Нормализаторы свободных подгрупп свободных бернсайдовых групп нечётного периода $n \geqslant 1003$

В. С. АТАБЕКЯН
Ереванский государственный университет, Армения
e-mail: avarujan@ysu.am

УДК 512.54+512.543

Ключевые слова: свободные бернсайдовы группы, нормализатор подгруппы, многообразие n-периодических групп, неабелева простая группа.

Аннотация

Пусть $B(m,n)$ — свободная периодическая группа периода n произвольного ранга m. В работе доказывается, что для любого нечётного числа $n \geqslant 1003$ нормализатор любой нетривиальной подгруппы N группы $B(m,n)$ совпадает с N, если эта подгруппа N свободна в многообразии всех n-периодических групп. Из этого для всех простых $n > 997$ следует положительный ответ на вопрос, поставленный С. И. Адяном в «Коуровской тетради»: верно ли, что никакая собственная нормальная подгруппа группы $B(m,n)$ простого периода $n > 665$ не является свободной периодической группой? Этот результат усиливает аналогичный результат А. Ю. Ольшанского, снижая границу показателя n от $n > 10^{78}$ до $n \geqslant 1003$. При простых $665 < n \leqslant 997$ указанный вопрос по-прежнему открыт.

Abstract

V. S. Atabekyan, The normalizers of free subgroups in free Burnside groups of odd period $n \geqslant 1003$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 1, pp. 3—21.

Let $B(m,n)$ be a free periodic group of arbitrary rank m with period n. In this paper, we prove that for all odd numbers $n \geqslant 1003$ the normalizer of any nontrivial subgroup N of the group $B(m,n)$ coincides with N if the subgroup N is free in the variety of all n-periodic groups. From this, there follows a positive answer for all prime numbers $n > 997$ to the following problem set by S. I. Adian in the Kourovka Notebook: is it true that none of the proper normal subgroups of the group $B(m,n)$ of prime period $n > 665$ is a free periodic group? The obtained result also strengthens a similar result of A. Yu. Ol'shanskii by reducing the boundary of exponent n from $n > 10^{78}$ to $n \geqslant 1003$. For primes $665 < n \leqslant 997$, the mentioned question is still open.

Фактор-группа F_m/F_m^n, где F_m — абсолютно свободная группа произвольного (конечного или бесконечного) ранга m и n — натуральное число, обозначается через $B(m,n)$. Группа $B(m,n)$ свободна в многообразии всех n-периодических групп и называется свободной периодической или свободной бернсайдовой группой периода n и ранга m.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 1, с. 3—21.
© 2009 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

С. И. Адяном поставлен вопрос 7.1 из «Коуровской тетради» [15]: известно, что свободные периодические группы $B(m,n)$ простого периода $n > 665$ обладают многими свойствами, аналогичными свойствам абсолютно свободных групп (см. [2]). Верно ли, что никакая собственная нормальная подгруппа группы $B(m,n)$ не является свободной периодической группой?

Отметим известные в настоящее время свойства свободных периодических групп $B(m,n)$, аналогичные свойствам абсолютно свободных групп.

Как установлено С. И. Адяном, при $m > 1$ и для любого нечётного $n \geqslant 665$

- в группе $B(m,n)$ разрешима проблема сопряжённости (см. [2, теорема VI.3.5]);
- всякая коммутативная подгруппа группы $B(m,n)$ — циклическая группа (см. [2, теорема VI.3.3]);
- центр группы $B(m,n)$ тривиален (см. [2, теорема VI.3.3]);
- для любого конечного ранга $m > 1$ группа $B(m,n)$ имеет показательный рост (см. [2, теорема VI.2.5]);
- для любого конечного ранга $m > 1$ группа $B(m,n)$ неаменабельная (см. [6]);
- группа $B(2,n)$ содержит изоморфные копии свободных периодических групп $B(m,n)$ любого конечного ранга $m \geqslant 1$ (см. [2, теорема VI.3.7]);
- при $m > 65$ группа $B(m,n)$ содержит континуум различных нормальных подгрупп (см. [5]);
- при $m > 65$ (а также при $m > 1$ и составных нечётных $n = ks$, где $k \geqslant 665$ и $(k,s) = 1$) группа $B(m,n)$ не удовлетворяет условиям минимальности и максимальности для нормальных подгрупп (см. [5; 2, теорема VI.3.9]).

По этим результатам мы отсылаем также к работам [1, 3, 7, 16—18].

Некоторые результаты указанного характера получены другими авторами:

- при нечётных $n \geqslant 665$ и любом $m > 1$ группа $B(2,n)$ содержит изоморфную копию свободной периодической группы $B(\infty,n)$ бесконечного ранга [20];
- при нечётных $n \geqslant 1003$ любая нециклическая подгруппа группы $B(2,n)$ содержит изоморфную копию свободной периодической группы $B(\infty,n)$ (см. [9, 10, 12]);
- при нечётных $n > 10^{78}$ и конечных $m \geqslant 2$ группа $B(m,n)$ равномерно неаменабельная [25];
- при нечётных $n \geqslant 1003$ и $m \geqslant 2$ любая конечно порождённая нециклическая подгруппа группы $B(m,n)$ равномерно неаменабельная [13];
- при нечётных $n > 10^{78}$ и $m \geqslant 2$ каждый нормальный автоморфизм группы $B(m,n)$ внутренний (см. [21], аналогичный результат для абсолютно свободных групп доказан в [22, 23]);
- при нечётных $n \geqslant 1003$ и $m \geqslant 2$ группа $B(m,n)$ содержит континуум различных нормальных подгрупп и не удовлетворяет условиям минимальности и максимальности для нормальных подгрупп [11].

