

Радикалы l -колец и односторонние l -идеалы

Н. Е. ШАВГУЛИДЗЕ

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

e-mail: nathalia_s@mail.ru

УДК 512.555.4

Ключевые слова: решёточно упорядоченное кольцо, l -первичный правый l -идеал, l -полупервичный правый l -идеал, радикал l -кольца, наднильпотентный радикал l -кольца.

Аннотация

В работе вводятся понятия правого l -первичного l -идеала и правого l -полупервичного l -идеала и доказывается, что для двусторонних l -идеалов эти определения совпадают с определениями М. А. Шаталовой. Радикал l -кольца представляется в виде пересечения правых l -идеалов, для каждого из которых выполняется условие, что фактор-кольцо по наибольшему l -идеалу, содержащемуся в данном правом l -идеале, является полупростым. Наднильпотентный радикал l -кольца представляется в виде пересечения правых l -полупервичных l -идеалов с тем же условием.

Abstract

N. E. Shavgulidze, Radicals of l -rings and one-sided l -ideals, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 8, pp. 169—181.

In this paper, we introduce the notion of an l -prime l -ideal and that of a right l -semiprime l -ideal. We prove that our definitions coincide with the definitions of M. A. Shatalova in the case of two-sided l -ideals. Our main results are the following ones. The radical of an l -ring can be represented as the intersection of the right l -ideals for each of which the following condition holds: the quotient ring by the maximal l -ideal contained in the given right l -ideal is semisimple. The hypernilpotent radical of an l -ring can be represented as the intersection of the right l -semiprime ideals satisfying the same condition.

Напомним, что идеал P кольца R называется первичным, если $P \neq R$ и для любых идеалов A и B кольца R из выполнения условий $AB \subseteq P$ и $A \not\subseteq P$ следует, что $B \subseteq P$ (см. [4, с. 90]). В [6] вводятся понятия l -первичного l -идеала, l -полупервичного l -идеала, а также радикала решёточно упорядоченных колец (l -колец). В [1] радикал кольца представляется в виде пересечения односторонних идеалов, для каждого из которых выполнено условие, что фактор-кольцо по наибольшему идеалу, содержащемуся в данном правом идеале, является полупростым. Там же наднильпотентный радикал кольца представляется в виде пересечения правых полупервичных идеалов с тем же условием.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 8, с. 169—181.

© 2008 Центр новых информационных технологий МГУ,

Издательский дом «Открытые системы»

В данной работе вводятся понятия правого l -первичного l -идеала и правого l -полупервичного l -идеала и доказывается, что для двусторонних l -идеалов эти определения совпадают с определениями М. А. Шаталовой из [6].

Основной целью работы является доказательство результатов, аналогичных результатам В. А. Андрунакиевича, А. В. Андрунакиевича в классе l -колец, а именно: радикал l -кольца представляется в виде пересечения правых l -идеалов, для каждого из которых выполняется условие, что фактор-кольцо по наибольшему l -идеалу, содержащемуся в данном правом l -идеале, является полупростым (теорема 2). Наднильпотентный радикал l -кольца представляется в виде пересечения правых l -полупервичных l -идеалов с тем же условием (теорема 3).

1. Введение

В работе все кольца предполагаются ассоциативными, не обязательно с единицей. Терминология и обозначения аналогичны терминологии из [3, 5]. Там же можно найти необходимые сведения об l -кольцах. Приведём здесь некоторые определения и факты.

Пусть R — ассоциативное решёточно упорядоченное кольцо (l -кольцо). Обозначим

$$R_+ = \{r \in R \mid r \geq 0\}, \quad |r| = r \vee 0 - r \wedge 0.$$

Для любых $a, b \in R$ выполняются неравенства

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |ab| \leq |a| |b|, \quad a + b = a \vee b + a \wedge b.$$

Для любых $x, a, b \in R$ выполняются равенства

$$x + (a \wedge b) = (x + a) \wedge (x + b), \quad x + (a \vee b) = (x + a) \vee (x + b). \quad (1)$$

(Правый) идеал I l -кольца R называется (правым) l -идеалом, если из выполнения условий $a \in I$, $x \in R$, $|x| \leq |a|$ следует, что $x \in I$.

Замечание 1. Если $a \in I_+$, то $|a| = a$ и из выполнения условий $x \in R$, $|x| \leq a = |a|$ следует, что $x \in I$.

То, что I является (правым) l -идеалом l -кольца R , мы будем обозначать

$$I \triangleleft R \quad (I \triangleleft_l R).$$

Пусть R, S — l -кольца. Гомоморфизм колец

$$f: R \rightarrow S$$

называется l -гомоморфизмом, если для любых $a, b \in R$ выполняются равенства

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b), \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

Если $I \triangleleft R$, то фактор-кольцо R/I l -кольца R по l -идеалу I (с отношением порядка $a + I \leq b + I$ тогда и только тогда, когда $a' \leq b'$ для некоторых $a' \in a + I$, $b' \in b + I$) является l -кольцом, а естественный гомоморфизм $\pi: R \rightarrow R/I$, $\pi(r) = r + I$, является l -гомоморфизмом.

Здесь и далее рассматриваются только l -гомоморфизмы и l -изоморфизмы.

