# О нижнем слабо разрешимом $l$-радикале решёточно упорядоченных алгебр Ли

**Ю. В. КОЧЕТОВА**
*Московский педагогический государственный университет*

УДК 512.554.3

**Ключевые слова:** решёточно упорядоченная алгебра Ли, первичный радикал, нижний слабо разрешимый $l$-радикал.

**Аннотация**

В теории алгебр Ли изучается понятие нижнего слабо разрешимого радикала. В работе рассматривается возможность обобщения этого понятия на класс $l$-алгебр Ли над частично упорядоченным полем. В статье введено понятие нижнего слабо разрешимого $l$-радикала $l$-алгебры Ли и рассмотрены его свойства, а также получены условия его совпадения с $l$-первичным радикалом $l$-алгебры Ли.

**Abstract**

*J. V. Kochetova, On the lower weakly solvable l-radical of lattice ordered Lie algebras*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 8, pp. 137—149.

The concept of the lower weakly solvable radical of Lie algebras is important in the study of Lie algebras. The purpose of this paper is to investigate the generalization of this concept to lattice ordered Lie algebras over partially ordered fields. Some results concerning properties of the lower weakly solvable $l$-radical of lattice ordered Lie algebras are obtained. Necessary and sufficient conditions for the $l$-prime radical of a Lie $l$-algebra to be equal to the lower weakly solvable $l$-radical of the Lie $l$-algebra are presented.

## 1. Введение

Вопрос об изучении нижнего слабо разрешимого $l$-радикала решёточно упорядоченных алгебр Ли возник у автора в связи с исследованием в работе [5] $l$-первичного радикала $l$-алгебр Ли над частично упорядоченным полем.

Важное место в изучении первичного радикала алгебр Ли занимает нижний слабо разрешимый радикал, так как первичный радикал произвольной алгебры Ли над полем совпадает с её нижним слабо разрешимым радикалом (см. [8, теорема 2.3.3]). Поэтому возникает естественный вопрос о введении понятия нижнего слабо разрешимого $l$-радикала $l$-алгебры Ли над частично упорядоченным полем, а также о возможности распространения результатов, касающихся нижнего слабо разрешимого радикала, на решёточно упорядоченные алгебры Ли.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2008, том 14, № 8, с. 137—149.

В данной статье введено понятие нижнего слабо разрешимого $l$-радикала решёточно упорядоченной алгебры Ли, изучены его свойства, а также получены условия его совпадения с $l$-первичным радикалом $l$-алгебры Ли.

Понятие частично упорядоченной алгебры Ли над частично упорядоченным полем было введено В. М. Копытовым [1].

**Определение 1.** Решёточно упорядоченной алгеброй Ли $L$ над частично упорядоченным полем $K$ называется алгебра Ли над полем $K$, на которой задано такое отношение порядка $\leqslant$, что

1) $\langle L; +; 0; -; \leqslant\rangle$ — решёточно упорядоченная группа [2];
2) для любых элементов $x, y \in L$, $\lambda \in K$ из неравенств $x \leqslant y$, $\lambda \geqslant 0$ следует $\lambda x \leqslant \lambda y$;
3) для любых элементов $x, y, z \in L$ из неравенства $x \leqslant y$ следует неравенство $x + [x, z] \leqslant y + [y, z]$.

Напомним, что *идеалом* в алгебре Ли $L$ называется такое подпространство $J$ в $L$, что из $x \in L$, $y \in J$ следует, что $[x, y] \in J$. Идеал $J$ частично упорядоченной алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем $K$ называется *выпуклым*, если $J$ — выпуклое подмножество в $L$. Выпуклый идеал $l$-алгебры Ли, являющийся подрешёткой этой алгебры, называется *$l$-идеалом* [2, 3].

По аналогии с определением разрешимого идеала алгебры Ли (см., например, [8, с. 30]) сформулируем определение $l$-разрешимого $l$-идеала $l$-алгебры Ли.

**Определение 2.** $l$-идеал $J$ решёточно упорядоченной алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем называется $l$-разрешимым $l$-идеалом, если существует цепочка идеалов $J \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_k = \{0\}$, в которой $J_{i+1}$ является $l$-идеалом в $J_i$, а фактор-алгебры $J_i/J_{i+1}$ абелевы.

Как и при построении нижнего ниль-радикала в ассоциативных алгебрах, обозначим через $\mathfrak{N}(L)$ сумму всех $l$-разрешимых $l$-идеалов $l$-алгебры Ли $L$. Будем называть $\mathfrak{N}(L)$ *$l$-радикалом* $l$-алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем по аналогии с тем, как это делается в $l$-кольцах. Таким образом, $\mathfrak{N}(L)$ — идеал, порождённый множеством $\{J_\alpha \mid \alpha \in I\}$ всех $l$-разрешимых $l$-идеалов из $L$, который по [3, теорема 1] является $l$-идеалом в $L$ и состоит из всевозможных конечных сумм вида $x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k}$, где $x_{\alpha_k} \in J_{\alpha_k}$ и $\alpha_k \in I$.

В разделе 2 изучены свойства $l$-разрешимых $l$-идеалов решёточно упорядоченных алгебр Ли над частично упорядоченным полем. В частности, приведено доказательство следующего утверждения.

**Предложение 1.** *Каждый $l$-разрешимый $l$-идеал $l$-алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем содержится в $l$-первичном радикале $l\text{-}\mathrm{rad}(L)$ $l$-алгебры Ли $L$.*

В разделе 2 также описываются свойства $l$-радикала $l$-алгебр Ли над частично упорядоченным полем. Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

**Теорема 1.** *$l$-радикал $\mathfrak{N}(L)$ $l$-алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем равен пересечению всех $l$-первичных $l$-идеалов $l$-алгебры Ли $L$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}(L)\big) = \{0\}$.*

В разделе 3 введено понятие нижнего слабо разрешимого $l$-радикала $l$-алгебры Ли над частично упорядоченным полем и описаны его свойства. В этом разделе, в частности, получена теорема о совпадения $l$-первичного радикала $l$-алгебры Ли с её нижним слабо разрешимым $l$-радикалом.