Несмотря на перечисленные сходства, полной аналогии с абсолютно свободными группами не следует ожидать. Например, абсолютно свободные группы являются гиперболическими, в то время как при $m > 1$ и нечётных $n \geqslant 665$ группы $B(m,n)$ таковыми не являются. Более того, согласно [2, теорема VI.2.13] группы $B(m,n)$ даже не могут быть заданы конечным множеством определяющих соотношений.

Положительный ответ на вопрос 7.1 [15] для достаточно больших нечётных n ($n > 10^{78}$) дал А. Ю. Ольшанский [24]. Он доказал [24, теорема 1.1], что при достаточно больших нечётных n нормализатор любой свободной n-периодической подгруппы N ранга $r \geqslant 1$ группы $B(m,n)$ совпадает с N. Если ранг r свободной подгруппы N равен единице, а $n \geqslant 665$ — нечётное число, то совпадение нормализатора подгруппы N с самой подгруппой N непосредственно следует из хорошо известной теоремы С. И. Адяна о том, что каждая конечная подгруппа группы $B(m,n)$ циклическая (см. лемму 2 ниже). Отметим также, что при достаточно больших составных n ($n > 2 \cdot 10^{77}$) утверждение указанной теоремы 1.1 из [24] было доказано ранее С. В. Ивановым в [14], однако это доказательство не применимо для простых показателей n.

Наша основная цель — доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 1003$ — произвольное нечётное число и N — нетривиальная подгруппа свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ произвольного (конечного или бесконечного) ранга m. Предположим, что подгруппа N изоморфна некоторой свободной периодической группе $B(r,n)$. Тогда N совпадает со своим нормализатором в группе $B(m,n)$.*

Согласно теореме 1 в утверждении теоремы 1.1 из [24] граница показателя n может быть снижена до значения $n \geqslant 1003$.

Следствие 1. *Пусть $n \geqslant 1003$ — произвольное нечётное число и N — нетривиальная нормальная подгруппа свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ произвольного ранга m. Тогда если N изоморфна некоторой свободной бернсайдовой группе $B(r,n)$, то $N = B(m,n)$.*

Отсюда немедленно следует положительный ответ на вопрос 7.1 [15] для всех простых $n > 997$. При простых $665 < n \leqslant 997$ вопрос по-прежнему открыт.

Как показано в [2, 4, 5, 11], группы $B(m,n)$ богаты нормальными подгруппами. Сопоставляя следствие 1 с теоремой 2 работы [11], получаем, что для любого нечётного $n \geqslant 1003$ и $m \geqslant 2$ группа $B(m,n)$ содержит континуум различных подгрупп, несвободных в многообразии всех n-периодических групп. С другой стороны, классическая теорема Нильсена—Шрайера утверждает, что любая подгруппа абсолютно свободной группы абсолютно свободна. Тем самым утвердительный ответ на вопрос С. И. Адяна выявляет существенное различие в свойствах свободных бернсайдовых и абсолютно свободных групп.

В [24] показано, что для обоснования теоремы 1 достаточно доказать, что если $N = B(|\mathcal{U}|, n)$ — свободная бернсайдова группа достаточно большого нечётного периода с базисом $\mathcal{U} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и слово $v = v(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ не является сопряжённым в $N = B(|\mathcal{U}|, n)$ со степенями порождающих $a_1, a_2, \ldots$, то существует неабелева простая фактор-группа N/L, такая что канонический образ порождающей a_1 в N/L имеет порядок n и образы v и a_1 не являются сопряжёнными относительно произвольного автоморфизма группы N/L (см. [24, лемма 2.3]). Мы докажем более сильную форму этого утверждения.

Предложение 1 (усиление леммы 2.3 из [24]). *Пусть* $N = B(|\mathcal{U}|, n)$ — *свободная бернсайдова группа нечётного периода* $n \geqslant 1003$ *с базисом* $\mathcal{U} = \{a_1, a_2, \ldots\}$. *Предположим, что слово* $v = v(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *не является сопряжённым в* $N = B(|\mathcal{U}|, n)$ *со степенями порождающей* a_1. *Тогда существует неабелева простая фактор-группа* N/L, *такая что*

1) *канонический образ порождающей* a_1 *в* N/L *имеет порядок* n;
2) $\psi(a_1 L) \neq v(a_1, a_2, \ldots, a_m)L$ *для любого автоморфизма* $\psi\colon N/L \to N/L$.

Для сравнения отметим, что согласно [11, теорема 3] группа $B(|\mathcal{U}|, n)$ нечётного периода $n \geqslant 1003$ при $|\mathcal{U}| \geqslant 2$ вполне аппроксимируется неабелевыми простыми группами (в каждой из которых образ порождающей a_1 имеет порядок n).

