О нормализаторе гашюцевой системы конечной разрешимой группы

С. Ф. КАМОРНИКОВ, Л. А. ШЕМЕТКОВ
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: shemetkov@gsu.by

УДК 512.542.4

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, префраттиниева подгруппа.

Аннотация

В 2008 году С. Ф. Каморниковым было введено понятие гашюцевой системы конечной разрешимой группы (это система дополнений корон попарно неизоморфных нефраттиниевых факторов главного ряда этой группы). В настоящей работе изучаются свойства гашюцевых систем. В частности, мы определяем число гашюцевых систем в конечной разрешимой группе и доказываем их сопряжённость, устанавливаем связь между $\mathfrak{N}$-префраттиниевыми подгруппами и нормализаторами гашюцевых систем, исследуем факторизации нормализатора гашюцевой системы.

Abstract

S. F. Kamornikov, L. A. Shemetkov, On the normalizer of a Gaschütz system of a finite soluble group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 8, pp. 129—136.

The notion of a Gaschütz system of a finite soluble group was introduced by S. F. Kamornikov in 2008 (this is a set of complements of crowns of pairwise non-isomorphic non-Frattini factors of a chief series of the group). In the present paper, properties of Gaschütz systems are investigated. In particular, we calculate the number of Gaschütz systems in a finite soluble group and prove their conjugacy, obtain a connection between $\mathfrak{N}$-prefrattini subgroups and normalizers of Gaschütz systems, and investigate factorizations of the normalizer of a Gaschütz system.

В работе мы будем рассматривать только конечные разрешимые группы. Используются определения и обозначения, принятые в [2, 5]. Напомним лишь основные из них.

Прежде всего обратимся к понятию короны конечной разрешимой группы G. Его ввёл В. Гашюц в [6]. Рассматривая дополняемый главный фактор H/K группы G как G-модуль, он доказал существование в G нормальной секции, являющейся вполне приводимым G-модулем, у которого композиционные компоненты G-изоморфны H/K, а композиционная длина m равна числу дополняемых и G-изоморфных H/K факторов некоторого главного ряда группы G. Эта секция обозначается через $\mathrm{Cr}_G(H/K)$ и называется короной группы G, соответствующей главному фактору H/K. Конструктивное построение короны конечной

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 8, с. 129—136.

разрешимой группы G, соответствующей дополняемому главному фактору H/K, осуществляется следующим образом:

$$\mathrm{Cr}_G(H/K) = C_G(H/K)/R,$$

где R — пересечение ядер максимальных подгрупп, дополняющих H/K. Простейшие свойства короны $\mathrm{Cr}_G(H/K)$ приведены в следующей лемме (см. [4,6]).

Лемма 1. *Пусть H/K — дополняемый главный фактор конечной разрешимой группы G, R — пересечение ядер всех тех максимальных подгрупп из G, которые дополняют H/K. Тогда*

1) $\mathrm{Cr}_G(H/K) = \mathrm{Soc}(G/R)$;
2) *каждая минимальная нормальная подгруппа из G/R G-изоморфна H/K и является дополняемым главным фактором группы G;*
3) *все дополняемые главные факторы группы G, расположенные выше $\mathrm{Cr}_G(H/K)$ или ниже R, не G-изоморфны H/K;*
4) *существует m нормальных подгрупп $A_1, \ldots, A_m$ группы G, таких что*

$$\mathrm{Cr}_G(H/K) = A_1/R \times \ldots \times A_m/R,$$

где A_i/R — дополняемый и G-изоморфный H/K главный фактор G для всех $i = 1, \ldots, m$, а m — число всех дополняемых и G-изоморфных H/K главных факторов группы G некоторого главного ряда группы G.

Короной конечной разрешимой группы G называется корона, соответствующая некоторому дополняемому главному фактору группы G. Множество всех корон группы G будем обозначать через $\mathrm{Cr}(G)$. Из леммы 1 и теоремы Жордана—Гёльдера следует, что для построения множества $\mathrm{Cr}(G)$ достаточно рассмотреть некоторый главный ряд группы G и выбрать в нём максимальную систему $H_1/K_1, \ldots, H_t/K_t$ попарно не G-изоморфных дополняемых главных факторов. Тогда

$$\mathrm{Cr}(G) = \{\mathrm{Cr}_G(H_1/K_1), \ldots, \mathrm{Cr}_G(H_t/K_t)\}.$$

Другие замечательные свойства корон установлены в [6]. Приведём их в следующей лемме. Напомним только, что если M — подгруппа, а H/K — нормальный фактор группы G, то говорят, что:

- M является дополнением для H/K в G, если $MH = G$ и $M \cap H = K$ (в этом случае H/K называется дополняемым фактором);
- M покрывает H/K, если $MK \supseteq H$;
- M изолирует H/K, если $M \cap H \subseteq K$.