**Теорема 2.** *В любой решёточно упорядоченной алгебре Ли $L$ над направленным полем $K$ нижний слабо разрешимый $l$-радикал $\mathfrak{B}(L)$ совпадает с $l$-первичным радикалом $l\text{-}\mathrm{rad}(L)$.*

В статье используется общепринятая терминология для частично упорядоченных алгебраических систем (см. [2, 9]).

## 2. $l$-радикал $l$-алгебры Ли

В данном разделе изучаются свойства $l$-разрешимых $l$-идеалов $l$-алгебр Ли над частично упорядоченным полем, в частности взаимосвязь $l$-полупервичности $l$-алгебры Ли с наличием в этой $l$-алгебре Ли $l$-разрешимых $l$-идеалов. Также в этом разделе исследуются свойства $l$-радикала $l$-алгебр Ли.

Напомним, что алгебра Ли называется *полупервичной*, если она не содержит ненулевых абелевых идеалов (см., например, [8, с. 40]). По аналогии с данным определением сформулируем определения $l$-полупервичной $l$-алгебры Ли и $l$-полупервичного идеала.

**Определение 3.** $l$-алгебра Ли $L$ над частично упорядоченным полем $K$ называется $l$-полупервичной, если она не содержит ненулевых абелевых $l$-идеалов, т. е. для любого $l$-идеала $I \neq \{0\}$ в $L$ верно соотношение $[I, I] \neq \{0\}$.

**Определение 4.** $l$-идеал $P$ решёточно упорядоченной алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем $K$ называется $l$-полупервичным идеалом, если фактор-алгебра $L/P$ является $l$-полупервичной $l$-алгеброй Ли.

Известно, что каждый ненулевой разрешимый идеал алгебры Ли содержит ненулевой абелев идеал [8, с. 40]. Поэтому условие полупервичности алгебры Ли эквивалентно отсутствию в ней ненулевых разрешимых идеалов.

Аналогичное утверждение имеет место и для решёточно упорядоченных алгебр Ли.

**Лемма 1.** *Каждый ненулевой $l$-разрешимый $l$-идеал $l$-алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем $K$ содержит ненулевой абелев $l$-идеал.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный ненулевой $l$-разрешимый $l$-идеал $I$ решёточно упорядоченной алгебры Ли $L$. По определению 2 в $I$ найдётся ряд $l$-идеалов $l$-алгебры Ли $L$

$$I \supseteq I_1 \supseteq \ldots \supseteq I_{k-1} \supseteq I_k = \{0\},$$

в котором каждая фактор-алгебра $I_j/I_{j+1}$ абелева. В частности, абелевой является фактор-алгебра $I_{k-1}/I_k = I_{k-1}/\{0\}$, следовательно, ненулевой $l$-идеал $I_{k-1}$ абелев, при этом $I_{k-1} \subseteq I$. □

Благодаря доказанной лемме можно сформулировать определение $l$-полупервичной $l$-алгебры Ли, эквивалентное данному ранее определению 3.

**Определение 5.** Решёточно упорядоченная алгебра Ли $L$ над частично упорядоченным полем $K$ называется $l$-полупервичной, если она не содержит ненулевых $l$-разрешимых $l$-идеалов.

Поскольку понятие первичного радикала алгебры Ли тесно связано с понятием первичной алгебры Ли (см., например, [8]), то при изучении $l$-первичного радикала $l$-алгебр Ли автором было введено понятие $l$-первичной решёточно упорядоченной алгебры Ли — аналог понятия первичной алгебры Ли.

**Определение 6.** *$l$-первичной* решёточно упорядоченной алгеброй Ли $L$ над частично упорядоченным полем будем называть такую $l$-алгебру Ли, в которой произведение

$$[I, J] = \left\{ z \in L \;\middle|\; z = \sum_{i=1}^{n=n(z)} [x_i, y_i],\ x_i \in I,\ y_i \in J \right\}$$

любых двух её ненулевых $l$-идеалов $I$ и $J$ отлично от нуля.

Напомним, что $l$-идеал $P$ решёточно упорядоченной алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем $K$ называется *$l$-первичным идеалом*, если фактор-алгебра $L/P$ является $l$-первичной $l$-алгеброй Ли над частично упорядоченным полем $K$ [4]. *$l$-первичным радикалом* $l\text{-}\mathrm{rad}(L)$ $l$-алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем называется пересечение всех $l$-первичных $l$-идеалов из $L$ [5].

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения, доказанные в [6].

**Предложение 2 [6, теорема 25; 7, теорема 3].** *Пусть $I$ — $l$-идеал $l$-алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем $K$. Полный прообраз любого $l$-идеала $\bar{J}$ фактор-алгебры $L/I$ при каноническом гомоморфизме $\varepsilon\colon L \to L/I$ является $l$-идеалом $l$-алгебры Ли $L$.*

**Предложение 3 [6, теорема 13].** *Пусть $L$ — $l$-алгебра Ли над частично упорядоченным полем $K$, $I$ и $A$ — $l$-идеалы $l$-алгебры Ли $L$. Тогда множество $\bar{A} = \{T \in L/I \mid T \cap A \neq \varnothing\}$ является $l$-идеалом фактор-алгебры $L/I$.*

Далее будем использовать введённое в [4,5] обозначение $I_a$ для наименьшего $l$-идеала $l$-алгебры Ли $L$, содержащего элемент $a \in L$.

Рассмотрим утверждение, касающееся $l$-полупервичных идеалов $l$-алгебр Ли и необходимое нам для дальнейшего изложения.