При доказательстве предложения 1 существенным образом используется статья [8], где для любого нечётного $n \geqslant 1003$ построена бесконечная группа периода n с циклическими подгруппами («монстр Тарского»).

В дальнейшем изложении мы без специальных ссылок будем использовать обозначения и терминологию монографии [2] и статьи [8].

1. Построение неабелевой простой группы

Модифицируем конструкцию бесконечной группы с циклическими подгруппами из [8] для получения фактор-группы N/L с указанными в предложении 1 свойствами. Не теряя общности, можно считать, что $N = B(m, n)$, где m — количество порождающих в записи слова $v = v(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ (поскольку $B(m, n)$ есть ретракт группы $B(|\mathcal{U}|, n)$).

Пусть $B(m, n, 0)$ — свободная группа с порождающими $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Для всякого натурального $\beta > 0$ через $B(m, n, \beta)$ обозначим группу с теми же образующими и с системой определяющих соотношений $\Big\{A^n = 1, \text{ где } A \in \bigcup\limits_{i \leqslant \beta} \mathcal{E}_i\Big\}$ (см. [2, VI.2.2]). Положим $a \rightleftharpoons a_1$, $b \rightleftharpoons a_2$. В дальнейшем запись $X \equiv Y$ означает графическое равенство слов X и Y.

Согласно [2, VI.2.4, VI.1.2] для слова $v = v(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ можно указать такое слово S и такой элементарный период E некоторого ранга $\gamma_0 \leqslant \beta + 1$, что слово E^q входит в некоторое слово из класса $\bar{\mathcal{M}}_{\gamma_0 - 1}$ и при некотором $0 < r \leqslant \frac{n+1}{2} + 46$ выполнено соотношение

$$v(a_1, a_2, \ldots, a_m) \overset{B(m,n,\beta)}{=} S E^r S^{-1}. \tag{1.1}$$

По условию предложения 1 $E \neq a$ в группе $B(m,n)$. Фиксируем указанный элементарный период E ранга γ_0. При $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \gamma_0$ полагаем $\Gamma_\alpha \rightleftharpoons B(m,n,\alpha)$.

Предположим, что $\alpha > \gamma_0$ и группы Γ_δ при $\delta < \alpha$ уже определены. Пусть Ψ_α есть множество всех элементарных периодов C ранга $\alpha - 1$, удовлетворяющих соотношению
$$C \overset{\alpha-2}{=} A^{-d}Z^{-1}B^{-d}ZA^dZ^{-1}A^dZ,$$
где A и B — минимизированные элементарные периоды некоторых рангов γ и β, $Z \in \mathcal{M}_{\alpha-2}$, $\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha-2$, $d = 191$ (см. [8, § 1]). Через Π_α обозначим множество всех тех приведённых форм коммутаторов (см. [8, определение 3.1])
$$[E^d, Z^{-1}E^dZ] \equiv E^{-d}Z^{-1}E^{-d}ZE^dZ^{-1}E^dZ,$$
которые принадлежат множеству Ψ_α, где E — указанный выше элементарный период ранга γ_0, а Z — произвольное слово из множества $\mathcal{M}_{\alpha-2}$ (вообще говоря, множество Π_α для данного α может быть и пустым). Пусть $\bar{\Pi}_\alpha$ — такое подмножество множества Π_α, что каждый элемент $C \in \Pi_\alpha$ сопряжён в группе $\Gamma_{\alpha-2}$ с одним и только одним словом D, таким что $D \in \bar{\Pi}_\alpha$ или $D^{-1} \in \bar{\Pi}_\alpha$. Подмножество $\bar{\Psi}_\alpha \subset \Psi_\alpha$ выберем так, чтобы выполнялись следующие два условия:

1) $\bar{\Pi}_\alpha \subset \bar{\Psi}_\alpha$;
2) каждый элемент $C \in \Psi_\alpha$ сопряжён в группе $\Gamma_{\alpha-2}$ с одним и только одним словом D, таким что $D \in \bar{\Psi}_\alpha$ или $D^{-1} \in \bar{\Psi}_\alpha$.

Через Φ_α обозначим множество слов, содержащее для каждого периода $C \in \bar{\Psi}_\alpha$ ровно два слова
$$C^{200}AC^{200}A^2 \cdots A^{n-1}C^{200}a, \tag{1.2}$$
$$C^{270}AC^{270}A^2 \cdots A^{n-1}C^{270}b, \tag{1.3}$$
а для каждого периода $C \in \bar{\Pi}_\alpha$ ещё одно слово
$$C^{340}AC^{340}A^2 \cdots A^{n-3}C^{340}A^{n-1}C^{340}A, \tag{1.4}$$
где A — некоторый фиксированный для данного $C \in \bar{\Psi}_\alpha$ элементарный период, участвующий в соотношении $C \overset{\alpha-2}{=} A^{-d}Z^{-1}B^{-d}ZA^dZ^{-1}A^dZ$.

