Автоморфизмы и теоретико-модельные вопросы для нильпотентных матричных групп и колец*

В. М. ЛЕВЧУК
Сибирский федеральный университет, Красноярск
e-mail: levchuk@lan.krasu.ru

Е. В. МИНАКОВА
Сибирский федеральный университет, Красноярск
e-mail: Nimdar@inbox.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: элементарная эквивалентность, изоморфизм, автоморфизм, кольцо нильтреугольных матриц, ассоциированные кольца Ли и Йордана, присоединённая группа.

Аннотация

Пусть $R' = \mathrm{NT}(m, S)$. Цель статьи — исследовать элементарные эквивалентности $\mathrm{UT}(n, K) \equiv \mathrm{UT}(m, S)$ и $\Lambda(R) \equiv \Lambda(R')$ для произвольных ассоциативных колец коэффициентов с единицей. Основная теорема даёт описание этих эквивалентностей для случая $n > 4$. Кроме того, исследуются изоморфизмы и элементарная эквивалентность колец Йордана нильтреугольных матриц.

Abstract

V. M. Levchuk, E. V. Minakova, Automorphisms and model-theory questions for nilpotent matrix groups and rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 8, pp. 159—168.

Let $R' = \mathrm{NT}(m, S)$. The purpose of the paper is the investigation of elementary equivalences $\mathrm{UT}(n, K) \equiv \mathrm{UT}(m, S)$ and $\Lambda(R) \equiv \Lambda(R')$ for arbitrary associative coefficient rings with identity. The main theorem gives the description of such equivalences for $n > 4$. In addition, we investigate isomorphisms and elementary equivalence of Jordan niltriangular matrix rings.

Введение

Зависимость элементарной эквивалентности и других модельных свойств линейных групп от свойств полей или колец коэффициентов, по-видимому, впервые стал изучать А. И. Мальцев. Принципиальное соответствие между элементарными свойствами унитреугольной группы $\mathrm{UT}(3, K)$ степени 3 и (не обязательно ассоциативного) кольца коэффициентов K с единицей установлено в [5], наряду

*Исследования поддерживаются грантом РФФИ.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 8, с. 159—168.

с интерпретацией кольца K в обогащённой унитреугольной группе с выделенными параметрами. Как показано в [6], если G есть GL, PGL, SL или PSL, то группы $G_n(F)$ и $G_m(P)$ степеней $n \geqslant 3$ и m над полями F и P нулевой характеристики соответственно элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$ и поля F и P элементарно эквивалентны.

Теоретико-модельные исследования линейных групп и колец с 1970-х годов развивались в тесной связи с теорией автоморфизмов и изоморфизмов (см. [10,15] для групп Шевалле и их унипотентных подгрупп, [1,8] и др.). В 1975 г. автоморфизмы кольца $\mathrm{NT}(n,K)$ (нижних) нильтреугольных $(n \times n)$-матриц над произвольным ассоциативным кольцом K с единицей описал В. М. Левчук [3]. По аналогии с [5] Б. Роуз интерпретировал в 1978 г. поле F коэффициентов в кольце $\mathrm{NT}(n,F)$ [13]. В 1988 г. К. Видэла [14] модифицировал интерпретацию Роуза и доказал, что элементарная эквивалентность колец нильтреугольных матриц над ассоциативными кольцами с единицей переносится на кольца коэффициентов (случай полей коэффициентов см. [18]):

$$\mathrm{NT}(n,K) \equiv \mathrm{NT}(m,S) \iff n = m,\ K \equiv S.$$

Унитреугольная группа $\mathrm{UT}(n,K)$ представляется присоединённой группой $G(R)$ кольца $R = \mathrm{NT}(n,K)$. С кольцом R ассоциируют также кольцо Ли $\Lambda(R)$. В [4] описана взаимосвязь групп автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, G(R)$ и $\mathrm{Aut}\, \Lambda(R)$ при $n \neq 3$; когда $n = 3$, описание дано при условии коммутативности колец коэффициентов, а также в случае кольца K без делителей нуля. Изоморфизмы при тех же ограничениях рассмотрены в [12].