Определение 1 (см. [6]). l -идеал P l -кольца R называется l -первичным, если $P \neq R$ и для любых $A \triangleleft R$, $B \triangleleft R$ справедливо, что если $AB \subseteq P$, то либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$.

Определение 2 (см. [6]). l -идеал S l -кольца R называется l -полупервичным, если фактор-кольцо R/S не содержит ненулевых нильпотентных l -идеалов.

2. Правый l -первичный l -идеал

Определение 3. Правый l -идеал P l -кольца R называется l -первичным, если $P \neq R$ и выполнено условие

$$\text{для любых } A \triangleleft_r R, B \triangleleft_r R, \text{ если } AB \subseteq P, \text{ то либо } A \subseteq P, \text{ либо } B \subseteq P, \quad (2)$$

где

$$AB = \left\{ z = \sum_{i=1}^n x_i y_i \mid x_i \in A, y_i \in B, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Замечание 2. Из условия $\{xy \mid x \in A, y \in B\} \subseteq P$ следует, что $AB \subseteq P$. Действительно, для любых $x_i \in A$, $y_i \in B$, $i = 1, \dots, n$, из выполнения условия $x_i y_i \in P$ следует, что $\sum_{i=1}^n x_i y_i \in P$, так как P — правый l -идеал.

Лемма 1. Правый l -идеал P l -кольца R является l -первичным в том и только в том случае, когда выполнено условие

$$\text{для любых } a, b \in R_+, \text{ если } aRb \subseteq P, \text{ то либо } a \in P, \text{ либо } b \in P. \quad (3)$$

Доказательство. Сначала докажем, что из условия (2) следует условие (3). Пусть $aRb \subseteq P$, $a \notin P$, $a, b \in R_+$ и

$$M = \{x \in R \mid |x| \leq ar \text{ для некоторого } r \in R_+\},$$

$$N = \{y \in R \mid |y| \leq br \text{ для некоторого } r \in R_+\}.$$

Тогда $M = \langle aR \rangle^r$, $N = \langle bR \rangle^r$ — правые l -идеалы, порождённые множествами aR и bR соответственно (т. е. наименьшие правые l -идеалы, содержащие множества aR и bR).

Действительно, пусть $x_1, x_2 \in M$, $|x_1| \leq ar_1$, $|x_2| \leq ar_2$, $r_1, r_2 \in R_+$. Так как $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| = a(r_1 + r_2)$, то $x_1 + x_2 \in M$. Для любого $r \in R$ имеем $|x_1 r| \leq |x_1| |r| \leq a(r_1 |r|)$, т. е. $x_1 r \in M$ для любых $r \in R$.

Наконец, если $z \in R$ и $|z| \leq |x_1|$, то $|z| \leq ar_1$, т. е. $z \in M$.

Пусть I — правый l -идеал l -кольца R , содержащий множество aR . Если $x \in M$, $|x| \leq ar$, $r \in R_+$, то из замечания 1 следует, что $x \in I$, так как $ar \in I_+$. Следовательно, $M \subseteq I$, т. е. M — наименьший правый l -идеал, содержащий aR . Для N утверждение доказывается аналогично.

Рассмотрим

$$MN = \left\{ z = \sum_{i=1}^n x_i y_i \mid x_i \in M, y_i \in N \right\}.$$

Пусть $z = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in MN$, $x_i \in M$, $y_i \in N$, причём $|x_i| \leq ar_i$, $|y_i| \leq br'_i$, $r_i, r'_i \in R_+$, $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$|z| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \sum_{i=1}^n ar_i br'_i.$$

Так как $ar_i b \in P$ и $P \triangleleft_r R$, то $ar_i br'_i \in P$. Поэтому $\sum_{i=1}^n ar_i br'_i \in P$ и $z \in P$ по замечанию 1. Следовательно, $MN \subseteq P$.

Покажем, что $M \not\subseteq P$. Для этого рассмотрим правый l -идеал, порождённый a :

$$\langle a \rangle^r = \{x \in R \mid |x| \leq na + ar, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, r \in R_+\}.$$

Покажем, что это действительно наименьший правый l -идеал, содержащий a . Пусть $x, y, r \in R$, $|x| \leq ma + ar_1$, $|y| \leq na + ar_2$, $m, n \in \mathbb{N} \cup 0$, $r_1, r_2 \in R_+$. Тогда

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq (m + n)a + a(r_1 + r_2),$$

т. е. $x + y \in \langle a \rangle^r$. Так как

$$|xr| \leq |x| |r| \leq (ma + ar_1)|r| = a(m|r| + r_1|r|) \in aR_+,$$

то $xr \in \langle a \rangle^r$. Наконец, если $|r| \leq |x|$, то $|r| \leq ma + ar_1$, т. е. $r \in \langle a \rangle^r$. Мы доказали, что это правый l -идеал, докажем, что он наименьший. Если $I \triangleleft_r R$ и $a \in I$, то для любого $r \in R_+$ верно, что $ar \in I$, и $na \in I$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $na + ar \in I$, откуда (с учётом замечания 1) следует, что если $|x| \leq na + ar$, то $x \in I$, т. е. $\langle a \rangle^r \subseteq I$.