В качестве группы Γ_α возьмём группу
$$\Gamma_\alpha \rightleftharpoons \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_m \;\middle|\; R = 1,\ F = 1,\ R \in \bigcup_{\beta \leqslant \alpha} \mathcal{E}_\beta,\ F \in \bigcup_{\beta \leqslant \alpha} \Phi_\beta \right\rangle, \tag{1.5}$$
а в качестве Γ возьмём группу
$$\Gamma \rightleftharpoons \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_m \;\middle|\; R = 1,\ F = 1,\ R \in \bigcup_{\beta > 0} \mathcal{E}_\beta,\ F \in \bigcup_{\beta \geqslant \gamma_0+1} \Phi_\beta \right\rangle. \tag{1.6}$$

Для группы Γ повторим все формальные определения из [8, § 1]. Все леммы, предложения и их доказательства работы [8] для построенной нами группы Γ остаются в силе.

Возникают изменения в формулировке и доказательстве леммы 4.1 из [8] в связи с новыми определяющими соотношениями вида (1.4). А именно, в формулировке леммы 4.1 из [8] необходимо

1) в первом предложении фрагмент «... $k = 200$ и $x = a$ для F вида (1.2), $k = 300$ и $x = b$ для F вида (1.3)» заменить на «... $k = 200$ и $x = a$ для F вида (1.2), $k = 270$ и $x = b$ для F вида (1.3) и $k = 340$ и $x = A$ для F вида (1.4)»;
2) последнее предложение заменить на предложение «Кроме того, для каждой пары слов (1.2) и (1.3) и для каждой тройки слов (1.2), (1.3) и (1.4), соответствующих данному периоду $C \in \bar{\Psi}_\alpha$, два указанных слова H и соответственно три указанных слова H можно выбрать так, чтобы соответствующие им периоды D и слова u_i при $1 \leqslant i \leqslant n-1$ были одинаковы».

Доказательство указанной версии леммы 4.1 для слов F вида (1.2) или (1.3) проводится так же, как раньше. Для слов F вида (1.4) всё нужно повторить, заменив лишь слово v_n, определённое в [8] соотношением (4.5), словом $v_n \rightleftharpoons G^{29}[G, A_1, G]_0 G^{29}$, а ссылки на лемму 3.6 из [8] заменить ссылками на лемму 3.5 из [8].

В соответствии с изменениями в лемме 4.1 из [8] естественным образом в определении 4.2 из [8] меняются и множества $\bar{\mathcal{H}}_\alpha$. Указанные изменения влекут за собой очевидные изменения там, где используется лемма 4.1 из [8], и там, где рассматриваются элементы множества $\bar{\mathcal{H}}_\alpha$.

Итак, для групп Γ и Γ_α, определённых соотношениями (1.5) и (1.6), справедливы все леммы из § 2—7 работы [8], в том числе лемма 4.1 с указанными выше поправками. Чтобы показать, что построенная группа Γ — неабелева простая группа, помимо сказанного, нам понадобится также доказанная в [11] лемма 4, которая является усиленным вариантом леммы 7.3 из [8].

Лемма 7.3′ [11, лемма 4]. *Для любого натурального числа $\tau > 2$ всякая нециклическая подгруппа Δ группы Γ содержит нециклическую подгруппу вида $T\langle A, Z^{-1}BZ\rangle T^{-1}$, где A и B — элементарные периоды некоторых рангов γ и β, причём $\gamma > \tau$ и $\beta > \tau$. Более того, A, B и Z можно выбрать так, чтобы коммутатор $(A^d, Z^{-1}B^dZ)$ был сопряжён в Γ с некоторым словом C или C^{-1}, где $C \in \bigcup_{\alpha>\tau} \bar{\Psi}_\alpha$.*

Необходимость этой леммы обусловлена тем, что мы накладываем определяющие соотношения вида (1.2), (1.3) начиная не с ранга 3, а с ранга $\gamma_0 + 1 \geqslant 3$.

Лемма 1. *Группа Γ — бесконечная простая группа, все максимальные подгруппы которой являются циклическими группами порядка n.*

Доказательство. То, что Γ — бесконечная группа, все максимальные циклические подгруппы которой имеют порядок n, доказывается так, как предложения 5.1, 5.2 в [8]. Пусть $\tau > \gamma_0$, а Δ — произвольная нециклическая подгруппа группы Γ. В силу леммы 7.3′ подгруппа Δ содержит нециклическую подгруппу вида $T\langle A, Z^{-1}BZ\rangle T^{-1}$, где A и B — элементарные периоды некоторых рангов γ и β, причём $\gamma > \tau$ и $\beta > \tau$. Так как $\tau > \gamma_0$, то в силу [8, леммы 7.4] можем заключить, что в группе Γ выполняются соотношения (1.2) и (1.3), в которых участвуют периоды A_1 и $C \overset{\Gamma}{=} [A_1^{-d}, Z_1^{-1}B_1^{-d}Z_1]$, причём подгруппы $\langle A_1, Z_1^{-1}B_1Z_1\rangle_\Gamma$ и $\langle A, Z^{-1}BZ\rangle_\Gamma$ являются сопряжёнными. Таким образом, $a, b \in \langle A_1, Z_1^{-1}B_1Z_1\rangle_\Gamma$, и поэтому $\Delta = \Gamma$, так как Δ содержит подгруппу, сопряжённую с подгруппой $\langle A_1, Z_1^{-1}B_1Z_1\rangle_\Gamma$.