Элементарная эквивалентность $\mathrm{UT}(n,K) \equiv \mathrm{UT}(n,S)$, согласно О. В. Белеградеку [9], переносится на кольца коэффициентов в случае коммутативности какого-либо из них; если же K или S является кольцом без делителей нуля, имеем $K \equiv S$ или $K \equiv S^{\mathrm{op}}$ для противоположного кольца S^{op}. В [7] показано, что для коммутативных колец коэффициентов элементарная эквивалентность ассоциированных колец Ли также переносится на кольца коэффициентов.

Пусть $R' = \mathrm{NT}(m,S)$. Цель статьи — исследовать элементарные эквивалентности $\mathrm{UT}(n,K) \equiv \mathrm{UT}(m,S)$ и $\Lambda(R) \equiv \Lambda(R')$ для произвольных ассоциативных колец коэффициентов с единицей. Основная теорема 2.1 даёт описание этих эквивалентностей для случая $n > 4$. Кроме того, исследуются изоморфизмы и элементарная эквивалентность колец Йордана нильтреугольных матриц (теорема 1.2).

1. Изоморфизмы унитреугольных групп и ассоциированных колец

Как обычно, с каждым ассоциативным кольцом R ассоциируют кольцо Ли $\Lambda(R) := (R, +, *)$ с лиевым умножением $\alpha * \beta = \alpha\beta - \beta\alpha$ и кольцо Йордана $J(R) := (R, +, \circ)$ с умножением $\alpha \circ \beta = \alpha\beta + \beta\alpha$. Когда кольцо R радикально, отображение $x \to 1 + x$ ($x \in R$) является изоморфизмом его присоединённой группы $G(R)$.

Через $\mathrm{NT}(n, K)$ обозначаем кольцо (нижних) нильтреугольных матриц. Очевидно, что присоединённая группа кольца $\mathrm{NT}(n, K)$ изоморфна унитреугольной группе $\mathrm{UT}(n, K)$.

Для ассоциативного кольца K с единицей полагаем $R = \mathrm{NT}(n, K)$, аналогично выбираем R'. Приведём теорему из [12] об изоморфизмах колец R и R', их присоединённых групп и ассоциированных колец Ли. Нам потребуется понятие идемпотентного изоморфизма.

Пусть f — центральный идемпотент кольца K. Изоморфизм $\theta\colon K^+ \to S^+$ аддитивных групп с условием $\theta(1_K) = 1_S$ называется f-изоморфизмом (или идемпотентным изоморфизмом) колец K и S, если он индуцирует изоморфизм идеала fK и антиизоморфизм идеала $(1_K - f)K$. Кольца K и S называются идемпотентно изоморфными, если между ними существует некоторый идемпотентный изоморфизм. Частным случаем основной теоремы из [12] является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть K и S — ассоциативные кольца с единицами, $n > 2$ и m — натуральные числа. Тогда*

1) *если $R \simeq R'$, то $K \simeq S$, $n = m$ и каждый изоморфизм кольца R в кольцо R' стандартен;*
2) *если $n > 4$, то $G(R) \simeq G(R')$ или $\Lambda(R) \simeq \Lambda(R')$ тогда и только тогда, когда кольца K и S идемпотентно изоморфны и $n = m$.*

Исследуем йордановы автоморфизмы кольца нильтреугольных матриц. Йордановы идемпотентные и гиперцентральные высоты не больше 3 автоморфизмы вводим аналогично случаю кольца Ли в [4]. Основным результатом раздела является следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть K — произвольное ассоциативное кольцо с единицей и $R = \mathrm{NT}(n, K)$, $n > 4$. Тогда каждый автоморфизм кольца Йордана $J(R)$ есть произведение его идемпотентного и гиперцентрального высоты не больше 3 автоморфизмов и автоморфизма кольца R.*