Заметим, что

$$(\langle a \rangle^r)^2 = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i \mid x_i, y_i \in R, |x_i| \leq n_i a + ar_i, |y_i| \leq n'_i a + ar'_i, n_i, n'_i \in \mathbb{Z}, n_i \geq 0, n'_i \geq 0, r_i, r'_i \in R_+ \right\}.$$

Следовательно, если $d \in (\langle a \rangle^r)^2$, то

$$|d| \leq \sum_{i=1}^n (n_i n'_i a^2 + n_i a^2 r'_i + n'_i ar_i a + ar_i ar'_i)$$

для некоторых $n_i, n'_i \in \mathbb{Z}$, $r_i, r'_i \in R_+$, т. е.

$$|d| \leq a \left(\sum_{i=1}^n (n_i n'_i a + n_i ar'_i + n'_i r_i a + r_i ar'_i) \right) \in aR.$$

Отсюда видно, что $(\langle a \rangle^r)^2 \subseteq M$.

Так как $a \notin P$, то $\langle a \rangle^r \not\subseteq P$ и $(\langle a \rangle^r)^2 \not\subseteq P$, так как P — l -первичный правый l -идеал. Следовательно, $M \not\subseteq P$.

Так как $MN \subseteq P$, то из $M \not\subseteq P$ следует, что $N \subseteq P$. Но $(\langle b \rangle^r)^2 \subseteq N$ (доказывается так же, как утверждение $(\langle a \rangle^r)^2 \subseteq M$), следовательно, $b \in P$.

Докажем, что из условия (3) следует условие (2). Если $A \triangleleft_r R$, $B \triangleleft_r R$ и $AB \subseteq P$, где $A \not\subseteq P$, то существует элемент $x \in A$, такой что $x \notin P$. Тогда $a = |x| \in A_+$, так как A — правый l -идеал, и $a \notin P$, так как P — правый l -идеал. Если предположить, что и $B \not\subseteq P$, то найдётся $b \in B_+$, $b \notin P$. Но $aRb \subseteq AB \subseteq P$, что противоречит (3). $\square$

Докажем, что для двустороннего l -идеала определение 3 эквивалентно определению 1, т. е. правые l -идеалы могут быть заменены двусторонними.

Для начала докажем несколько лемм. В следующих трёх леммах R — l -кольцо, $a, b, c \in R_+$.

Лемма 2. Если $a \wedge b = 0$ и $a \wedge c = 0$, то $a \wedge (b + c) = 0$.

Доказательство. Так как

$$a + b = a \vee b + a \wedge b = a \vee b = b + (a - b) \vee 0$$

(последнее равенство следует из равенства (1)), то $a = (a - b) \vee 0$. Так как $c \geq 0$, то $c = c \vee 0$, и, ещё раз используя равенство (1), получаем

$$\begin{aligned} a \vee (b + c) &= (a - b) \vee c + b = (a - b) \vee (0 \vee c) + b = ((a - b) \vee 0) \vee c + b = \\ &= a \vee c + b = a + c - a \wedge c + b = a + b + c = a \vee (b + c) + a \wedge (b + c). \end{aligned}$$

То есть $a \wedge (b + c) = 0$. $\square$

Лемма 3. Если $a \wedge b = 0$, то $a \wedge (b + c) = a \wedge c$.

Доказательство. Из равенства (1) следует, что

$$a \wedge (b + c) = a \wedge c + (a - a \wedge c)(b + c - a \wedge c).$$

Так как $a \wedge c \leq a$, то $a - a \wedge c \geq 0$. Следовательно,

$$0 \leq (a - a \wedge c) \wedge b \leq a \wedge b = 0$$

и $(a - a \wedge c) \wedge b = 0$. Аналогично $c - a \wedge c \geq 0$, поэтому, используя равенство (1), получаем

$$0 \leq (a - a \wedge c) \wedge (c - a \wedge c) = -a \wedge c + a \wedge c = 0,$$

т. е. $(a - a \wedge c) \wedge (c - a \wedge c) = 0$.

Следовательно, по лемме 2

$$(a - a \wedge c) \wedge (b + c - a \wedge c) = 0,$$

и, используя ещё раз равенство (1), получаем $a \wedge (b + c) = a \wedge c$. $\square$

Лемма 4. Если $c \leq a + b$, то $c = c \wedge a + (c - c \wedge a) \wedge b$.

Доказательство. Из $c \leq a + b$ следует, что $c = c \wedge (a + b)$. Используя равенство (1), получаем

$$c = c \wedge (a + b) = c \wedge a + (c - c \wedge a) \wedge (a + b - c \wedge a).$$

Заметим, что $c \geq c \wedge a$ и $a \geq c \wedge a$, а также

$$(c - c \wedge a) \wedge (a - c \wedge a) = -c \wedge a + c \wedge a = 0$$

(мы ещё раз воспользовались равенством (1)). Поэтому из леммы 3 следует, что

$$(c - c \wedge a) \wedge (a - c \wedge a + b) = (c - c \wedge a) \wedge b.$$

Лемма доказана. $\square$

Теорема 1. Если $P \triangleleft R$, то условие (2) может быть заменено более слабым:

для любых $A \triangleleft R$, $B \triangleleft R$, если $AB \subseteq P$, то либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$, (4)

т. е. односторонние l -идеалы могут быть заменены двусторонними.