Лемма 2. *Пусть H/K — дополняемый главный фактор конечной разрешимой группы G. Тогда*

1) *корона $\mathrm{Cr}_G(H/K)$ дополняема в G;*
2) *любые два дополнения короны $\mathrm{Cr}_G(H/K)$ являются сопряжёнными в G;*

3) *подгруппа B является дополнением короны $\mathrm{Cr}_G(H/K)$ тогда и только тогда, когда B изолирует все дополняемые главные факторы группы G, которые G-изоморфны H/K, и покрывает все остальные главные факторы группы G;*
4) *если заданный главный ряд группы G имеет m дополняемых главных факторов, G-изоморфных H/K, и если $M_1, \dots, M_m$ — максимальные подгруппы группы G, изолирующие различные и G-изоморфные H/K дополняемые главные факторы этого ряда, то $M_1 \cap \dots \cap M_m$ — дополнение короны $\mathrm{Cr}_G(H/K)$.*

Определение. Пусть G — конечная разрешимая группа,

$$\mathrm{Cr}(G) = \{\mathrm{Cr}_G(H_1/K_1), \dots, \mathrm{Cr}_G(H_t/K_t)\},$$

G_i — дополнение короны $\mathrm{Cr}_G(H_i/K_i)$ в группе G, $i = 1, \dots, t$. Тогда множество $\Sigma = \{G_1, \dots, G_t\}$ называется *гашюцевой системой* группы G, а подгруппа $N_G(\Sigma) = \bigcap\limits_{i=1}^{t} N_G(G_i)$ называется *нормализатором гашюцевой системы* Σ. Подгруппа $\bigcap\limits_{i=1}^{t} G_i$ называется *префраттиниевой подгруппой* (ассоциированной с Σ).

Если $\Sigma = \{G_1, \dots, G_t\}$, то через Σ^g будем обозначать систему подгрупп $\{G_1^g, \dots, G_t^g\}$. Системы Σ и Σ' называются сопряжёнными в G, если $\Sigma' = \Sigma^g$ для некоторого элемента $g \in G$.

Лемма 3. *Пусть H/K — дополняемый главный фактор конечной разрешимой группы G и B — дополнение короны $\mathrm{Cr}_G(H/K) = C_G(H/K)/R$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *подгруппа B либо самонормализуема, либо нормальна в G;*
2) *подгруппа B самонормализуема тогда и только тогда, когда фактор H/K эксцентрален в G;*
3) *подгруппа B нормальна в G тогда и только тогда, когда $H/K \subseteq Z(G/K)$;*
4) *если $B \trianglelefteq G$, то $B = R$ и $\mathrm{Cr}_G(H/K) = G/R$.*

Доказательство. Обозначим $C = C_G(H/K)$. Так как B — дополнение короны C/R, то $R \subseteq B$, $(C/R)(B/R) = G/R$ и $(C/R) \cap (B/R) = 1$.

Предположим, что B собственно содержится в $N_G(B)$. Тогда

$$N_{G/R}(B/R) \cap C/R = (N_G(B) \cap C)/R \neq 1.$$

Обозначим подгруппу $N_{G/R}(B/R) \cap C/R$ через N/R. Так как согласно лемме 1 подгруппа C/R группы G/R абелева, то

$$N_{G/R}(N/R) \supseteq \langle B/R, C/R \rangle = G/R,$$

т. е. $N/R \trianglelefteq G/R$. Пусть L/R — минимальная нормальная подгруппа группы G/R, содержащаяся в N/R. Так как $[N/R, B/R] = 1$, то $C_G(L/R) \supseteq B$. Кроме того, из абелевости фактора C/R следует, что $C_G(L/R) \supseteq C$. Поэтому $C_G(L/R) = G$. Ввиду леммы 1 любая минимальная нормальная подгруппа группы G/R G-изоморфна H/K. Отсюда следует, что $C = G$, а значит, H/K — центральный главный фактор группы G. Кроме того, так как B — дополнение короны $C/R = G/R$, то $B = R$. Следовательно, $B \trianglelefteq G$.