Лемма 1.3. *Йордановыми изоморфизмами кольца R являются в точности изоморфизмы аддитивной группы R^+, сохраняющие соотношения*

$$\begin{gathered} xe_{ij} \circ ye_{jm} = xye_{im} = ye_{jm} \circ xe_{ij}, \\ xe_{ij} \circ ye_{km} = 0 \quad (j \neq k,\ i \neq m). \end{gathered} \tag{1}$$

Доказательство. Соотношения

$$\begin{gathered} xe_{ij} + ye_{ij} = (x + y)e_{ij}, \quad (xe_{ij})(ye_{jm}) = xye_{im}, \\ (xe_{ij})(ye_{km}) = 0 \quad (j \neq k) \end{gathered} \tag{2}$$

являются основными для кольца R. Отсюда легко следует, что соотношения (1) вместе с соотношениями аддитивной группы R^+ дают все соотношения кольца Йордана $J(R)$. Лемма доказана. □

Для любого антиизоморфизма $^\sim : K \to S$ кольца K на кольцо S отображение

$$\alpha = \|a_{ij}\| \to \tilde{\alpha}' := \|\tilde{a}_{j'i'}\| \quad (\alpha \in R,\ k' = n+1-k)$$

является антиизоморфизмом кольца R на $\mathrm{NT}(n, S)$. По лемме 2.2 легко проверяется, что произвольный f-изоморфизм θ кольца K допускает продолжение до йорданова изоморфизма

$$\alpha \to \theta(f\alpha) + \theta[(1-f)\alpha'] \quad (\alpha \in R) \tag{3}$$

кольца R на $\mathrm{NT}(n, S)$. Согласно [4, 12] отображение

$$xe_{ij} \to (fx)^\theta e_{ij} - (x - xf)^\theta e_{j'i'} \quad (x \in K,\ j < i) \tag{4}$$

определяет идемпотентные изоморфизмы кольца Ли $\Lambda(R)$ и присоединённой группы $G(R)$. Когда $K = S$, (3) и (4) дают идемпотентные автоморфизмы.

Положим

$$N_{ij} = \langle Ke_{uv} \mid v \leqslant j,\ u \geqslant i,\ v < u \rangle \quad (n > i > j > 1).$$

Из сказанного выше вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 1.4. *Пусть $R = \mathrm{NT}(n, K)$ и f — центральный идемпотент кольца K. Если существует f-автоморфизм кольца K, то существует такой автоморфизм τ кольца $J(R)$, что $N_{ij}^\tau = fN_{ij} + (1-f)N_{j'i'}$ для $n > i > j > 1$.*

Автоморфизм кольца называется *гиперцентральным высоты не больше m*, если он действует тождественно по модулю его m-го гиперцентра; в случае $m = 1$ такой автоморфизм называют *центральным*. Найдём гиперцентры кольца $J(R)$.

Лемма 1.5. *Пусть $R = \mathrm{NT}(n, K)$ и $1 \leqslant k < n$. Тогда k-я степень кольца $J(R)$ и его $(n-k+1)$-й гиперцентр совпадают с*

$$R^k = N_{k+11} + N_{k+22} + \ldots + N_{nn-k} \ \ (1 \leqslant k < n), \quad R^n = 0, \tag{5}$$

а аннулятор степени R^k в $J(R)$ совпадает с $N_{k'k}$.

Доказательство. Элементарные матрицы xe_{ij} $(x \in K,\ n > i > j > 1)$ порождают аддитивную группу кольца R. Из (1) следует, что произведение $Ke_{ij} \circ Ke_{km}$ совпадает с $Ke_{ij}e_{km}$ или $Ke_{km}e_{ij}$. Следовательно, равенства (5) определяют все степени кольца $J(R)$. Аннулятор степени R^k в кольце Йордана $J(R)$ совпадает с пересечением левого аннулятора N_{1k} и правого аннулятора $N_{n-k+1,n}$ степени R^k в кольце R. Это доказывает лемму. □

Далее используем характеризацию односторонних пирсовых разложений.