**Лемма 2.** *Если $J$ — $l$-полупервичный $l$-идеал $l$-алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем $K$ и $l$-идеал $A$ алгебры $L$ строго содержит $J$, то в $L$ существует такой $l$-первичный $l$-идеал $P$, что $P \supseteq J$ и $P \not\supseteq A$.*

**Доказательство.** Так как $A \supset J$, то $A \setminus J \neq \varnothing$, поэтому найдётся такой элемент $b \in A$, что $b \notin J$. Рассмотрим элемент $b_0 = b$. Допустим, что $\left(I_{b_0}\right)^2 \subseteq J$. По предложению 3 найдётся $l$-идеал $\bar{I}_{b_0}$ в $L/J$, соответствующий $l$-идеалу $I_{b_0}$, при этом

$$[\bar{I}_{b_0}, \bar{I}_{b_0}] = \left\{ t = \sum_{i=1}^{n(t)} [x_j + J, y_j + J] \;\Big|\; x_j, y_j \in I_{b_0} \right\}.$$

Так как для любых элементов $x, y \in I_{b_0}$ выполнено равенство

$$[x + J, y + J] = [x, y] + [x, J] + [J, y] + [J, J]$$

и при этом $[x, J], [J, y], [J, J] \subseteq J$ и $[x, y] \subseteq \left(I_{b_0}\right)^2 \subseteq J$, то $\left(\bar{I}_{b_0}\right)^2 \subseteq J$. Таким образом, $l$-идеал $\bar{I}_{b_0}$ является абелевым $l$-идеалом в $L/J$. В силу $l$-полупервичности фактор-алгебры $L/J$ по определению 3 имеем $\bar{I}_{b_0} = J$. Следовательно, $I_{b_0} = J$, и поэтому $b_0 \in J$, что противоречит условию $b \notin J$. Значит, $\left(I_{b_0}\right)^2 \nsubseteq J$.

Пусть $b_1 \in \left(I_{b_0}\right)^2 \setminus J$. Так как $b_1 \notin J$, то, аналогично тому, как это было сделано выше, доказывается, что $\left(I_{b_1}\right)^2 \nsubseteq J$. Выберем элемент $b_2 \in \left(I_{b_1}\right)^2 \setminus J$ и т. д. Построим последовательность $\{b_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, начинающуюся с элемента $b_0 = b$, ни один элемент $b_i \in \left(I_{b_{i+1}}\right)^2$ которой не принадлежит $l$-идеалу $J$, т. е. $b_i \notin J$.

Рассмотрим максимальный $l$-идеал $P$, такой что $P \supseteq J$ и $P$ не содержит ни одного элемента построенной последовательности. $l$-идеал $P$ существует согласно лемме Цорна. Покажем, что $l$-идеал $P$ является $l$-первичным в $L$. Для этого нужно доказать, что фактор-алгебра $L/P$ $l$-первична, поэтому рассмотрим такие $l$-идеалы $\bar{U}$, $\bar{V}$ в $L/P$, что $\bar{U} \neq P$, $\bar{V} \neq P$. Им по предложению 2 соответствуют $l$-идеалы $U$, $V$ в $L$. Если $U = \{a \in L \mid a + P \in \bar{U}\} \subseteq P$, то $\bar{U} \subseteq P$, что противоречит выбору $l$-идеала $\bar{U} \neq P$. Таким образом, $U \nsubseteq P$ и аналогично $V \nsubseteq P$. Следовательно, $U + P \supset P$ и $V + P \supset P$. Отсюда согласно максимальности $l$-идеала $P$ относительно свойства $P \cap \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$ следует, что существуют такие элементы $b_k$ и $b_t$ рассматриваемой последовательности, что $b_k \in U + P$ и $b_t \in V + P$. Пусть для определённости $k \leqslant t$. Так как $b_k \in U + P$, то

$$b_{k+1} \in \left(I_{b_k}\right)^2 \subseteq [U + P, U + P] \subseteq U + P,$$

поэтому $b_{k+1} \in U + P$. Аналогично получаем, что $b_t \in U + P$. Следовательно,

$$b_{t+1} \in \left(I_{b_t}\right)^2 \subseteq [U + P, V + P] \subseteq [U, V] + P.$$

Так как $b_{t+1} \notin P$, то $[U, V] \nsubseteq P$. Применяя далее предложение 3, имеем $[\bar{U}, \bar{V}] \nsubseteq P$. По определению 6 фактор-алгебра $L/P$ является $l$-первичной $l$-алгеброй Ли, что влечёт $l$-первичность $l$-идеала $P$.

Итак, в $L$ существует такой $l$-первичный $l$-идеал $P$, что $P \supseteq J$ и $b \notin P$. Так как $b \notin P$ и $b \in A$, то $P \not\supseteq A$. ☐

Нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [5].

**Предложение 4 [5].** *Если $L$ — $l$-алгебра Ли над частично упорядоченным полем $K$, $l\text{-rad}(L)$ — её $l$-первичный радикал и $a \in L$, то $a \in l\text{-rad}(L)$ тогда и только тогда, когда в любой последовательности $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, где $a_0 = |a|$, $a_{i+1} \in [I_{a_i}, I_{a_i}]$, начиная с некоторого места все элементы равны нулю.*

Используя приведённое поэлементное описание $l$-первичного радикала $l$-алгебры Ли, можно доказать свойство $l$-разрешимых $l$-идеалов $l$-алгебры Ли $L$, сформулированное в предложении 1.

**Доказательство предложения 1.** Пусть $A$ — $l$-разрешимый $l$-идеал решёточно упорядоченной алгебры Ли $L$. Тогда по определению 2 в $L$ существует цепочка идеалов

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_{k-1} \supset A_k = \{0\},$$

в которой $A_{i+1}$ является $l$-идеалом для $A_i$, а фактор-алгебры $A_i/A_{i+1}$ абелевы. Отсюда, в частности, следует, что $A_i$ — $l$-идеал для $A$. Рассмотрев произвольные элементы $c_i, d_i \in A_i$, из абелевости фактор-алгебры $A_i/A_{i+1}$ получаем, что

$$[c_i + A_{i+1}, d_i + A_{i+1}] = [c_i, d_i] + A_{i+1} = A_{i+1},$$

откуда следует включение $[A_i, A_i] \subseteq A_{i+1}$.