Покажем, что Γ — простая группа. Пусть элемент Y принадлежит нормализатору $\langle X\rangle_\Gamma$, где X — произвольный элемент группы Γ. Тогда $|\langle X, Y\rangle_\Gamma| \leqslant n^2$, и поэтому $\langle X, Y\rangle_\Gamma$ — циклическая группа. Значит, если $\langle X\rangle_\Gamma$ — нормальная подгруппа, то X принадлежит центру группы Γ. С другой стороны, согласно [2, VI.3.1] (все леммы, используемые при доказательстве этого утверждения, справедливы и для Γ) централизатор любого неединичного элемента X группы Γ есть циклическая группа порядка n, т. е. центр Γ тривиален. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2.

1. *Если $X^\delta \overset{\Gamma}{=} TX^\varepsilon T^{-1}$, то подгруппа $\langle X^\varepsilon, T\rangle_\Gamma$ содержится в некоторой циклической подгруппе порядка n.*
2. *Для любого нечётного $n \geqslant 665$ справедливо, что если $X^\delta \overset{B(m,n)}{=} TX^\varepsilon T^{-1}$, то $\langle X^\varepsilon, T\rangle_{B(m,n)}$ — циклическая подгруппа группы $B(m, n)$.*

Доказательство. 1. Пусть X — произвольный элемент группы Γ. Из равенства $X^\delta \overset{\Gamma}{=} TX^\varepsilon T^{-1}$ следует, что элемент T принадлежит нормализатору подгруппы $\langle X^\delta\rangle_\Gamma = \langle X^\varepsilon\rangle_\Gamma$. Поэтому $|\langle X^\varepsilon, T\rangle_\Gamma| \leqslant n^2$, откуда следует, что $\langle X^\varepsilon, T\rangle_\Gamma$ — собственная подгруппа группы Γ. Следовательно, согласно лемме 1 $\langle X^\varepsilon, T\rangle_\Gamma$ — подгруппа циклической группы порядка n.

2. Из условия $X^\delta \overset{B(m,n)}{=} TX^\varepsilon T^{-1}$ следует, что $|\langle X, T\rangle_\Gamma| \leqslant n^2$. Следовательно, согласно теореме VII.1.8 из [2] о том, что каждая конечная подгруппа группы $B(m, n)$ циклическая, получаем, что $\langle X^\varepsilon, T\rangle_{B(m,n)}$ — циклическая подгруппа. □

2. Сопряжённые коммутаторы

Лемма 3. *Если E — элементарный период ранга γ, $Z_1, Z_2 \in \mathcal{M}_\lambda \cap \mathcal{A}_{\lambda+1}$ для некоторого $\lambda \geqslant \gamma$, $[E^d, Z^{-1}E^dZ] \neq 1$ и коммутаторы $[E^d, Z^{-1}E^dZ]$ и $[E^d, Z'^{-1}E^dZ']$ являются сопряжёнными в группе Γ_α, где $\alpha \geqslant \gamma$, то для некоторых целых чисел u и v или $Z'^{-1}E^{-d}Z' \overset{\Gamma}{=} E^uZ^{-1}E^{-d}ZE^v$, или $Z'E^{-d}Z'^{-1} \overset{\Gamma}{=} E^uZ^{-1}E^dZE^v$.*

Доказательство. По [8, лемма 3.2] найдём приведённые формы G и G' коммутаторов $[E^d, Z^{-1}E^dZ]$ и $[E^d, Z'^{-1}E^dZ']$. Поскольку G и G' являются сопряжёнными в $\Gamma_{\gamma-1}$ исходным коммутаторам, то в силу [8, леммы 7.2, 6.6] G и G' — элементарные периоды одного и того же ранга $\delta \geqslant \gamma + 1$, сопряжённые в группе $\Gamma_{\delta-1}$. Доказательство будем вести индукцией по α и будем следовать схеме доказательства леммы 7.4 в [8], учитывая, что в нашем случае $B \equiv B' \equiv E$, а A_1, A_2, A_1', A_2' (см. доказательство леммы 7.4 в [8]) являются циклическими сдвигами элементарного периода E ранга γ. Ниже все используемые понятия и обозначения взяты из доказательства леммы 7.4 в [8]. Как и в [8], можно считать, что $\delta \geqslant \alpha + 1$.