Лемма 1.6 [4, лемма 4]. *Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей, $K = A_1 + A_2 = B_1 + B_2$ и $A_iB_i = 0$ для подмножеств A_i, B_i кольца K, $i = 1, 2$. Тогда существует такой идемпотент f кольца K, что*

$$A_1 = Kf, \quad A_2 = K(1-f), \quad B_1 = (1-f)K, \quad B_2 = fK.$$

Идемпотент f является центральным в K, если $Kf = fK$.

Доказательство можно найти в [4, 12].

Лемма 1.7. *Пусть* $R = \mathrm{NT}(n, K)$ *и* ψ — *автоморфизм кольца* $J(R)$. *Если* $\psi(N_{ij}) = N_{ij}$ *для всех* $n > i > j > 1$, *то* ψ — *автоморфизм кольца* R.

Доказательство. Любой идеал N_{ij} $(j < i)$ имеет нулевое умножение. Поэтому отображение ψ аддитивно на N_{ij}. Выберем произвольные матрицы $\alpha \in N_{ij}$ и $\beta \in N_{km}$, $m < k$. Допустим, что $k \leqslant i$. Тогда $m < i$, $N_{km}N_{ij} = 0$, и следовательно, $\beta^\psi \alpha^\psi = 0 = 0^\psi = (\beta\alpha)^\psi$. Более того, произведение $\alpha \circ \beta$ совпадает с $\alpha\beta$. То же самое верно и для ψ-образов α, β. Таким образом, ψ сохраняет все основные соотношения (2) кольца R и, следовательно, является автоморфизмом кольца R. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1.2. Пусть ψ — произвольный автоморфизм кольца $J(R)$. Исследуем образы $H^{(j)} = N^{\psi}_{j+1j}$.

По лемме 1.5 каждый идеал $N_{j'j}$ характеристичен и справедливы равенства

$$N_{j'j} = (N_{j'j} \cap R^2) + N_{(j-1)',j-1} + N_{j+1j} + N_{j',j'-1} \quad (n - j \leqslant j < n).$$

Если $n = 2j$, то $j' = j + 1$, и следовательно, $N_{j'j} = H^{(j)}$. По модулю $(N_{j'j} \cap R^2) + N_{(j-1)',j'-1}$ получаем равенства

$$H^{(j)} + H^{(n-j)} = N_{j+1j} + N_{j'j'-1} \quad (1 \leqslant j < n).$$

Таким образом, сумма $(j+1, j)$-проекций $H^{(j)}$ и $H^{(n-j)}$ совпадает с K. Обозначим через $H^{(j)}_{uv}$ (u, v)-проекцию $H^{(j)}$. Фиксируя m с условием $n - m < m < n$, получаем

$$K = H^{(m)}_{i+1i} + H^{(n-m)}_{i+1i} \quad (i = m, n - m).$$

Ясно, что

$$H^{(m)} \cap H^{(n-m)} = N_{m+1,m'-1} = \operatorname{Ann} N_{m'm}.$$

Поскольку $H^{(i)}$ — идеал с нулевым умножением в кольце $J(R)$, как образ N_{i+1i}, мы получаем, что $H^{(i)}_{m+1m}e_{nm'} \subset H^{(i)}$ для $n > 4$, следовательно,

$$H^{(i)}_{m+1m}H^{(i)}_{m'm'-1} = 0 \quad (i = m, n - m).$$

По лемме 1.6 имеем $H^{(i)}_{m+1m} = Kf_i$ и $H^{(i)}_{m'm'-1} = f_{n-i}K$ $(i = m, n - m)$ для идемпотента f_m кольца K и $f_{n-m} = 1 - f_m$. Для $m > m' = n - m + 1$ получаем

$$H^{(i)} \cap Ke_{m1} = f_{n-i}Ke_{m1}, \quad H^{(i)} \cap Ke_{nm'} = Kf_m e_{nm'} \quad (i = m, n - m).$$