Рассмотрим произвольный элемент $x \in A$ и покажем, что $x \in l\text{-rad}(L)$. Для этого возьмём произвольную последовательность $\{x_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $x_0 = |x|$ и $x_{i+1} \in [I_{x_i}, I_{x_i}]$. Так как $x \in A$ и $A$ является $l$-идеалом в $L$, то $x_0 = |x| \in A$, и поэтому $I_{x_0} \subseteq A$. Исходя из доказанного выше, заключаем, что $[I_{x_0}, I_{x_0}] \subseteq [A, A] \subseteq A_1$. Следовательно,

$$x_1 \in [I_{x_0}, I_{x_0}] \subseteq A_1.$$

Тогда для $l$-идеала $A_1$ имеет место соотношение $I_{x_1} \subseteq A_1$. Так как по доказанному выше $[A_1, A_1] \subseteq A_2$, то

$$x_2 \in [I_{x_1}, I_{x_1}] \subseteq [A_1, A_1] \subseteq A_2.$$

Продолжая подобным образом, получим, что $x_{k-1} \in A_{k-1}$ и $x_k \in A_k = \{0\}$. Поскольку рассматриваемая последовательность содержит нуль, то по предложению 4 $x \in l\text{-rad}(L)$. Таким образом, $A \subseteq l\text{-rad}(L)$. $\square$

Из доказанного предложения вытекает следующее утверждение, описывающее взаимосвязь $l$-радикала и $l$-первичного радикала $l$-алгебры Ли.

**Следствие 1.** *Для любой решёточно упорядоченной алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем выполняется включение*

$$\mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-rad}(L).$$

**Доказательство.** Пусть $\{J_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — множество всех $l$-разрешимых $l$-идеалов решёточно упорядоченной алгебры Ли $L$. Из предложения 1 известно, что каждый $l$-разрешимый $l$-идеал $J_\alpha$ $l$-алгебры Ли $L$ содержится в $l$-первичном радикале $l\text{-rad}(L)$ $l$-алгебры Ли $L$. Поэтому любая конечная сумма вида

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k},$$

где $x_{\alpha_k} \in J_{\alpha_k}$, также принадлежит $l$-первичному радикалу $l\text{-rad}(L)$. Отсюда по определению $l$-радикала $l$-алгебры Ли $L$ следует, что сумма всех $l$-разрешимых $l$-идеалов из $L$ содержится в $l$-первичном радикале, т. е. $\mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-rad}(L)$. □

Путём несложных рассуждений, используя [2, гл. II, § 3, теорема 3], можно доказать, что верно следующее утверждение.

**Предложение 5.** *Пусть $L$ и $L_1$ — $l$-алгебры Ли над частично упорядоченным полем $K$ и $\varphi$ — $l$-эпиморфизм из $L$ в $L_1$. Тогда для любого $l$-идеала $I_1$ из $L_1$ и его полного прообраза $I$ из $L$ фактор-алгебры $L/I$ и $L_1/I_1$ $l$-изоморфны.*

С использованием этого утверждения доказывается следующее свойство $l$-радикала $l$-алгебр Ли.

**Предложение 6.** *Пусть $L$ — решёточно упорядоченная алгебра Ли над частично упорядоченным полем $K$ и $\mathfrak{N}(L)$ — сумма всех её $l$-разрешимых $l$-идеалов. $l$-идеал $P$ $l$-алгебры Ли $L$ является $l$-первичным в $L$ тогда и только тогда, когда $l$-идеал $\bar{P} = P/\mathfrak{N}(L)$ является $l$-первичным идеалом в $\bar{L} = L/\mathfrak{N}(L)$.*

**Доказательство.** Если $P$ — произвольный $l$-первичный идеал $l$-алгебры Ли $L$, то по следствию 1 имеем включение $\mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-rad}(L) \subseteq P$, из которого следует, что $\mathfrak{N}(L)$ является $l$-идеалом в $P$. Поэтому можно рассмотреть фактор-алгебру

$$\bar{P} = P/\mathfrak{N}(L) = \{a + \mathfrak{N}(L) \mid a \in P\},$$

которая является по предложению 3 $l$-идеалом в $\bar{L} = L/\mathfrak{N}(L)$, при этом $\bar{L} = L/\mathfrak{N}(L)$ является по [6, теорема 10] $l$-алгеброй Ли над частично упорядоченным полем $K$.

Докажем, что фактор-алгебры $L/P$ и $\bar{L}/\bar{P} = \big(L/\mathfrak{N}(L)\big)/\big(P/\mathfrak{N}(L)\big)$ изоморфны. Для этого рассмотрим решёточно упорядоченные алгебры Ли $L$ и $\bar{L} = L/\mathfrak{N}(L)$ над частично упорядоченным полем $K$ и их $l$-идеалы $P$ и $\bar{P} = P/\mathfrak{N}(L)$ соответственно. Из [6, теорема 12] известно, что существует естественный $l$-эпиморфизм $\varepsilon$ $l$-алгебры Ли $L$ на фактор-алгебру $\bar{L}$, при котором, согласно предложениям 2 и 3, $l$-идеал $P$ из $L$ является полным прообразом $l$-идеала $\bar{P} = P/\mathfrak{N}(L)$ из $\bar{L}$. Исходя из всего сказанного выше, по предложению 5 можно сделать вывод об $l$-изоморфности фактор-алгебр $L/P$ и $\bar{L}/\bar{P} = \big(L/\mathfrak{N}(L)\big)/\big(P/\mathfrak{N}(L)\big)$.