Допустим, что $\alpha = \gamma$. В случае 1a (см. [8, лемма 7.4]) пусть слова G и G' имеют вид (7.11) и (7.13) из [8] соответственно и выполнены все соотношения (7.11)—(7.16) из [8]. Соотношения (7.17) из [8] в нашем случае принимают вид

$$E \overset{\alpha-1}{=} TE^{\varepsilon}T^{-1}, \quad L' \overset{\alpha}{=} TE^{s}LE^{t}T^{-1}.$$

Из первого равенства, согласно лемме 2, следуют равенства $\varepsilon = 1$ и $T \overset{\Gamma}{=} E^r$ для некоторого r. Так как **Род**(W_i, W_i') при $i = 1, 2$, то согласно [2, II.5.21] σ и τ имеют одинаковый знак. Тогда из второго равенства (7.17) из [8] с учётом (7.16) и (7.12) из [8] получим равенство вида

$$E^{l}Z'E^{\delta d}Z'^{-1}E^{-l} \overset{\Gamma}{=} E^{r}E^{s}E^{k}ZE^{\delta d}Z^{-1}E^{-k}E^{t}E^{-r},$$

где $\delta = \pm 1$. Отсюда получаем, что для некоторых целых u и v имеет место равенство

$$Z'E^{-d}Z'^{-1} \overset{\Gamma}{=} E^{u}ZE^{-d}Z^{-1}E^{v}.$$

Случай, когда слово G имеет вид (7.18) доказывается аналогично, поскольку он сводится к рассматриваемому.

В случае 1b рассмотрим подслучай, когда ядро W_1' является согласованным с вхождением слова вида ${A_1'}^{-d}$. Поскольку **Род**(W_i, W_i') при $i = 1, 2$, то согласно [8, II.5.21] в соотношениях (7.15) из [8] имеем $\sigma = -1$. Тогда $L = S_2A_2^dS_2^{-1}$. Из первого равенства (7.20) в [8], т. е. из равенства $E \overset{\alpha-1}{=} TE^{\varepsilon}T^{-1}$ по лемме 2 получаем $T \overset{\Gamma}{=} E^r$ для некоторого r, а из второго равенства (7.21) и равенства (7.20) из [8] следует, что

$$E^{i}Z'^{-1}E^{-d}Z'E^{j} \overset{\alpha}{=} TE^{s}LE^{t}T^{-1}.$$

Воспользовавшись соотношениями (7.16) и (7.12) из [8], выводим, что

$$E^{i}Z'^{-1}E^{-d}Z'E^{j} \overset{\Gamma}{=} E^{r}E^{s}E^{k}ZE^{d}Z^{-1}E^{-k}E^{t}E^{-r}.$$

Поэтому для некоторых u и v имеем

$$Z'^{-1}E^{-d}Z' \overset{\Gamma}{=} E^{u}ZE^{d}Z^{-1}E^{v}.$$

Случай, когда ядро W_1' является согласованным с вхождением слова вида ${A_2'}^{d}$, рассматривается аналогично. Мы получаем, что $\sigma = 1$, $L = S_1A_1^{-d}S_1^{-1}$, и по (7.20), (7.21), (7.16), (7.12) из [8] для некоторых u и v имеем

$$Z'^{-1}E^{d}Z' \overset{\Gamma}{=} E^{u}ZE^{-d}Z^{-1}E^{v}.$$

Вычислив обратные, получаем

$$Z'^{-1}E^{-d}Z' \overset{\Gamma}{=} E^{-v}ZE^{d}Z^{-1}E^{-u}.$$

Таким образом, при $\alpha = \gamma$ из сопряжённости коммутаторов $[E^d, Z^{-1}E^dZ]$ и $[E^d, Z'^{-1}E^dZ']$ в группе Γ_α следует, что для некоторых целых чисел u и v или $Z'E^{-d}Z'^{-1} \overset{\Gamma}{=} E^uZE^{-d}Z^{-1}E^v$, или $Z'^{-1}E^{-d}Z' \overset{\Gamma}{=} E^uZE^dZ^{-1}E^v$. С другой стороны, из сопряжённости $[E^d, Z^{-1}E^dZ]$ и $[E^d, Z'^{-1}E^dZ']$ в группе Γ_α следует сопряжённость коммутаторов $[E^d, Z'E^dZ'^{-1}] \overset{0}{=} Z'[E^d, Z'^{-1}E^dZ']^{-1}Z'^{-1}$ и $[E^d, ZE^dZ^{-1}] \overset{0}{=} Z[E^d, Z^{-1}E^dZ]^{-1}Z^{-1}$ в группе Γ_α. Исходя из этого и применяя в предыдущих рассуждениях замены вида $Z'^{-1} \to Z'$ и $Z^{-1} \to Z$, окончательно получим, что или $Z'^{-1}E^{-d}Z' \overset{\Gamma}{=} E^uZ^{-1}E^{-d}ZE^v$, или $Z'E^{-d}Z'^{-1} \overset{\Gamma}{=}$ $\overset{\Gamma}{=} E^uZ^{-1}E^dZE^v$. В случае 1, т. е. при $\alpha = \gamma$, лемма доказана.

Рассмотрим случай 2: $\alpha > \gamma$. Повторив доказательство случая 2 леммы 7.4 из [8], мы получим сопряжённость периодов G и G' в ранге $\alpha - 1$. Тогда коммутаторы $[E^d, Z^{-1}E^dZ]$ и $[E^d, Z'^{-1}E^dZ']$ являются сопряжёнными в группе $\Gamma_{\alpha-1}$, и утверждение леммы верно по индуктивному предположению. Лемма доказана. $\square$

3. Исследование коммутаторов специального вида

Лемма 4. *При $1 \leqslant |k| \leqslant \frac{n-1}{2}$ и $\delta = \pm 1$ каждый из коммутаторов*

$$[a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}] \equiv a^{-k}b^{-9\delta}a^{-k}b^{9\delta}a^kb^{-9\delta}a^kb^{9\delta}$$

является минимизированным элементарным периодом ранга 2.