Отсюда следует, что $Kf_mK \subseteq f_mK$ и $Kf_mK \subseteq Kf_m$, поэтому $Kf_m = f_mK$, и по лемме 1.6 f_m — центральный идемпотент. При $n - m < m < n - 1$ йорданово произведение $H^{(m+1)}$ и $H^{(n-m)}$ по модулю R^3 равно нулю. Это даёт равенства $f_{m+1} = f_{m+1}f_m$, $f_m = f_{m+1}f_m$, и следовательно, $f_m = f_{m+1}$. Таким образом, доказано существование такого центрального идемпотента f кольца K, что $H^{(i)}_{i+1i} = fK$ и $H^{(i)}_{i'i'-1} = (1 - f)K$ для всех i, $1 \leqslant i < n$. Так как каждая проекция $H^{(i)}_{uv}$ $(i' \leqslant v < u < i + 1)$ лежит в $fK \cap (1 - f)K = 0$, то

$$H^{(i)} = fN_{i+1i} + (1 - f)N_{i',i'-1} \quad (i = 2, 3, \ldots, n - 2).$$

В случае $i = 1$, когда $H^{(i)}$ лежит между множеством $fN_{41} + (1-f)N_{nn-3}$ и его аннулятором в $J(R)$, и при $i = n-1$ эти равенства верны по модулю $N_{n3} + N_{n-2,1}$. Как и в [4, лемма 7], при $n > 4$ это означает, что с точностью до умножения на диагональный и идемпотентно-кольцевой автоморфизмы ψ действует тождественно по модулю R^2.

Ясно, что $N_{21}^{\psi} \cap Ke_{n2} = 0$. Это даёт $(xe_{21})^{\psi} = xe_{21} + x^{\mu}e_{n3}$ $(x \in K)$ по модулю $N_{31} + N_{n2}$. Если ψ — йорданов автоморфизм, то $(Ke_{32} \circ (xe_{21})^{\psi}) \circ N_{21}^{\psi} = 0$, и следовательно, $x^{\mu}y + y^{\mu}x = 0$ для всех $x, y \in K$. Полагая $1^{\mu} = c$, мы находим, что $2c = 0$, $x^{\mu} = cx$ и $c(K \circ K) = 0$. Когда $c = 0$, получаем $(xe_{21})^{\psi} = xe_{21} + x^{\nu}e_{n2}$ по модулю N_{31} для некоторого преобразования ν кольца K. Кроме того, $x^{\nu}y + y^{\nu}x = 0$ $(x, y \in K)$, поскольку идеал N_{21}^{ψ} есть образ идеала N_{21} с нулевым умножением. Отсюда, как и выше, получаем, что $x^{\nu} = bx$ $(x \in K)$ и $b(K \circ K) = 0$ для некоторого $b \in K$.

Заметим, что для любых элементов $c, d \in K$ с условиями $c(K \circ K) = 0$ (это равносильно ограничениям $2c = 0$ и $c(K * K) = 0$) и $(K \circ K)d = 0$ отображения

$$xe_{21} \to (e_{21} + ce_{n3})x, \quad xe_{31} \to (e_{31} + ce_{n2})x, \quad x \in K,$$

и симметрично

$$xe_{nn-1} \to x(e_{nn-1} + de_{n-2,1}), \quad xe_{nn-2} \to x(e_{nn-2} + de_{n-1,1}), \quad x \in K,$$

дают гиперцентральные йордановы автоморфизмы высоты 3. Точно так же отображения $xe_{21} \to (e_{21} + ce_{n2})x$ и симметрично $xe_{nn-1} \to x(e_{nn-1} + de_{n-1,1})$ $(x \in K)$ определяют гиперцентральные йордановы автоморфизмы высоты 2.

Нетрудно убедиться, что ψ действует на идеал N_{21} (и аналогично на идеал N_{nn-1}) как произведение построенных гиперцентральных автоморфизмов высоты не больше 3. Таким образом, с точностью до умножения на идемпотентно-кольцевой и гиперцентральный автоморфизмы ψ сохраняет все идеалы N_{ij} и по лемме 1.7 является автоморфизмом кольца R. Теорема доказана. $\square$

В [16, 17] и других работах доказывался частный случай теоремы 1.2: каждый йорданов автоморфизм алгебры $\mathrm{NT}(n, K)$ $(n > 2)$ над коммутативным кольцом K без идемпотентов, отличных от 0, 1, в котором элемент 2 не является делителем нуля, есть автоморфизм или антиавтоморфизм алгебры.