Итак, либо $N_G(B) = B$, либо $B \trianglelefteq G$. При этом если $B \trianglelefteq G$, то $B = R$, и $\mathrm{Cr}_G(H/K) = G/R$. Утверждения 1) и 4) доказаны.

Пусть теперь $H/K \subseteq Z(G/K)$. Тогда $\mathrm{Cr}_G(H/K) = G/R$, а значит, дополнение к G/R в G/R единично. Отсюда следует, что $B = R$ и $B \trianglelefteq G$. Утверждение 3) доказано.

Из 3) и 1) вытекает, что дополнение B самонормализуемо тогда и только тогда, когда H/K эксцентрален в G. □

Следуя [7], корону $\mathrm{Cr}_G(H/K)$ конечной разрешимой группы G, соответствующую дополняемому главному фактору H/K группы G, будем называть эксцентральной, если главный фактор H/K является эксцентральным в G. Если же $H/K \subseteq Z(G/K)$, то корону $\mathrm{Cr}_G(H/K)$ будем называть центральной.

Лемма 4. *Для конечной разрешимой группы G справедливы следующие утверждения*:

1) *G нильпотентна тогда и только тогда, когда она обладает единственной гашюцевой системой*;
2) *число гашюцевых систем ненильпотентной группы G равно произведению порядков всех её эксцентральных корон.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Если группа G нильпотентна, то все её главные факторы центральны. Поэтому согласно лемме 3 $\mathrm{Cr}(G) = \{G/R_1, \ldots, G/R_t\}$, а значит, $\{R_1, \ldots, R_t\}$ — единственная гашюцева система группы G.

Отметим, что если Σ — гашюцева система группы G, то для любого элемента $g \in G$ система Σ^g также является гашюцевой. Поэтому если Σ — единственная гашюцева система группы G, то $\Sigma^g = \Sigma$ для любого элемента $g \in G$. Следовательно, в этом случае дополнения всех корон группы G нормальны в G. Отсюда согласно лемме 3 получаем, что все короны группы G центральны в G. А так как класс всех конечных нильпотентных групп является насыщенной формацией, то G — нильпотентная группа.

Докажем второе утверждение. Пусть $\{\mathrm{Cr}_G(H_1/K_1), \ldots, \mathrm{Cr}_G(H_t/K_t)\} = \mathrm{Cr}(G)$ и $\Sigma = \{G_1, \ldots, G_t\}$ — гашюцева система группы G. Если n_i — число всех дополнений короны $\mathrm{Cr}_G(H_i/K_i)$, то из определения гашюцевой системы следует, что число всех гашюцевых систем группы G равно $n_1 \cdots n_t$. Так как ввиду леммы 2 все дополнения короны $\mathrm{Cr}_G(H_i/K_i)$ группы G являются сопряжёнными, а G_i — один из представителей этого класса сопряжённых дополнений, то для любого $i = 1, \ldots, t$ справедливо равенство $n_i = |G : N_G(G_i)|$. Поэтому число всех гашюцевых систем группы равно

$$|G : N_G(G_1)| \cdot \ldots \cdot |G : N_G(G_t)|.$$

Если корона $\mathrm{Cr}_G(H_i/K_i)$ центральна, то ввиду леммы 3 $G_i \trianglelefteq G$. Следовательно, в этом случае $|G : N_G(G_i)| = 1$. Если же корона $\mathrm{Cr}_G(H_i/K_i)$ эксцентральна, то согласно лемме 3 имеем $N_G(G_i) = G_i$. А так как G_i — дополнение короны $\mathrm{Cr}_G(H_i/K_i) = C_G(H_i/K_i)/R_i$ в группе G, то

$$|G : N_G(G_i)| = |G : G_i| = |G/R_i : G_i/R_i| = |C_G(H_i/K_i)/R_i| = |\mathrm{Cr}_G(H_i/K_i)|. \quad \square$$

Теорема 1. *Любые две гашюцевы системы конечной разрешимой группы G являются сопряжёнными.*

Доказательство. Пусть Σ и Σ' — гашюцевы системы группы G, и пусть A — множество всех гашюцевых систем группы G. Определим действие группы G на множестве A сопряжением. Тогда, очевидно, A является G-множеством. Пусть Ω — орбита, содержащая систему Σ. Ясно, что $|A| = |G : N|$, где $N = \{g \in G \mid \Sigma^g = \Sigma\}$ — стабилизатор системы Σ. Пусть $\Sigma = \{G_1, \ldots, G_t\}$. Тогда

$$N = N_G(\Sigma) = \bigcap_{i=1}^{t} N_G(G_i).$$

Ввиду леммы 3 для любого $i = 1, \ldots, t$ либо $N_G(G_i) = G_i$, либо $G_i \trianglelefteq G$. Будем считать, что $N_G(G_1) = G_1, \ldots, N_G(G_k) = G_k$, $N_G(G_{k+1}) = \ldots = N_G(G_t) = G$. Тогда либо $N = G$ (если G нильпотентна), либо $N = G_1 \cap \ldots \cap G_k$ (если G ненильпотентна).