Доказательство. Пусть $\delta = 1$. Очевидно, $\mathsf{Пер}(2, [a^k, b^{-9}a^kb^9])$ непусто. При $1 \leqslant |k| \leqslant q - 1$ в слова $a^{-k}b^{-9}a^{-k}b^9a^kb^{-9}a^kb^9$ не входят активные вхождения, а при $q \leqslant |k| \leqslant \frac{n-1}{2}$ активными являются все ядра ранга 1 с основами $a^{\pm k}$. Отсюда, учитывая вид слов $[a^k, b^{-9}a^kb^9]$, получаем, что для произвольного периода B ранга 2 и любых порождающих вхождений V и W в целые слова $Y \in \mathsf{Цел}(X, 2, [a^k, b^{-9}a^kb^9])$ и $Y_1 \in \mathsf{Цел}(X_1, 2, B)$ из $\mathsf{ВзНорм}_1(V, W)$ и $l_2(W) \geqslant 9$ следует, что $\rho_{2,B}(X_1) = \rho_{2,[a^k,b^{-9}a^kb^9]}(X) = 4$ при $1 \leqslant |k| \leqslant 8$ и $\rho_{2,[a^k,b^{-9}a^kb^9]}(X) = 8 = \rho_{2,B}(X_1)$ при $9 \leqslant |k| \leqslant \frac{n-1}{2}$. Поэтому согласно [2, I.4.10] слова $[a^k, b^{-9}a^kb^9]$ являются элементарными периодами ранга 2. Поскольку очевидно, что $[a^k, b^{-9}a^kb^9]^q \in \mathcal{M}_2$ при $1 \leqslant |k| \leqslant \frac{n-1}{2}$, то каждый из периодов $[a^k, b^{-9}a^kb^9]$ ранга 2 минимизирован (см. [8, определение 2.2]). Случай $\delta = -1$ рассматривается аналогично. $\square$

Лемма 5. *Пусть A и B — минимизированные элементарные периоды рангов γ и β ($\gamma \leqslant \beta$) и $Z \in \mathcal{M}_{\beta-1}$. Тогда если коммутатор $[a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}]$ сопряжён в группе $B(m,n)$ с коммутатором $[A^d, Z^{-1}B^dZ]$, где $\delta = \pm 1$ и $1 \leqslant |k| \leqslant \frac{n-1}{2}$, то $k = \pm d$, $A \equiv a^\varepsilon$, $B \equiv a^\mu$, где $\varepsilon, \mu = \pm 1$ и слова $[a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}]$ и $[A^d, Z^{-1}B^dZ]$ являются сопряжёнными в группе $B(m, n, 1)$. Аналогичное заключение верно и при сопряжённости коммутаторов $[a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}]^{-1}$ и $[A^d, Z^{-1}B^dZ]$.*

Доказательство. Сначала заметим, что леммы 3.2, 7.2 и 6.6 из [8] остаются справедливыми, если в их формулировках и доказательствах эквивалентность в ранге α заменить на эквивалентность в смысле [2], а равенство слов в группе Γ_α заменить на равенство в группе $B(m,n,\alpha)$. По лемме 4 достаточно рассмотреть случай $[A^d, Z^{-1}B^dZ] \neq 1$ в группе $B(m,n)$. По [2, VI.2.4, IV.3.12] можно считать, что $Z \in \mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{A}_{\alpha+1}$ для некоторого $\alpha \geqslant \beta$. По [8, лемма 3.2] найдём приведённую форму G коммутатора $[A^d, Z^{-1}B^dZ]$. Согласно [8, лемма 7.2] тогда G — элементарный период некоторого ранга $\lambda \geqslant \gamma + 1$.

Пусть $\delta = 1$ (случай $\delta = -1$ рассматривается совершенно аналогично). Если $[a^k, b^{-9}a^kb^9]$ и $[A^d, Z^{-1}B^dZ]$ являются сопряжёнными в группе $B(m,n,\alpha)$, то, как следует из [8, определение 3.1], в $B(m,n,\alpha)$ сопряжены также $[a^k, b^{-9}a^kb^9]$ и G. В силу леммы 4 и [8, лемма 6.6] $\lambda = 2$, $\gamma = \beta = 1$ и периоды $[a^k, b^{-9}a^kb^9]$ и G являются сопряжёнными в ранге 1.