2. Элементарная эквивалентность ассоциированных колец Ли и присоединённых групп

В этом разделе устанавливается связь элементарной эквивалентности ассоциированных с $\mathrm{NT}(n, K)$ колец Ли и элементарных свойств колец коэффициентов. Выявляется связь и для присоединённых групп. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть* K, S — *ассоциативные кольца с единицами и* $n > 4$. *Кольца* $\Lambda\big(\mathrm{NT}(m, S)\big)$ *и* $\Lambda\big(\mathrm{NT}(n, K)\big)$ (*аналогично группы* $G\big(\mathrm{NT}(m, S)\big)$ *и* $G\big(\mathrm{NT}(n, K)\big)$) *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда* $n = m$ *и существуют такие центральные идемпотенты* $f \in K$ *и* $g \in S$, *что* $fK \equiv gS$ *и* $(1 - f)K \equiv [(1 - g)S]^{\mathrm{op}}$.

Нам потребуются понятие фильтра и аппарат ультрапроизведений. Пусть I — некоторое непустое множество. Через $S(I)$ обозначим множество всех подмножеств этого множества. *Фильтр над множеством* I определяется как множество $D \subset S(I)$, для которого выполняются следующие условия:

1) $I \in D$;
2) если $X, Y \in D$, то $X \cap Y \in D$;
3) если $X \in D$ и $X \subset Z \subset I$, то $Z \in D$.

Фильтр D над множеством I (обозначение (D, I)) называется *ультрафильтром над* I, если $X \in (D, I)$ тогда и только тогда, когда $(I \setminus X) \notin (D, I)$ для всякого $X \in S(I)$.

С понятиями фильтрованного произведения, ультрапроизведения и ультрастепени можно ознакомиться по [2, 11]. Ультрапроизведения алгебраических систем сохраняют свойства первой ступени. В частности, произвольная алгебраическая система $\mathfrak{A}$ элементарно эквивалентна любой своей ультрастепени $\mathfrak{A}^I/D$.

Как правило, решение вопроса об элементарной эквивалентности связано с решением вопроса об изоморфности соответствующих алгебраических систем. Принципиальным является переход от элементарной эквивалентности к изоморфизму систем. Полезны следующие леммы.

Лемма 2.2. *Алгебраические системы* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют их изоморфные ультрастепени.*

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы об изоморфизме [2, теорема 6.1.15]. □

Лемма 2.3. *Для любого ассоциативного кольца с единицей* K *и ультрафильтра* (D, I) *существует естественный изоморфизм между группами* $\mathrm{UT}(n, K)^I/D$ *и* $\mathrm{UT}(n, K^I/D)$.

Доказательство. Приведём доказательство, предложенное О. В. Белеградеком. Пусть g — произвольный элемент $M(n, K)^I$. Для $i \in I$ обозначим через $g(i)$ матрицу $\|g_{kl}(i)\|$, $k, l = 1, \ldots, n$, над K. Тогда $g_{kl} \in K^I$ для всех k, l. Определим отображение

$$\tau\colon M(n, K)^I/D \to M(n, K^I/D)$$

по правилу $\tau\colon g/D \to \|g_{kl}/D\|$. Нетрудно проверить, что τ — кольцевой изоморфизм. Более того, можно показать, что

$$\tau(\mathrm{UT}(n, K)^I/D) = \mathrm{UT}(n, K^I/D).$$

Таким образом, τ есть требуемый изоморфизм. Лемма доказана. □

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2.4. *Для любого ассоциативного кольца с единицей K и ультрафильтра (D, I) существуют естественные кольцевые изоморфизмы*

$$\Lambda\big(\mathrm{NT}(n,K)\big)^I/D \simeq \Lambda\big(\mathrm{NT}(n,K^I/D)\big),$$
$$J\big(\mathrm{NT}(n,K)\big)^I/D \simeq J\big(\mathrm{NT}(n,K^I/D)\big).$$

Нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 2.5. *Пусть K, S — ассоциативные кольца с единицами и $K \equiv S$. Тогда*

$$\mathrm{NT}(n,K) \equiv \mathrm{NT}(n,S), \quad \Lambda\big(\mathrm{NT}(n,K)\big) \equiv \Lambda\big(\mathrm{NT}(n,S)\big),$$
$$J\big(\mathrm{NT}(n,K)\big) \equiv J\big(\mathrm{NT}(n,S)\big), \quad G\big(\mathrm{NT}(n,K)\big) \equiv G\big(\mathrm{NT}(n,S)\big).$$

Доказательство. Мы проведём доказательство для кольца нильтреугольных матриц, доказательство других утверждений аналогично.

Покажем, что существует алгоритм, перерабатывающий каждое элементарное (которое можно записать на языке узкого исчисления предикатов) предложение кольца R в элементарное предложение кольца K, причём предложения, истинные на кольце R, перерабатываются в предложения, истинные на кольце коэффициентов K.

Каждый элемент кольца R может быть представлен как определённый набор элементов кольца K. Кольцевые операции $x + y = z$, $xy = z$ также сводятся к операциям на кольце коэффициентов и могут быть представлены в виде конъюнкций формул на K.

Если $S \equiv K$, то множества всех замкнутых формул языка первой ступени на этих кольцах совпадают, а следовательно, совпадают и все свойства первой ступени колец R и R'. Это и означает, что $R \equiv R'$. Лемма доказана. □

Лемма 2.6. *Фильтрованные произведения, фильтрованные степени, прямые произведения и прямые степени сохраняют элементарную эквивалентность.*

Доказательство можно найти в [2, теорема 6.3.4].

Доказательство теоремы 2.1. Числа m и n характеризуют ступени нильпотентности колец $\Lambda(R')$ и $\Lambda(R)$ соответственно. Это свойство сохраняется при элементарной эквивалентности, так как может быть записано в виде замкнутой формулы первой ступени. Поэтому достаточно рассмотреть случай $n = m$.

Пусть K, S — ассоциативные кольца с единицами, содержащие центральные идемпотенты $f \in K$ и $g \in S$, такие что

$$fK \equiv gS, \quad (1-f)K \equiv [(1-g)S]^{\mathrm{op}}.$$

Положим

$$S' = gS \oplus [(1-g)S]^{\mathrm{op}}.$$

По лемме 2.6 имеем

$$K = fK \oplus (1-f)K \equiv gS \oplus [(1-g)S]^{\mathrm{op}} = S',$$

откуда по лемме 2.5 получаем, что

$$\Lambda(R) \equiv \Lambda\big(\mathrm{NT}(n, S')\big), \quad G(R) \equiv G\big(\mathrm{NT}(n, S')\big).$$

Кольца S и S' идемпотентно изоморфны. По теореме 1.1 существуют изоморфизмы

$$\Lambda(R') \simeq \Lambda\big(\mathrm{NT}(n, S')\big), \quad G(R') \simeq G\big(\mathrm{NT}(n, S')\big).$$

Тогда справедливы соотношения

$$\Lambda(R) \equiv \Lambda\big(\mathrm{NT}(n, S')\big) \simeq \Lambda(R'), \quad G(R) \equiv G\big(\mathrm{NT}(n, S')\big) \simeq G(R'),$$

откуда получаем, что $\Lambda(R) \equiv \Lambda(R')$ и $G(R) \equiv G(R')$. Необходимость доказана.