Так как фактор-алгебры $L/P$ и $\bar{L}/\bar{P}$ $l$-изоморфны, то из $l$-первичности одной из них следует $l$-первичность другой. Отсюда, применяя определение $l$-первичного идеала, получим, что $l$-идеал $P$ является $l$-первичным в $L$ тогда и только тогда, когда $l$-идеал $\bar{P}$ является $l$-первичным идеалом в $\bar{L}$. □

Докажем необходимое и достаточное условие совпадения $l$-радикала и $l$-первичного радикала $l$-алгебры Ли над частично упорядоченным полем, сформулированное в теореме 1.

**Доказательство теоремы 1.** Пусть $\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}(L)\big) = \{0\}$, т. е. $\bar{L} = L/\mathfrak{N}(L)$ не содержит ненулевых $l$-разрешимых $l$-идеалов. Следовательно, по определениям 4 и 5 $\mathfrak{N}(L)$ — $l$-полупервичный $l$-идеал $l$-алгебры Ли $L$. Из следствия 1 известно, что $\mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-rad}(L)$. Допустим, что $\mathfrak{N}(L) \neq l\text{-rad}(L)$, т. е. $\mathfrak{N}(L) \subset l\text{-rad}(L)$.

Тогда из леммы 2 следует существование в $L$ $l$-первичного $l$-идеала $P$, такого что $P \supseteq \mathfrak{N}(L)$ и $P \not\supseteq l\text{-rad}(L)$. При этом, в силу определения $l$-первичного радикала $l$-алгебры Ли $L$, для $l$-первичного $l$-идеала $P$ выполняется соотношение $P \supseteq l\text{-rad}(L)$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{N}(L) = l\text{-rad}(L)$.

Обратно, пусть $\mathfrak{N}(L) = l\text{-rad}(L)$, где $l\text{-rad}(L) = \bigcap\limits_{\beta} P_\beta$ — пересечение всех $l$-первичных $l$-идеалов $P_\beta$ $l$-алгебры Ли $L$. Тогда имеет место следующая цепочка равенств:

$$\overline{\bigcap_{\beta} P_\beta} = \Big(\bigcap_{\beta} P_\beta\Big)/\mathfrak{N}(L) = \bigcap_{\beta}\big(P_\beta/\mathfrak{N}(L)\big) = \bigcap_{\beta} \bar{P}_\beta.$$

Отсюда, учитывая предложение 6, получаем, что $\bar{P}_\beta$ пробегает множество всех $l$-первичных идеалов в $l$-алгебре Ли $\bar{L}$. Следовательно, $\overline{l\text{-rad}(L)} = l\text{-rad}(\bar{L})$. По следствию 1 верно включение $\mathfrak{N}(\bar{L}) \subseteq l\text{-rad}(\bar{L})$.

Если $\mathfrak{N}(\bar{L}) \neq \{\bar{0}\}$, то $l\text{-rad}(\bar{L}) \supseteq \mathfrak{N}(\bar{L}) \neq \{\bar{0}\}$, поэтому $l\text{-rad}(\bar{L}) \supset \{\bar{0}\}$. По доказанному выше это означает, что $\overline{l\text{-rad}(L)} \supset \{\bar{0}\}$, т. е. $\Big(\bigcap\limits_{\beta} P_\beta\Big)/\mathfrak{N}(L) \supset \{\bar{0}\}$, при этом по следствию 1 имеет место включение $\mathfrak{N}(L) \subseteq \bigcap\limits_{\beta} P_\beta$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $\bigcap\limits_{\beta} P_\beta \supset \mathfrak{N}(L)$. Полученное соотношение противоречит данному по условию теоремы равенству $\mathfrak{N}(L) = l\text{-rad}(L)$. Значит, $\mathfrak{N}(\bar{L}) = \{\bar{0}\}$, т. е. $\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}(L)\big) = \{0\}$. □

**Следствие 2.** *Пусть $L$ — решёточно упорядоченная алгебра Ли над частично упорядоченным полем $K$ и $\mathfrak{N}(L)$ — сумма всех её $l$-разрешимых $l$-идеалов. Тогда $\mathfrak{N}(L) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $l\text{-rad}(L) = \{0\}$.*

**Доказательство.** Пусть $l\text{-rad}(L) = \{0\}$. Используя включение $\mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-rad}(L)$, которое имеет место по следствию 1, получаем, что $\mathfrak{N}(L) = \{0\}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{N}(L) = \{0\}$. Тогда решёточно упорядоченные алгебры Ли $L/\mathfrak{N}(L)$ и $L$ изоморфны. Следовательно, $\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}(L)\big) = \mathfrak{N}(L) = \{0\}$. Отсюда по теореме 1 получаем равенство $\mathfrak{N}(L) = l\text{-rad}(L)$, из которого вытекает, что $l\text{-rad}(L) = \{0\}$. □

# 3. Свойства нижнего слабо разрешимого $l$-радикала $l$-алгебр Ли

Данный раздел содержит описание свойств нижнего слабо разрешимого $l$-радикала $l$-алгебры Ли над частично упорядоченными и направленными полями, в частности, указаны условия его совпадения с $l$-первичным радикалом $l$-алгебры Ли.

С помощью трансфинитной индукции построим цепь $l$-идеалов $l$-алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем

$$0 = \mathfrak{N}_0(L) \subseteq \mathfrak{N}_1(L) \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(L) \subseteq \mathfrak{N}_{\alpha+1}(L) \subseteq \ldots, \tag{1}$$

определяя для каждого порядкового числа $\alpha$ идеал $\mathfrak{N}_\alpha(L)$ следующим образом:

1) $\mathfrak{N}_0 = \{0\}$;
2) предположим, что идеал $\mathfrak{N}_\alpha(L)$ построен для всех $\alpha < \mu$ и определим $\mathfrak{N}_\mu(L)$ следующим образом:
   а) если $\mu$ — предельное порядковое число, то $\mathfrak{N}_\mu(L) = \bigcup\limits_{\alpha<\mu} \mathfrak{N}_\alpha(L)$;
   б) если $\alpha+1$ не является предельным порядковым числом, то $\mathfrak{N}_{\alpha+1}(L)$ — это такой $l$-идеал $l$-алгебры Ли $L$, содержащий $l$-идеал $\mathfrak{N}_\alpha(L)$, что $\mathfrak{N}_{\alpha+1}(L)/\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}_\alpha(L)\big)$.