Доказательство. Пусть выполнено условие (4) и A, B — правые l -идеалы l -кольца R , такие что $AB \subseteq P$ и $A \not\subseteq P$.

Заметим, что двусторонний l -идеал $\langle A \rangle$, порождённый правым l -идеалом A в l -кольце R , имеет вид $\langle A \rangle = A + \langle RA \rangle$, где

$$\langle RA \rangle = \{x \in R \mid |x| \leq ra, r \in R_+, a \in A_+\}.$$

Действительно, пусть $a, b \in \langle A \rangle$, $a = a' + x$, $|x| \leq r_1 a_1$, $b = b' + y$, $|y| \leq r_2 a_2$, $x, y \in R$, $a', b' \in A$, $r_1, r_2 \in R_+$, $a_1, a_2 \in A_+$. Тогда $a \pm b = a' \pm b' + x \pm y$, причём $a' \pm b' \in A$ ($-b' \in A$, потому что $|-b'| = |b'|$) и

$$|x \pm y| \leq |x| + |y| \leq r_1 a_1 + r_2 a_2 \leq (r_1 + r_2)(a_1 + a_2),$$

$r_1 + r_2 \in R_+$, $a_1 + a_2 \in A_+$. Следовательно, $a \pm b \in \langle A \rangle$.

Для любого $r \in R$ справедливо $ar = a'r + xr$, причём $a'r \in A$, так как A — правый l -идеал. Так как $|xr| \leq |x| |r| \leq r_1 a_1 |r|$ и $a_1 |r| \in A_+$, то $ar \in \langle A \rangle$. Так как

$$\begin{aligned} |ra| &= |ra' + rx| \leq |ra'| + |rx| \leq |r| |a'| + |r| |x| \leq \\ &\leq |r| |a'| + |r| r_1 a_1 \leq (|r| + |r| r_1)(|a'| + a_1), \end{aligned}$$

причём $|r| + |r| r_1 \in R_+$, $|a'| + a_1 \in A_+$, то $ra \in \langle A \rangle$.

Пусть $r \in R_+$, $r \leq |a|$. Тогда

$$r \leq |a' + x| \leq |a'| + |x| \leq |a'| + r_1 a_1.$$

По лемме 4 имеем

$$r = r \wedge |a'| + (r - r \wedge |a'|) \wedge r_1 a_1.$$

Так как A — правый l -идеал l -кольца R , то из $|r \wedge |a'|| = r \wedge |a'| \leq |a'|$ следует, что $r \wedge |a'| \in A$. Оценим второе слагаемое:

$$|(r - r \wedge |a'|) \wedge r_1 a_1| \leq |r - r \wedge |a'|| \wedge |r_1 a_1| \leq |r_1 a_1| = r_1 a_1.$$

Следовательно, $(r - r \wedge |a'|) \wedge r_1 a_1 \in \langle RA \rangle$ и $r \in \langle A \rangle$.

Любой элемент $r \in R$ можно представить в виде $r = r_+ - r_-$, $r_+, r_- \in R_+$. Если $|r| \leq |a|$, то $r_+ \leq r_+ + r_- = |r| \leq |a|$, аналогично $r_- \leq |a|$, и из предыдущего

рассуждения следует, что $r_+, r_- \in \langle A \rangle$. Но мы доказали, что разность элементов из $\langle A \rangle$ является элементом из $\langle A \rangle$, поэтому $r \in \langle A \rangle$.

Мы доказали, что $\langle A \rangle$ — l -идеал l -кольца R . Пусть I — l -идеал l -кольца R , содержащий A . Пусть $a \in \langle A \rangle$, $a = a' + x$, $a' \in A$, $|x| \leq rb$, $x \in R$, $r \in R_+$, $b \in A_+$. Тогда $a', b \in I$, $rb \in I$, так как I — двусторонний l -идеал. Из замечания 1 следует, что $x \in I$, поэтому $a \in I$. Следовательно, $\langle A \rangle \subseteq I$, т. е. $\langle A \rangle$ — наименьший l -идеал, содержащий A .

Аналогично l -идеал, порождённый B , можно представить в виде $\langle B \rangle = B + \langle RB \rangle$. Пусть $x \in \langle A \rangle$, $y \in \langle B \rangle$.

Существуют $a_0, a_1 \in A_+$, $b_0, b_1 \in B_+$ и $r_1, r_2 \in R_+$, такие что $|x| \leq a_0 + r_1 a_1$, $|y| \leq b_0 + r_2 b_1$. Следовательно,

$$|xy| \leq |x| |y| \leq (a_0 + r_1 a_1)(b_0 + r_2 b_1) = a_0 b_0 + a_0 r_2 b_1 + r_1 a_1 b_0 + r_1 a_1 r_2 b_1 \in P,$$

так как $a_0 b_0 \in AB \subseteq P$; $a_0 r_2 = a_2 \in A$, т. е. $a_0 r_2 b_1 = a_2 b_1 \in AB \subseteq P$; $r_1 a_1 b_0 \in r_1 AB \subseteq r_1 P \subseteq P$; $a_1 r_2 = a_3 \in A$, т. е. $r_1 a_1 r_2 b_1 = r_1 a_3 b_1 \in r_1 AB \subseteq r_1 P \subseteq P$.