Теперь пусть $\Lambda(R) \equiv \Lambda(R')$. По лемме 2.2 существует ультрафильтр (D, I), такой что

$$\Lambda(R)^I/D \simeq \Lambda(R')^I/D.$$

Используя лемму 2.5, устанавливаем, что

$$\Lambda\big(\mathrm{NT}(n, K^I/D)\big) \simeq \Lambda\big(\mathrm{NT}(n, S^I/D)\big).$$

По теореме 1.1 существуют центральные идемпотенты $f_1 \in K^I/D$ и $g_1 \in S^I/D$, такие что

$$f_1(K^I/D) \simeq g_1(S^I/D), \quad (1 - f_1)(K^I/D) \simeq (1 - g_1)(S^I/D)^{\mathrm{op}}.$$

Ультрастепени сохраняют все свойства первой ступени, поэтому и в кольцах K и S существуют центральные идемпотенты f и g соответственно с теми же условиями. Поэтому в силу соотношений $K^I/D \equiv K$ и $S^I/D \equiv S$ имеем

$$fK \equiv gS, \quad (1 - f)K \equiv [(1 - g)S]^{\mathrm{op}}.$$

Это завершает доказательство необходимости для ассоциированных колец Ли. Для присоединённых групп доказательство аналогично. Теорема доказана. □

Замечание. По аналогии с ассоциированными кольцами Ли вопрос об элементарной эквивалентности йордановых колец нильтреугольных матриц допускает решение в ограничениях теоремы 2.1. Естественно, что для них предварительно требуется описание изоморфизмов.

Литература

[1] Ершов Ю. Л. Элементарные теории групп // ДАН СССР. — 1972. — Т. 203. — С. 1240—1243.

[2] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. — М: Мир, 1977.

[3] Левчук В. М. Автоморфизмы некоторых нильпотентных матричных групп и колец // ДАН СССР. — 1975. — Т. 16, № 3. — С. 756—760.

[4] Левчук В. М. Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. II. Группы автоморфизмов // Сиб. мат. журн. — 1983. — Т. 24, № 4. — С. 543—557.

[5] Мальцев А. И. Об одном соответствии между кольцами и группами // Мат. сб. — 1960. — Т. 50. — С. 257—266.

[6] Мальцев А. И. Элементарные свойства линейных групп // Некоторые проблемы в математике и механике. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1961. — С. 110—132.

[7] Минакова Е. В. Элементарно эквивалентные кольца Ли нильтреугольных матриц над коммутативными кольцами коэффициентов // Вестн. НГУ. — 2008. — Т. 8, вып. 3. — С. 100—104.

[8] Ремесленников В. Н., Романьков В. А. Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра, топология, геометрия. Т. 21. — М.: ВИНИТИ, 1983. — С. 3—79.

[9] Belegradek O. V. Model theory of unitriangular groups // Amer. Math. Soc. Transl. — 1999. — Vol. 195, no. 2. — P. 1—116.

[10] Gibbs J. A. Automorphisms of certain unipotent groups // J. Algebra. — 1970. — Vol. 14, no. 2. — P. 203—228.

[11] Hodges W. Model Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.

[12] Kuzucuoglu F., Levchuk V. M. Isomorphisms of certain locally nilpotent finitary groups and associated rings // Acta Appl. Math. — 2004. — Vol. 82. — P. 169—181.

[13] Rose B. I. The χ_1-categoricity of strictly upper triangular matrix rings over algebraically closed fields // J. Symbolic Logic. — 1978. — Vol. 43, no. 2. — P. 250—259.

[14] Videla C. R. On the model theory of the ring $\mathrm{NT}(n, R)$ // J. Pure Appl. Algebra. — 1988. — Vol. 55. — P. 289—302.

[15] Videla C. R. On the Mal'cev correspondence // Pric. Amer. Math. Soc. — 1990. — Vol. 109. — P. 493—502.

[16] Wang X. T. Decomposition of Jordan automorphisms of strictly triangular matrix algebra over commutative rings // Commun. Algebra. — 2007. — Vol. 35. — P. 1133—1140.

[17] Wang X. T., You H. Decomposition of Jordan automorphisms of strictly triangular matrix algebra over local rings // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 392. — P. 183—193.

[18] Wheeler W. H. Model theory of strictly upper triangular matrix ring // J. Symbolic Logic. — 1980. — Vol. 45. — P. 455—463.