В частности, $\mathfrak{N}_1(L)/\{0\} = \mathfrak{N}(L/\{0\})$, поэтому $\mathfrak{N}_1(L) = \mathfrak{N}(L)$ — сумма всех $l$-разрешимых $l$-идеалов $l$-алгебры Ли $L$.

Покажем, что построенная цепь $l$-идеалов стабилизируется.

**Предложение 7.** *Для любой $l$-алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем существует такое порядковое число $\tau = \tau(L)$, что цепь* (1) *стабилизируется на шаге $\tau$.*

**Доказательство.** Покажем сначала, что если цепь (1) приостановится на некотором шаге, то она стабилизируется на этом шаге, т. е. для любого порядкового числа $\alpha$ верна импликация

$$\text{если } \mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_{\alpha+1}(L), \text{ то } \mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_\beta(L) \text{ для всех } \beta \geqslant \alpha. \tag{2}$$

Действительно, пусть $\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_{\alpha+1}(L)$. Тогда для $\beta = \alpha$ и $\beta = \alpha+1$ равенство $\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_\beta(L)$ верно.

Допустим, что это равенство уже доказано для всех $\alpha \leqslant \beta < \gamma$. Если $\gamma$ — предельное число, то из индуктивного предположения вытекает в силу правила задания идеалов цепи (1), что

$$\mathfrak{N}_\gamma(L) = \bigcup_{\beta<\gamma} \mathfrak{N}_\beta(L) = \bigcup_{\alpha\leqslant\beta<\gamma} \mathfrak{N}_\beta(L) = \mathfrak{N}_\alpha(L),$$

т. е. равенство $\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_\beta(L)$ осталось верным и при $\beta = \gamma$. Если $\gamma$ не предельное число, то $\gamma = \delta+1$ для некоторого порядкового числа $\delta$ и $\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_\delta(L)$ по индуктивному предположению. Но тогда из правила задания идеалов цепи (1) легко вытекает, что $\mathfrak{N}_{\alpha+1}(L) = \mathfrak{N}_{\delta+1}(L) = \mathfrak{N}_\gamma(L)$. Так как $\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_{\alpha+1}(L)$, то $\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_\gamma(L)$.

По индукции равенство $\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_\beta(L)$ справедливо для всех $\beta \geqslant \alpha$, что и доказывает импликацию (2).

Учитывая (2), возьмём любое такое порядковое число $\tau$, что мощность отрезка $\{\alpha \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant \tau\}$ строго больше мощности множества $L$. Покажем, что для этого $\tau$ цепь (1) стабилизируется на шаге $\tau$.

Допустим противное. Тогда по (2) получаем, что $\mathfrak{N}_\tau(L) \neq \mathfrak{N}_{\tau+1}(L)$. Ещё раз применяя (2), получаем, что $\mathfrak{N}_\beta(L) \subset \mathfrak{N}_{\beta+1}(L)$ для любого $\beta \geqslant \tau$. Учитывая это, выбираем для любого $\beta \leqslant \tau$ элемент $r_\beta \in \mathfrak{N}_{\beta+1}(L) \setminus \mathfrak{N}_\beta(L)$. Ясно, что все элементы $r_\beta$ различны, и потому множество $\{r_\beta \mid 0 \leqslant \beta \leqslant \tau\}$ выбранных элементов имеет такую же мощность, как и отрезок $\{\beta \mid 0 \leqslant \beta \leqslant \tau\}$. Но по построению указанный отрезок имеет мощность, строго большую мощности множества $L$. Таким образом, множество $L$ имеет подмножество с мощностью, строго большей мощности всего множества $L$. Противоречие. $\square$

Доказанное предложение позволяет сформулировать следующее определение.

**Определение 7.** Нижним слабо разрешимым $l$-радикалом $l$-алгебры Ли $L$ над частично упорядоченным полем называется $l$-идеал $\mathfrak{B}(L) = \bigcup\limits_{\alpha \geqslant 0} \mathfrak{N}_\alpha(L)$, построенный по $l$-идеалам $\mathfrak{N}_\alpha(L)$ из цепи (1).

Учитывая предложение 7, получаем, что существует порядковое число $\tau$, такое что $\mathfrak{B}(L) = \mathfrak{N}_\tau(L)$.

Опишем взаимосвязь $l$-радикала и нижнего слабо разрешимого $l$-радикала $l$-алгебры Ли $L$.

**Предложение 8.** *Пусть $L$ — $l$-алгебра Ли над частично упорядоченным полем и $\mathfrak{B}(L)$ — её нижний слабо разрешимый $l$-радикал. Тогда $\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{B}(L)\big) = 0$ и фактор-алгебра $L/\mathfrak{B}(L)$ является $l$-полупервичной.*

**Доказательство.** По предложению 7 существует такое порядковое число $\tau$, для которого $\mathfrak{B}(L) = \mathfrak{N}_\tau(L)$. Для этого порядкового числа $\tau$ по правилу построения цепи идеалов (1) получаем, что $\mathfrak{N}_\tau(L) = \mathfrak{N}_{\tau+1}(L)$. Но тогда согласно правилу задания идеалов цепи (1) имеем

$$\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}_\tau(L)\big) = \mathfrak{N}_{\tau+1}(L)/\mathfrak{N}_\tau(L) = \mathfrak{N}_\tau(L)/\mathfrak{N}_\tau(L) = 0,$$

т. е. фактор-алгебра $L/\mathfrak{N}_\tau(L)$ не имеет ненулевых $l$-разрешимых $l$-идеалов.