Из замечания 1 следует, что $xy \in P$, поэтому $\langle A \rangle \langle B \rangle \subseteq P$. Так как $\langle A \rangle \not\subseteq P$, то $\langle B \rangle \subseteq P$, т. е. $B \subseteq P$. Теорема доказана. $\square$

Определение 4. l -кольцо R называется l -первичным, если $\{0\}$ — l -первичный l -идеал.

Ясно, что всякий первичный l -идеал является l -первичным. Но l -первичный l -идеал может не являться первичным.

Пример 1 (см. [7, пример 1]). Пусть $R = \{(a, b) \mid a, b \text{ — целые числа}\}$. Порядок и сложение определяются покомпонентно:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \text{ тогда и только тогда, когда } a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2.$$

Умножение задаётся соотношением

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = ((a_1 + b_1)(a_2 + b_2), (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)).$$

В [7] показано, что R — ассоциативное решёточно упорядоченное кольцо без собственных l -идеалов. Так как $R^2 \neq \{0\}$, то R — l -первичное l -кольцо. Но первичным оно не будет, так как его кольцевой аннулятор состоит из элементов вида $(a, -a)$.

3. Радикал l -колец

Определение 5. Класс $\mathcal{R}$ l -колец называется радикальным, если выполняются следующие условия:

- 1) если $R \in \mathcal{R}$ и $\varphi: R \rightarrow S$ — l -гомоморфизм, то $\varphi(R) \in \mathcal{R}$;
- 2) каждое l -кольцо R содержит радикал $\rho(R)$ (т. е. $\rho(R) \triangleleft R$, $\rho(R) \in \mathcal{R}$ и если $I \triangleleft R$ и $I \in \mathcal{R}$, то $I \subseteq \rho(R)$);

- 3) для любого l -кольца R фактор-кольцо $R/\rho(R)$ является ρ -полупростым, т. е. если $I \in \mathcal{R}$ — l -идеал $R/\rho(R)$, то $I = 0$.

Кольца из $\mathcal{R}$ называются радикальными. Если $A \triangleleft B$ и $A \in \mathcal{R}$, то A называется радикальным.

Данное определение радикала аналогично радикалу в классе колец в смысле Куроша (см. [2, гл. 2]) и было дано М. А. Шаталовой в работе [6].

Предложение 1. Пусть ρ — радикал класса l -колец. Тогда для любого l -кольца R $\rho(R)$ можно представить в виде

$$\rho(R) = \bigcap \{Q \mid Q \triangleleft R, R/Q \in \mathcal{P}(\rho)\},$$

где $\mathcal{P}(\rho)$ — класс всех ρ -полупростых l -колец.

Доказательство. Пусть $Q \triangleleft R$ и $R/Q \in \mathcal{P}(\rho)$. Рассматривая естественный гомоморфизм $\varphi: R \rightarrow R/Q$, получим по условию 1), что $\varphi(\rho(R))$ — радикальное l -кольцо. Из условия 2) следует, что

$$\varphi(\rho(R)) \subseteq \rho(\varphi(R)) = \rho(R/Q) = 0,$$

т. е. $\rho(R) \subseteq Q$ для любого Q , такого что $R/Q \in \mathcal{P}(\rho)$. Следовательно,

$$\rho(R) \subseteq \bigcap \{Q \mid Q \triangleleft R, R/Q \in \mathcal{P}(\rho)\}.$$

С другой стороны, по условию 3) $\rho(R/\rho(R)) = 0$, т. е. $R/\rho(R) \in \mathcal{P}(\rho)$, из чего следует, что $\rho(R) \supseteq \bigcap Q$. Предложение доказано. $\square$

В [2, гл. 2] доказывается утверждение, аналогичное предложению 1, для колец. Доказательство для l -колец проводится так же, как для колец.

Определение 6. Если $I \triangleleft_r R$, то обозначим

$$I_g = \{x \in I \mid r|x| \in I \text{ для любого } r \in R_+\}.$$

Лемма 5. I_g — наибольший двусторонний l -идеал l -кольца R , содержащийся в I .

Доказательство. Покажем, что I_g — l -идеал.

Действительно, если $x_1, x_2 \in I_g$, то $x_1, x_2 \in I$ и $r|x_1| \in I$, $r|x_2| \in I$ для любого $r \in R_+$. Но тогда $x_1 + x_2 \in I$ и

$$r|x_1 + x_2| \leq r|x_1| + r|x_2| \in I.$$

Поэтому из замечания 1 следует, что $r|x_1 + x_2| \in I$, т. е. $(x_1 + x_2) \in I_g$.

Если $r_1 \in R$, то $|r_1 x_1| \leq |r_1| |x_1| \in I$, и из замечания 1 следует, что $r_1 x_1 \in I$. Для любого $r \in R_+$ имеем

$$r|r_1 x_1| \leq r|r_1| |x_1| = (r|r_1|)|x_1| \in I.$$

Таким образом, $r|r_1 x_1| \in I$ (замечание 1), т. е. $r_1 x_1 \in I_g$.