Если группа G нильпотентна, то ввиду утверждения 1) леммы 4 группа G обладает единственной гашюцевой системой. Поэтому в этом случае утверждение теоремы очевидно.

Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда ввиду леммы 2

$$|G : N| = |G : G_1 \cap \ldots \cap G_k| = |G : G_1| \cdot \ldots \cdot |G : G_k|.$$

Отсюда и из леммы 4 следует, что $|\Omega| = |A|$, а значит, $\Omega = A$. В частности, система Σ' содержится в G-орбите системы Σ. Следовательно, найдётся такой элемент $g \in G$, что $\Sigma' = \Sigma^g$. $\square$

Пусть $\mathfrak{N}$ — класс всех конечных нильпотентных групп, и пусть G — конечная разрешимая группа, в главных рядах которой есть ровно n дополняемых эксцентральных главных факторов. Следуя [7], будем говорить, что H — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G, если для любого главного ряда группы G найдутся такие максимальные подгруппы $M_1, \ldots, M_n$, изолирующие различные дополняемые эксцентральные факторы этого ряда, что $H = M_1 \cap \ldots \cap M_n$ (если в G нет дополняемых эксцентральных главных факторов, т. е. G нильпотентна, то $\mathfrak{N}$-префраттиниевой подгруппой группы G считается сама G).

Следующая лемма описывает основные свойства $\mathfrak{N}$-префраттиниевых подгрупп (см. [4, 7]).

Лемма 5. *Пусть H — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа конечной разрешимой группы G. Тогда*

1) *любая $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G является сопряжённой с H;*

2) *H изолирует все дополняемые эксцентральные главные факторы и покрывает все остальные главные факторы группы G;*
3) *если $N \trianglelefteq G$, то HN/N — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G/N.*

Теорема 2. *В каждой конечной разрешимой группе множество нормализаторов гашюцевых систем совпадает с множеством $\mathfrak{N}$-префраттиниевых подгрупп.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Cr}(G) = \{\mathrm{Cr}_G(H_1/K_1), \ldots, \mathrm{Cr}_G(H_t/K_t)\}$ и $\Sigma = \{B_1, \ldots, B_t\}$ — гашюцева система конечной разрешимой группы G.

Положим $H = N_G(\Sigma)$. Если все короны группы G центральны, то G нильпотентна и ввиду леммы 4 мы имеем $N_G(\Sigma) = G$. В этом случае $H = G$ — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G.

Будем полагать далее, что короны $\mathrm{Cr}_G(H_1/K_1), \ldots, \mathrm{Cr}_G(H_s/K_s)$ эксцентральны, а короны $\mathrm{Cr}_G(H_{s+1}/K_{s+1}), \ldots, \mathrm{Cr}_G(H_t/K_t)$ центральны. Ввиду леммы 3 подгруппа H представима в виде $H = B_1 \cap \ldots \cap B_s$. В силу утверждений 2) и 4) леммы 2 для каждого $i = 1, \ldots, s$ найдутся максимальные подгруппы $M_{i1}, \ldots, M_{im_i}$ группы G, такие что $B_i = M_{i1} \cap \ldots \cap M_{im_i}$, причём подгруппы $M_{i1}, \ldots, M_{imi_1}$ изолируют различные и G-изоморфные H_i/K_i дополняемые главные факторы некоторого главного ряда группы G, а m_i — это число всех G-изоморфных H_i/K_i дополняемых главных факторов этого ряда.

Так как главные факторы $H_1/K_1, \ldots, H_s/K_s$ эксцентральны, то ввиду [3, теорема 13.4] мы получаем, что

$$H = B_1 \cap \ldots \cap B_s = (M_{11} \cap \ldots \cap M_{1m_1}) \cap \ldots \cap (M_{s1} \cap \ldots \cap M_{sm_s}) \text{ —}$$

$\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G.