Отсутствие в фактор-алгебре $L/\mathfrak{B}(L) = L/\mathfrak{N}_\tau(L)$ ненулевых $l$-разрешимых $l$-идеалов влечёт по определению 5 $l$-полупервичность $l$-алгебры Ли $L/\mathfrak{B}(L)$. $\square$

Для дальнейшего изложения нам понадобится поэлементное описание наименьшего $l$-идеала $I_a$ $l$-алгебры Ли $L$.

**Предложение 9 [5, предложение 2].** *В любой $l$-алгебре Ли $L$ над направленным полем $K$ $l$-идеал $I_a$ совпадает с множеством*

$$M = \left\{ x \in L \;\middle|\; |x| \leqslant \gamma_x |a| + \sum_{i=1}^{n=n(x)} [k_i, |a|],\ k_i \in L,\ \gamma_x \in K \right\}.$$

В теореме 2 сформулированы условия совпадения в произвольной $l$-алгебре Ли $L$ над направленным полем $l$-первичного радикала $l\text{-rad}(L)$ и нижнего слабо разрешимого $l$-радикала $\mathfrak{B}(L)$.

**Доказательство теоремы 2.** Из следствия 1 известно, что

$$\mathfrak{N}_1(L) = \mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-rad}(L).$$

Предположим, что $\mathfrak{N}_\gamma(L) \subseteq l\text{-rad}(L)$. Докажем, что $\mathfrak{N}_{\gamma+1}(L) \subseteq l\text{-rad}(L)$. Пусть $a \in \mathfrak{N}_{\gamma+1}(L)$. Тогда по правилу задания идеалов цепи (1) получаем, что

$$a + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in \mathfrak{N}_{\gamma+1}(L)/\mathfrak{N}_\gamma(L) = \mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\big),$$

при этом по следствию 1 верно включение

$$\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\big) \subseteq l\text{-rad}\big(L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\big).$$

Таким образом, $a + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in l\text{-rad}\big(L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\big)$. Отсюда по предложению 4 вытекает, что содержит нуль $0 + \mathfrak{N}_\gamma(L)$ любая последовательность

$$\{a_j + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in L/\mathfrak{N}_\gamma(L) \mid j \in \mathbb{N}\},$$

для которой

$$a_0 + \mathfrak{N}_\gamma(L) = |a + \mathfrak{N}_\gamma(L)|$$

и

$$a_{i+1} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in \big[I_{a_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}, I_{a_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}\big].$$

Для доказательства включения $a \in l\text{-rad}(L)$ используем метод доказательства от противного. Предположим, что $a \notin l\text{-rad}(L)$. Тогда из предложения 4 следует существование необнуляющейся последовательности $\{b_j \in L \mid j \in \mathbb{N}\}$, в которой $b_0 = |a|$ и $b_{i+1} \in [I_{b_i}, I_{b_i}]$. Учитывая [6, замечание 23], имеем

$$b_0 + \mathfrak{N}_\gamma(L) = |a| + \mathfrak{N}_\gamma(L) = |a + \mathfrak{N}_\gamma(L)|.$$

Также

$$b_{i+1} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in \big[I_{b_i}, I_{b_i}\big] + \mathfrak{N}_\gamma(L),$$

при этом

$$\big[I_{b_i}, I_{b_i}\big] + \mathfrak{N}_\gamma(L) = \left\{ \left( \sum_{k=1}^{n} [x_k, y_k] \right) + \mathfrak{N}_\gamma(L) \;\middle|\; x_k, y_k \in I_{b_i} \right\}.$$

Применяя правила действий над элементами фактор-алгебры $L/\mathfrak{N}_\gamma(L)$, получаем

$$\begin{aligned} &\big[I_{b_i}, I_{b_i}\big] + \mathfrak{N}_\gamma(L) = \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{n} [x_k + \mathfrak{N}_\gamma(L), y_k + \mathfrak{N}_\gamma(L)] \;\middle|\; x_k + \mathfrak{N}_\gamma(L), y_k + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in I_{b_i} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$b_{i+1} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in \big[I_{b_i} + \mathfrak{N}_\gamma(L), I_{b_i} + \mathfrak{N}_\gamma(L)\big].$$

Покажем, что $I_{b_i} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \subseteq I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}$. По предложению 9 идеал $I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}$ состоит из элементов $x + \mathfrak{N}_\gamma(L)$ фактор-алгебры $L/\mathfrak{N}_\gamma(L)$, для которых верно неравенство

$$|x + \mathfrak{N}_\gamma(L)| \leqslant \gamma_x |b_i + \mathfrak{N}_\gamma(L)| + \sum_{k=1}^{n=n(x)} [l_k + \mathfrak{N}_\gamma(L), |b_i + \mathfrak{N}_\gamma(L)|]$$

для некоторых элементов $\gamma_x \in K$ и $l_k + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in L/\mathfrak{N}_\gamma(L)$. Учитывая правила действий над элементами фактор-алгебры $L/\mathfrak{N}_\gamma(L)$ и [6, замечание 23], имеем

$$I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)} = \left\{ x + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in L/\mathfrak{N}_\gamma(L) \;\middle|\; |x| + \mathfrak{N}_\gamma(L) \leqslant \gamma_x |b_i| + \sum_{k=1}^{n=n(x)} [l_k, |b_i|] + \mathfrak{N}_\gamma(L) \right\}.$$

Для каждого элемента $l$-идеала

$$I_{b_i} + \mathfrak{N}_\gamma(L) = \{x + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in L/\mathfrak{N}_\gamma(L) \mid x \in I_{b_i}\}$$

по предложению 9 имеет место соотношение

$$|x| \leqslant \gamma_x |b_i| + \sum_{k=1}^{n=n(x)} [t_k, |b_i|],$$

из которого по правилу задания отношения порядка на фактор-алгебре $L/\mathfrak{N}_\gamma(L)$ следует, что

$$|x + \mathfrak{N}_\gamma(L)| = |x| + \mathfrak{N}_\gamma(L) \leqslant \gamma_x |b_i| + \sum_{k=1}^{n=n(x)} [t_k, |b_i|] + \mathfrak{N}_\gamma(L).$$

Сравнивая полученные соотношения для элементов $l$-идеалов $I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}$ и $I_{b_i} + \mathfrak{N}_\gamma(L)$, приходим к следующему выводу: $I_{b_i} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \subseteq I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}$.