Кроме того, $x_1 r_1 \in I$, так как I — правый l -идеал. Для любого $r \in R_+$, так как $r|x_1| \in I$, то $r|x_1 r_1| \leq r|x_1| |r_1| \in I$. Поэтому из замечания 1 следует, что $r|x_1 r_1| \in I$, т. е. $x_1 r_1 \in I_g$.

Наконец, для любого $y \in R$, если $|y| \leq |x_1|$, то $y \in I$, так как I — (правый) l -идеал. Из $r|y| \leq r|x_1|$ следует, что $r|y| \in I$ для любого $r \in R_+$, т. е. $y \in I_g$.

Итак, I_g — l -идеал и $I_g \subseteq I$. Если $A \triangleleft R$ и $A \subseteq I$, то для любого $x \in A$ имеем $x \in I$ и $r|x| \in A \subseteq I$, так что $A \subseteq I_g$, и лемма полностью доказана. $\square$

Лемма 6. Для любого семейства $\Omega = \{I_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ правых l -идеалов l -кольца R имеем

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_\alpha)_g = \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha \right)_g = \left\{ x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha \mid r|x| \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha \text{ для любого } r \in R_+ \right\}.$$

Доказательство. Так как

$$(I_\alpha)_g = \{x \in I_\alpha \mid r|x| \in I_\alpha \text{ для любого } r \in R_+\},$$

то

$$\begin{aligned} \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_\alpha)_g &= \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \{x \in I_\alpha \mid r|x| \in I_\alpha \text{ для любого } r \in R_+\} = \\ &= \left\{ x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha \mid r|x| \in I_\alpha \text{ для любых } r \in R_+, \alpha \in \Lambda \right\} = \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha \right)_g. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 7. Для любого семейства $\Omega = \{P_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ l -идеалов l -кольца R имеем

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha = \bigcap \{Q^r \mid Q^r \triangleleft_r R, (Q^r)_g = P_\alpha \text{ для некоторого } \alpha \in \Lambda\}.$$

Доказательство. Все P_α входят в пересечение в правой части равенства, так как $(P_\alpha)_g = P_\alpha$, при этом каждый правый l -идеал из правой части равенства содержит по крайней мере один l -идеал из левой части равенства, поэтому пересечения совпадают. $\square$

Из предложения 1 и леммы 7 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть ρ — радикал класса l -колец. Тогда для любого l -кольца R имеет место равенство

$$\rho(R) = \bigcap \{Q^r \mid Q^r \triangleleft_r R, R/(Q^r)_g \in \mathcal{P}(\rho)\}.$$

4. l -полупервичный правый l -идеал и наднильпотентный радикал

Определение 7. Правый l -идеал S l -кольца R называется l -полупервичным, если для любого $A \triangleleft_r R$ из выполнения условия $A^2 \subseteq S$ (где $A^2 = \{ab \mid a, b \in A\}$) следует, что $A \subseteq S$.

l -первичный правый l -идеал является l -полупервичным. Действительно, из условия $A^2 \subseteq S$ следует, что

$$\left\{ z = \sum_{i=1}^n a_i b_i \mid a_i, b_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq S,$$

так как конечная сумма элементов правого l -идеала S принадлежит S .

Покажем, что для двустороннего l -идеала определение 7 совпадает с определением 2.

Лемма 8. Если S — двусторонний l -идеал l -кольца R , то S будет l -полупервичным, если для любого $A \triangleleft R$, такого что $A^2 \subseteq S$, выполняется $A \subseteq S$.

Доказательство. Пусть $S \triangleleft R$. Если $A \triangleleft_r R$ и $\langle A \rangle$ — l -идеал, порождённый A , то $\langle A \rangle = A + \langle RA \rangle$, где $\langle RA \rangle = \{y \mid |y| \leq ra, r \in R_+, a \in A_+\}$.

Доказательства аналогичны тем, которые приведены для теоремы 1.

Пусть $A^2 \subseteq S$. Для любых $x, y \in \langle A \rangle$ существуют $a_0, a_1, b_0, b_1 \in A_+, r_1, r_2 \in R_+$, такие что $|x| \leq a_0 + r_1 a_1, |y| \leq b_0 + r_2 b_1$. Следовательно,

$$|xy| \leq |x| |y| \leq (a_0 + r_1 a_1)(b_0 + r_2 b_1) = a_0 b_0 + a_0 r_2 b_1 + r_1 a_1 b_0 + r_1 a_1 r_2 b_1 \in S,$$

так как $a_0 b_0 \in A^2 \subseteq S; a_0 r_2 = a_2 \in A$, т. е. $a_0 r_2 b_1 = a_2 b_1 \in A^2 \subseteq S; r_1 a_1 b_0 \in r_1 A^2 \subseteq r_1 S \subseteq S; a_1 r_2 = a_3 \in A$, т. е. $r_1 a_1 r_2 b_1 = r_1 a_3 b_1 \in r_1 A^2 \subseteq r_1 S \subseteq S$.

Из замечания 1 следует, что $xy \in S$, поэтому, $\langle A \rangle^2 \subseteq S$. $\square$

Для дальнейшего доказательства нам потребуется лемма, аналогичная лемме 1, для l -первичного l -идеала.

