й Межвуз. конф. по математике и механике. Т. 1. — Алматы, 2005. — С. 185—190.

[5] Ешкеев А. Р., Оспанов Р. М. Связь йонсоновских теорий с теоремой Линдстрёма // Труды V казахско-французского коллоквиума. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2001. — С. 65—75.

[6] Зильбер Б. И. Решение проблемы конечной аксиоматизируемости для теорий, категоричных во всех бесконечных мощностях // Теория моделей и её приложения / под ред. Б. Байзанова. — Алма-Ата: КазГУ, 1980. — С. 47—60.

[7] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. — М.: Наука, 1977.

[8] Мустафин Т. Г. Стабильные теории. — Караганда, 1981.

[9] Мустафин Т. Г. Число моделей теорий. — Караганда, 1983.

[10] Мустафин Т. Г. Новые понятия стабильности теорий // Тр. советско-французского коллоквиума по теории моделей. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1990. — С. 112—125.

[11] Мустафин Т. Г. Обобщённые условия Йонсона и описание обобщённо-йонсоновских теорий булевых алгебр // Мат. тр. — 1998. — Т. 1, № 2. — С. 135—197.

[12] Мустафин Т. Г., Нурмагамбетов Т. А. О $P$-стабильности полных теорий // Структурные свойства алгебраических систем. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1990. — С. 88—100.

[13] Нурмагамбетов Т., Пуаза Б. О числе элементарных пар над множествами // Исследования в теории алгебраических систем. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1995. — С. 73—82.

[14] Нуртазин А. Т. Об элементарных парах в несчётно-категоричной теории // Тр. советско-французского коллоквиума по теории моделей. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1990. — С. 126—146.

[15] Палютин Е. А. Модели со счётно категоричными универсальными теориями // Алгебра и логика. — 1971. — Т. 10, № 1. — С. 23—32.

[16] Палютин Е. А. $E^*$-стабильные теории // Алгебра и логика. — 2003. — Т. 42, № 2. — С. 194—210.

[17] Справочная книга по математической логике / Под ред. Дж. Барвайса. — М.: Наука, 1982. — Ч. 1: Теория моделей.

[18] Baldwin J. T. Fundamentals of Stability Theory. — New York: Springer, 1987.

[19] Bouscaren E. Dimensional order property and pairs of models // Ann. Pure Appl. Logic. — 1989. — Vol. 41. — P. 205—231.

[20] Bouscaren E. Elementary pairs of models // Ann. Pure Appl. Logic. — 1989. — Vol. 45. — P. 129—137

[21] Eclof P., Sabbagh G. Model completions and modules // Ann. Math. Logic. — 1971. — Vol. 2. — P. 251—295.

[22] Hodges W. Model Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.

[23] Hrushovski E. Simplicity and the Lascar group: Preprint. — 1998.

[24] Jonsson B. Homogeneous universal relational systems // Math. Scand. — 1960. — Vol. 8. — P. 137—142.

[25] Kim B. Forking in simple unstable theories // J. London Math. Soc. (2). — 1998. — Vol. 57. — P. 257—267.

[26] Kueker D. W. Core structures for theories // Fund. Math. — 1975. — Vol. 89. — P. 154—171.

[27] Macintyre A. On algebraically closed groups // Ann. Math. — 1972. — Vol. 96. — P. 53—97.

[28] Morley M., Vaught R. L. Homogeneous universal models // Math. Scand. — 1962. — Vol. 11. — P. 37—57.

[29] Mustafin Y. Quelques proprietes des thèories de Jonsson // J. Symbolic Logic. — 2002. — Vol. 67, no. 2. — P. 528—536.

[30] Pillay A. Forking in the category of existentially closed structures // Connection between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry / A. Macintyre, ed. — Univ. of Naples, 2000. — (Quaderni di Matematica; Vol. 6).

[31] Poizat B. Paires de structures stables // J. Symbolic Logic. — 1983. — Vol. 48. — P. 239—249.

[32] Saracino D. Model companion for $\omega$-categorical theories // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 39. — P. 591—598.

[33] Shelah S. The lazy model-theoretician's guide to stability // Logique et Analyse. — 1967. — Vol. 71-72. — P. 241—308.