Пусть теперь D — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G. Тогда по определению найдутся такие максимальные подгруппы $M_1, \ldots, M_n$ группы G, изолирующие различные дополняемые эксцентральные главные факторы некоторого главного ряда h группы G, что $D = M_1 \cap \ldots \cap M_n$ (если G нильпотентна, то ввиду леммы 4 она обладает единственной нормальной гашюцевой системой Σ, и тогда $D = G = N_G(\Sigma)$).

Пусть $\{H_1/K_1, \ldots, H_s/K_s\}$ — максимальное множество попарно не G-изоморфных дополняемых эксцентральных главных факторов главного ряда h. На множестве $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ определим отношение ρ следующим образом: $(M_i, M_j) \in \rho$ тогда и только тогда, когда M_1 и M_2 изолируют G-изоморфные главные факторы ряда h. Очевидно, ρ — отношение эквивалентности. Оно разбивает множество $\mathcal{M}$ на непересекающиеся классы $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_s$, причём ввиду леммы 2 подгруппа $B_i = \bigcap\{M \mid M \in \mathcal{M}_i\}$ является дополнением эксцентральной короны $\mathrm{Cr}_G(H_i/K_i)$, $i = 1, \ldots, s$. Пусть $B_{s+1}, \ldots, B_t$ — произвольные дополнения центральных корон $\mathrm{Cr}_G(H_{s+1}/K_{s+1}), \ldots, \mathrm{Cr}_G(H_t/K_t)$ соответственно. Пусть $\Sigma = \{B_1, \ldots, B_t\}$. Ввиду леммы 3 $N_G(B_1) = B_1, \ldots, N_G(B_s) = B_s$, $N_G(B_{s+1}) = G, \ldots, N_G(B_t) = G$. Отсюда окончательно получаем

$$D = M_1 \cap \ldots \cap M_n = B_1 \cap \ldots \cap B_s = \bigcap_{i=1}^{t} N_G(B_i) = N_G(\Sigma). \qquad \square$$

Лемма 6. *Пусть* $\mathrm{Cr}(G) = \mathrm{Cr}_G(H_1/K_1), \ldots, \mathrm{Cr}_G(H_t/K_t)$ — *множество всех корон конечной разрешимой группы* G, *причём короны* $\mathrm{Cr}_G(H_1/K_1), \ldots, \mathrm{Cr}_G(H_s/K_s)$ *эксцентральны, а короны* $\mathrm{Cr}_G(H_{s+1}/K_{s+1}), \ldots, \mathrm{Cr}_G(H_t/K_t)$ *центральны. Пусть* $\Sigma = \{B_1, \ldots, B_t\}$ — *гашюцева система группы* G, *где* B_i — *дополнение короны* $\mathrm{Cr}_G(H_i/K_i)$, $i = 1, \ldots, t$. *Пусть*

$$A_i = B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1} \cap B_{i+1} \cap \ldots \cap B_t, \quad i = 1, 2, \ldots, t,$$

и пусть B — *префраттиниева подгруппа, ассоциированная с* Σ.

1. *Для всех* $i \neq j$ *из* $\{1, \ldots, t\}$ *справедливы следующие утверждения*:
   1.1) $B_1 \cap \ldots \cap B_i = A_{i+1} \ldots A_t$;
   1.2) $A_i A_j = A_j A_i$;
   1.3) $A_i \cap A_j = B$;
   1.4) *подгруппа* A_i *покрывает все фраттиниевы и все дополняемые главные факторы группы* G, *которые* G-*изоморфны* H_i/K_i, *и изолируют все остальные главные факторы группы* G.
2. *Если* G *ненильпотентна, то справедливы следующие утверждения:*
   2.1) $N_G(\Sigma)$ *нормализует каждую из подгрупп* A_i *и* B_i, $i = 1, \ldots, t$;
   2.2) $B \trianglelefteq N_G(\Sigma)$;
   2.3) $N_G(\Sigma)/B = A_{s+1}/B \times \ldots \times A_t/B$;
   2.4) $A_1 \cdots A_s$ — $\mathfrak{F}$-*корадикал группы* G, *где* $\mathfrak{F} = QR_0(\mathbb{Z}_p \mid p \in \mathbb{P})$;
   2.5) $N_G(\Sigma)/B \simeq G/G^{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. Утверждение 1 доказано в [1]. Докажем утверждение 2. Так как G ненильпотентна, то она обладает по крайней мере одной эксцентральной короной. То, что $N_G(\Sigma)$ нормализует B_i для любого $i = 1, \ldots, t$, следует из определения $N_G(\Sigma)$. Если $x \in N_G(\Sigma)$, то

$$A_i^x = B_1^x \cap \ldots \cap B_{i-1}^x \cap B_{i+1}^x \cap \ldots \cap B_t^x = A_i,$$

т. е. $x \in N_G(A_i)$, а значит, $N_G(\Sigma) \subseteq N_G(A_i)$ для всех $i = 1, \ldots, t$. Аналогично показывается, что $N_G(\Sigma)$ нормализует подгруппу B. Кроме того, согласно лемме 3

$$B \subseteq B_1 \cap \ldots \cap B_s = N_G(\Sigma).$$

Значит, $B \trianglelefteq N_G(\Sigma)$. Утверждения 2.1) и 2.2) доказаны.