Лемма 9. Правый l -идеал P l -кольца R является l -полупервичным в том и только в том случае, когда выполнено условие

$$\text{для любого } a \in R_+, \text{ если } aRa \subseteq P, \text{ то } a \in P. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть P — l -полупервичный правый l -идеал, $aRa \subseteq P, a \in R_+$. Предположим, что $a \notin P$. Пусть

$$M = \{x \in R \mid |x| \leq ar \text{ для некоторого } r \in R_+\}.$$

Тогда $M = \langle aR \rangle^r$ — правый l -идеал, порождённый множеством aR .

Действительно, если $x_1, x_2 \in M$, то $|x_1| \leq ar_1, |x_2| \leq ar_2$, где $r_1, r_2 \in R_+$. Тогда

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| = a(r_1 + r_2),$$

т. е. $x_1 \pm x_2 \in M$ и $|x_1 r| \leq |x_1| |r| \leq a(r_1 |r|)$, значит, $x_1 r \in M$ для любого $r \in R$.

Наконец, если $z \in R$ и $|z| \leq |x_1|$, то $|z| \leq ar_1$, т. е. $z \in M$.

Напомним, что

$$M^2 = \left\{ z = \sum_{i=1}^n x_i y_i \mid x_i, y_i \in M \right\}.$$

Пусть $z = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $x_i, y_i \in M$, причём $|x_i| \leq ar_i$, $|y_i| \leq ar'_i$, $r_i, r'_i \in R_+$, $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$|z| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \sum_{i=1}^n ar_i ar'_i.$$

Так как $ar_i a \in P$ и $P \triangleleft_r R$, то $M^2 \subseteq P$.

Покажем, что $M \not\subseteq P$. Действительно, рассмотрим главный правый l -идеал, порождённый a :

$$\langle a \rangle^r = \{x \in R \mid |x| < na + ar, n \in \mathbb{Z}_+, r \in R_+\}.$$

То, что он действительно имеет такой вид, доказывается в лемме 1. Заметим, что

$$(\langle a \rangle^r)^2 = \left\{ z = \sum_{i=1}^n x_i y_i \mid |x_i| = n_i a + ar_i, |y_i| = n'_i a + ar'_i \right\}.$$

Следовательно, если $z \in (\langle a \rangle^r)^2$, то

$$\begin{aligned} |z| &\leq \sum_{i=1}^n (n_i n'_i a^2 + n_i a^2 r'_i + n'_i ar_i a + ar_i ar'_i) = \\ &= a \sum_{i=1}^n (n_i n'_i a + n_i ar'_i + n'_i r_i a + r_i ar'_i) \in aR_+. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $(\langle a \rangle^r)^2 \subseteq M$. Так как $a \notin P$, то $\langle a \rangle^r \not\subseteq P$, и вследствие l -полупервичности P из $(\langle a \rangle^r)^2 \not\subseteq P$ следует, что $M \not\subseteq P$. Это противоречит l -полупервичности P .

Пусть выполнено условие (5). Пусть $A \triangleleft_r R$ и $A^2 \subseteq P$. Если предположить, что $A \not\subseteq P$, то найдется $a \in A_+$, $a \notin P$. Но $aRa \subseteq A^2 \subseteq P$, что противоречит (5). Утверждение доказано. $\square$

Теорема 3. Если $S \triangleleft R$, то для S определение 2 совпадает с определением 7.

Доказательство. Пусть выполняется определение 2, $A \triangleleft R$, $A^2 \subseteq S$. Тогда $A + S \triangleleft R$ и $((A + S)/S)^2 = 0$. Следовательно, $(A + S)/S$ — нильпотентный l -идеал l -кольца R/S , он равен нулю, т. е. $A + S \subseteq S$ и $A \subseteq S$.

Пусть выполняется определение 7, $A \triangleleft R$, $S \subseteq A$ и $(A/S)^n = 0$. Тогда $A^n \subseteq S$. Предположим, что $A \neq S$. Тогда существует элемент $a \in A$, такой что $a \notin S$. Из определения l -идеала следует, что $a_0 = |a| \notin S$. По лемме 9 $a_0 R a_0 \not\subseteq S$, т. е. существует элемент $r \in R$, такой что $a_0 r a_0 \notin S$. Так как $|a_0 r a_0| \leq |a_0| |r| |a_0| = a_0 |r| a_0$, то из замечания 1 следует, что $a_1 = a_0 |r| a_0 \notin S$, $a_1 \in A_+$. Следовательно, по лемме 9 существует элемент $r' \in R$, такой что $a_1 r' a_1 \notin S$. Аналогично a_1 получаем $a_2 = a_1 |r'| a_1 \notin S$, $a_2 \in A_+$. Таким же образом получаем $a_3, a_4, \dots, a_n \notin S$, причём

$$a_n = a_{i_1} r_1 a_{i_2} r_2 a_{i_3} \dots a_{i_m} r_m a_{i_{m+1}}, \quad a_{i_k} \in A_+, \quad r_k \in R_+, \quad m \geq n.$$

Так как A — l -идеал, то $a_n \in A^n = 0$, т. е. $a_n = 0$. Но $a_n \notin S$. Противоречие. Следовательно, $A = S$ и $A/S = 0$. $\square$

Лемма 10. Если I — l -первичный (или l -полупервичный) правый l -идеал, то и I_g — l -первичный (l -полупервичный) l -идеал.