Таким образом,

$$b_{i+1} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in \big[I_{b_i} + \mathfrak{N}_\gamma(L), I_{b_i} + \mathfrak{N}_\gamma(L)\big] \subseteq \big[I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}, I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}\big].$$

Итак, построена последовательность $\{b_j + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in L/\mathfrak{N}_\gamma(L) \mid j \in \mathbb{N}\}$, элементы которой удовлетворяют следующим условиям: $b_0 + \mathfrak{N}_\gamma(L) = |a + \mathfrak{N}_\gamma(L)|$ и $b_{i+1} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in \big[I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}, I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}\big]$. Такая последовательность, по доказанному выше, должна обращаться в нуль, т. е. существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $b_n + \mathfrak{N}_\gamma(L) = \mathfrak{N}_\gamma(L)$, и значит, $b_n \in \mathfrak{N}_\gamma(L)$. Так как по предположению индукции $\mathfrak{N}_\gamma(L) \subseteq l\text{-rad}(L)$, то $b_n \in l\text{-rad}(L)$. По предложению 4 отсюда следует, что содержит нуль любая последовательность $\{c_j \in L \mid j \in \mathbb{N}\}$, для которой $c_0 = |b_n|$ и $c_{k+1} \in \big[I_{c_k}, I_{c_k}\big]$. Поскольку по доказанному выше последовательность $\{b_j \in L \mid j \in \mathbb{N}\}$ не содержит нуль, то $b_n \neq 0$, поэтому $|b_n| \neq 0$. Используя предложение 9, имеем $I_{|b_n|} = I_{b_n}$, поэтому для элементов последовательности $\{c_j \in L \mid j \in \mathbb{N}\}$ справедливы соотношения $c_0 = |b_n|$, $c_1 \in \big[I_{b_n}, I_{b_n}\big]$ и $c_{k+1} \in \big[I_{c_k}, I_{c_k}\big]$. Так как любая последовательность такого вида обращается в нуль и $c_0 = |b_n| \neq 0$, то существует такой индекс $m \geqslant 1$, что $c_m = 0$.

Рассмотрим в качестве элемента $c_1 \in [I_{b_n}, I_{b_n}]$ элемент $b_{n+1} \in [I_{b_n}, I_{b_n}]$ первой последовательности, в качестве $c_2 \in \big[I_{c_1}, I_{c_1}\big] = \big[I_{b_{n+1}}, I_{b_{n+1}}\big]$ возьмём $b_{n+2}$ и т. д. По доказанному выше существует такой номер $m \geqslant 1$, что $c_m = b_{n+m} = 0$. Получаем противоречие с тем, что последовательность $\{b_j \in L \mid j \in \mathbb{N}\}$ нуль не содержит.

Значит, $a \in l\text{-rad}(L)$. Поэтому $\mathfrak{N}_{\gamma+1}(L) \subseteq l\text{-rad}(L)$. Таким образом, с помощью трансфинитной индукции получим

$$\mathfrak{N}_\mu(L) = \bigcup_{\alpha<\mu} \mathfrak{N}_\alpha(L) \subseteq l\text{-rad}(L)$$

для предельного числа $\mu$. Тогда нижний слабо разрешимый $l$-радикал $\mathfrak{B}(L) = \bigcup_{\alpha\geqslant 0} \mathfrak{N}_\alpha(L)$ также содержится в $l$-первичном радикале, т. е. $\mathfrak{B}(L) \subseteq l\text{-rad}(L)$.

Допустим, что $\mathfrak{B}(L) \subset l\text{-rad}(L)$. Тогда по предложению 8 и определению 4 нижний слабо разрешимый $l$-радикал $\mathfrak{B}(L)$ является $l$-полупервичным идеалом в $L$. Применяя лемму 2 к $l$-полупервичному идеалу $\mathfrak{B}(L)$ и $l$-идеалу $l\text{-rad}(L)$, строго содержащему $\mathfrak{B}(L)$, найдём $l$-первичный идеал $P$ в $L$, такой что $P \supseteq \mathfrak{B}(L)$ и $P \not\supseteq l\text{-rad}(L)$. Но любой $l$-первичный идеал содержит $l\text{-rad}(L)$, противоречие.

Таким образом, $\mathfrak{B}(L) = l\text{-rad}(L)$. □

# Литература

[1] Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 295—325.

[2] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[3] Кочетова Ю. В. О некоторых свойствах идеалов решёточно упорядоченных алгебр Ли // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная сер. Математика. — 2007. — № 7 (57). — С. 73—83.

[4] Кочетова Ю. В. Первичные идеалы решёточно упорядоченных алгебр Ли // Междунар. алгебраическая конф., посвящ. 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. — М., 2008. — С. 140—141.

[5] Кочетова Ю. В. Первичный радикал решёточно упорядоченных алгебр Ли // Успехи мат. наук. — 2008. — Т. 63, № 5. — С. 191—192.

[6] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах частично упорядоченных алгебр Ли // Избранные вопросы алгебры: Сб. статей, посвящённый памяти Н. Я. Медведева. — Барнаул: Изд-во Алтайского ун-та, 2007. — С. 131—142.

[7] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О естественном гомоморфизме решёточно упорядоченных алгебр Ли // Междунар. конф. по алгебре и теории чисел, посвящённая 80-летию В. Е. Воскресенского. Тезисы докладов. — Самара: Универс групп, 2007. — С. 29—30.

[8] Пихтильков С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли. — Тула: Изд-во Тульского гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

[9] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.