Ввиду утверждения 1

$$N_G(\Sigma) = B_1 \cap \ldots \cap B_s = A_{s+1} \ldots A_t$$

и $A_i \cap A_j = B$ для всех $i \neq j$ из $\{1, \ldots, t\}$. Поэтому $N_G(\Sigma)/B = (A_{s+1}/B) \cdots (A_t/B)$ и $(A_i/B) \cap (A_j/B) = 1$ для всех $i \neq j$ из $\{s+1, \ldots, t\}$. Кроме того, согласно утверждению 2.1) $A_i/B \trianglelefteq N_G(\Sigma)/B$ для всех $i = s+1, \ldots, t$. Следовательно, $N_G(\Sigma)/B = A_{s+1}/B \times \ldots \times A_t/B$. Утверждение 2.3) доказано.

Ввиду утверждения 1 G представима в виде

$$G = A_1 \cdots A_t = (A_1 \cdots A_s)(A_{s+1} \cdots A_t) = (A_1 \cdots A_s) N_G(\Sigma).$$

Согласно утверждению 2.1) $N_G(\Sigma)$ нормализует подгруппу $A_1 \cdots A_s$. Поэтому $A_1 \cdots A_s \trianglelefteq G$. Теперь согласно утверждению 1 имеем

$$G/A_1 \cdots A_s \simeq A_{s+1} \cdots A_t / A_1 \cdots A_s \cap A_{s+1} \cdots A_t = \\ = N_G(\Sigma)/(B_1 \cap \ldots \cap B_s) \cap (B_{s+1} \cap \ldots \cap B_t) = N_G(\Sigma)/B.$$

Согласно 3.3) $N_G(\Sigma)/B \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G/A_1 \cdots A_s \in \mathfrak{F}$, а значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq A_1 \cdots A_s$.

Предположим, что $G^{\mathfrak{F}} \subset A_1 \cdots A_s$. Пусть $A_1 \cdots A_s/R$ — такой главный фактор группы G, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq R$. Из строения формации $\mathfrak{F}$ следует, что фактор $A_1 \cdots A_s/R$ дополняем и централен в G. Однако ввиду утверждения 1 $A_1 \cdots A_s$ изолирует все дополняемые центральные главные факторы группы G, а потому $A_1 \cdots A_s \subseteq R$. Пришли к противоречию. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} = A_1 \cdots A_s$ и $N_G(\Sigma)/B \simeq G/G^{\mathfrak{F}}$. □

Теорема 3. *Пусть Σ — гашюцева система конечной разрешимой группы G, W — префраттиниева подгруппа группы G, ассоциированная с Σ. Тогда в G найдётся системный нормализатор H, такой что $N_G(\Sigma) = HW$, причём $N_G(\Sigma)/W \simeq \simeq H/H \cap W \simeq G/G^{\mathfrak{F}}$, где $\mathfrak{F} = DR_0(\mathbb{Z}_p \mid p \in \mathbb{P})$.*

Доказательство. Известно (см. [4, 7]), что $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа A группы G представима в виде $A = HW$, где H — системный нормализатор, а W — префраттиниева подгруппа группы G. Остаётся применить теорему 2 и лемму 6. □

Литература

[1] Каморников С. Ф. О префраттиниевых подгруппах конечных разрешимых групп // Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49, № 2. — С. 1310—1318.

[2] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978.

[3] Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. — М.: Наука, 1989.

[4] Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of Finite Groups. — Dordrecht: Springer, 2006.

[5] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. — Berlin: Walter de Gruyter, 1992.

[6] Gaschütz W. Praefrattinigruppen // Arch. Math. — 1962. — Bd. 13, No. 3. — S. 418—426.

[7] Hawkes T. O. Analogues of prefrattini subgroups // Proc. Int. Conf. Theory of Groups. Australian Nat. Univ., Canberra, 1965. — New York: Gordon and Breach, 1967. — P. 145—150.