Доказательство. Пусть I — l -первичный правый l -идеал, $A, B \triangleleft R$, $AB \subseteq I_g$, $A \not\subseteq I_g$. Тогда $B \subseteq I$, так как I — l -первичный идеал. По лемме 5 I_g — наибольший двусторонний l -идеал, содержащийся в I , поэтому $B \subseteq I_g$. Следовательно, I_g — l -первичный l -идеал.

Утверждение для l -полупервичного идеала доказывается аналогично. $\square$

Определение 8. Радикал ρ класса l -колец будем называть *наднильпотентным*, если для любого l -кольца R $\rho(R)$ содержит все нильпотентные l -идеалы l -кольца R .

Лемма 11. Если ρ — наднильпотентный радикал, то $\rho(R)$ является l -полупервичным l -идеалом l -кольца R и любой l -идеал Q , такой что R/Q — ρ -полупростое l -кольцо, также l -полупервичен.

Доказательство. Пусть Q — l -идеал l -кольца R , такой что R/Q — ρ -полупростое l -кольцо. Пусть A — l -идеал l -кольца R , такой что $A^2 \subseteq Q$. Сумма l -идеалов является l -идеалом, поэтому $(A+Q) \triangleleft R$. Так как $Q \triangleleft R$, то $Q \triangleleft (A+Q)$, следовательно, $(A+Q)/Q$ — l -идеал l -кольца R/Q . Действительно, $(A+Q)/Q$ является идеалом l -кольца R/Q и для любого $x \in R$ (т. е. для любого $x+Q \in R/Q$) из условия $|x| \leq |a|$ (т. е. $|x+Q| \leq |a+Q|$) для некоторого $a \in A+Q$ следует, что $x \in A+Q$, т. е. $x+Q \in (A+Q)/Q$.

При этом $((A+Q)/Q)^2 \subseteq Q/Q = 0$, так как для любых $a_1, a_2 \in A$, $q_1, q_2 \in Q$ имеем

$$(a_1 + q_1 + Q)(a_2 + q_2 + Q) = (a_1 a_2 + q_1 a_2 + a_1 q_2 + q_1 q_2 + Q) \subseteq Q.$$

Следовательно, $(A+Q)/Q$ — нильпотентный l -идеал, и он содержится в $\rho(R/Q)$. Так как кольцо R/Q ρ -полупросто, т. е. $\rho(R/Q) = 0$, то $(A+Q)/Q = 0$, и $A \subseteq Q$. Лемма доказана. $\square$

Теорема 4. Если ρ — наднильпотентный радикал класса l -колец, то для любого l -кольца R имеет место равенство

$$\rho(R) = \bigcap_{Q^r \in \Lambda} Q^r, \quad (6)$$

где Λ — множество всех l -полупервичных правых l -идеалов Q^r , для которых $R/(Q^r)_g$ — ρ -полупростое l -кольцо.

Доказательство. Из предложения 1 следует, что

$$\rho(R) = \bigcap \{Q \mid Q \triangleleft R, R/Q \in \mathcal{P}(\rho)\}.$$

Из леммы 11 следует, что если $Q \triangleleft R$, $R/Q \in \mathcal{P}(\rho)$, то l -идеал Q является l -полупервичным. Следовательно,

$$\rho(R) = \bigcap \{Q \mid Q \text{ — } l\text{-полупервичный } l\text{-идеал } l\text{-кольца } R, R/Q \in \mathcal{P}(\rho)\}.$$

Из леммы 7 получаем, что

$$\rho(R) = \bigcap \{Q^r \mid Q^r \triangleleft R, (Q^r)_g - l\text{-полупервичный } l\text{-идеал}, R/(Q^r)_g \in \mathcal{P}(\rho)\}. \quad (7)$$

Из леммы 10 следует, что если $Q^r \in \Lambda$, то $(Q^r)_g - l$ -полупервичный l -идеал. Поэтому правые l -идеалы из пересечения (6) входят в пересечение (7), т. е. пересечение (6) содержит пересечение (7). При этом любой правый l -идеал Q^r из (7) содержит l -идеал $(Q^r)_g$, принадлежащий пересечению (6), поэтому пересечение (7) содержит пересечение (6). Теорема доказана. $\square$

Автор благодарен А. В. Михалёву и М. А. Шаталовой за ценные консультации.

Литература

- [1] Андрунакиевич В. А., Андрунакиевич А. В. Односторонние идеалы и радикалы колец // ДАН СССР. — 1981. — Т. 259, № 1. — С. 11—15.
- [2] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.
- [3] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Мир, 1984.
- [4] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.
- [5] Фукс Л. Упорядоченные алгебраические системы. — М.: Наука, 1965.
- [6] Шаталова М. А. l_A - и l_I -кольца // Сиб. мат. журн. — 1966. — Т. 7, № 6. — С. 1383—1389.
- [7] Шаталова М. А. К теории радикалов в структурно упорядоченных кольцах // Мат. заметки. — 1968. — Т. 4, № 6. — С. 639—648.