Согласно [2, IV.1.4] для произвольного вхождения V с основой A_1^d в целое слово G^{30} ранга 2, где A_1 — циклический сдвиг элементарного периода A ранга 1, выбранный согласно [8, определение 3.1], можно найти $U \in \textsf{Я}(1, G^{30})$, для которого $\textsf{Согл}(V, U)$. Пусть вхождение V выбрано так, что U — опорное ядро слова G^{30}. По [2, IV.1.7] для некоторого натурального $r \geqslant d - 44$ имеем $\textsf{Осн}(U) \equiv A_2A_1^rA_3$, где A_3 — начало, а A_2 — конец слова A_1. Применим [8, лемма 2.7]. Поскольку $r > 9$ и в слове $X_1 \in \textsf{Пер}(2, [a^k, b^{-9}a^kb^9])$ активными в ранге 1 могут быть лишь вхождения с основами a^t (при $|k| \geqslant q$ и $|t| \geqslant q$) и в X_1 не могут входить элементарные 10-степени ранга 1, кроме a^t (при $|k| \geqslant 9$ и $|t| \geqslant 10$), получаем, что $A_2A_1^rA_3 \equiv a^{\pm k \pm nt}$, где $1 \leqslant |k| \leqslant \frac{n-1}{2}$. Поэтому $A_1 \equiv a^{\pm 1}$, и тогда $A \equiv a^{\pm 1}$. Аналогичным образом показывается, что $B \equiv a^{\pm 1}$.

Предположим, что слово G имеет вид (3.2) из [8], и рассмотрим нормальное порождающее вхождение ранга 2 вида

$$G^{10}G_1 * a^{r_1}S_2a^dS_2^{-1}a^{r_2} * G_2G^{19}$$

в слово G^{30}, где

$$G \equiv G_1a^{r_1}S_2a^dS_2^{-1}a^{r_2}G_2.$$

По [8, лемма 2.7] можно указать такое порождающее вхождение

$$R * a^{r_1}S_2a^dS_2^{-1}a^{r_2} * S$$

в некоторое слово $Y_1 \in \textsf{Цел}(X_1, 2, [a^k, b^{-9}a^kb^9])$, что

$$\textsf{ВзНорм}_1(G^{10}G_1 * a^{r_1}S_2a^dS_2^{-1}a^{r_2} * G_2G^{19}, R * a^{r_1}S_2a^dS_2^{-1}a^{r_2} * S).$$

Поскольку активными вхождениями ранга 1 в слово $X_1 \in \textsf{Пер}(2, [a^k, b^{-9}a^kb^9])$ могут быть лишь вхождения с основами a^t (при $|k| \geqslant q$ и $|t| \geqslant q$), получаем, что $k = \pm d$. Случай, когда слово G имеет вид (3.1) из [8], рассматривается аналогичным образом.

Наконец, случай, когда сопряжены слова $[a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}]^{-1}$ и $[A^d, Z^{-1}B^dZ]$ доказывается тем же способом. Лемма доказана. □

4. «Почти» квазипериодические слова

Основной целью настоящего раздела является доказательство леммы 11.

Лемма 6 (ср. [8, леммы 3.5, 3.6]). *Пусть* $D \equiv [a^k, b^{-9\delta}a^k b^{9\delta}]$, *где* $1 \leqslant |k| \leqslant \leqslant \frac{n-1}{2}$ *и* $\delta = \pm 1$. *Для любого* t, $1 \leqslant t \leqslant n-1$, *определим*

$$u'_t \rightleftharpoons [D, a^t, D]_0 \equiv \begin{cases} a^{-k}b^{-9\delta}a^{-k}b^{9\delta}a^{2k}b^{-9\delta}a^k b^{9\delta}, & t = k, \\ Da^{t-k}b^{-9\delta}a^{-k}b^{9\delta}a^k b^{-9\delta}a^k b^{9\delta}, & t \neq k, \end{cases}$$

и предположим, что слово u_t *получается из слова* u'_t, *если в последнем показатели* $t-k$ *и* $2k$ *заменить их абсолютно наименьшими вычетами по модулю* n. *Тогда верны следующие утверждения*:

1) $D^q u_t D^q \in \mathcal{M}_1$;
2) $\neg\,\mathsf{Согл}(*D^q * u_t D^q, D^q u_t * D^q*)$; *всякое вхождение элементарной* q-*степени ранга* 2 *в слово* $D^q u_t D^q$ *является согласованным с* $*D^q * u_t D^q$ *или* $D^q u_t * D^q*$;
3) *в слово* $D^q u_t D^q$ *не входят элементарные* 9-*степени ранга* 3;
4) *вхождение* $*D^q * u_t D^q$ $(*D^q * u_t D^q)$ *продолжаемо нормированно вправо (соответственно влево) не более чем на два участка ранга* 2.

Доказательство. Пусть $\delta = 1$. Утверждение 1) немедленно следует из определения слов u_t и D. Утверждения 2) и 3) доказываются так же, как соответствующие пункты леммы 3.5 в [8], если заменить слово G на слово D и принять, что $\gamma = \beta = \alpha - 2 = 1$, $A_1 \equiv a^{\pm 1}$.

Чтобы доказать утверждение 4), сначала предположим, что $t \neq k$. Тогда

$$a^{-k} * b^{-9}a^{-k}b^9a^kb^{-9}a^kb^9D^q * a^{t-k}b^{-9}a^{-k}b^9a^kb^{-9}a^kb^9D^q \in \\ \in \mathsf{Норм}(2, D^q u'_t D^q, q+1),$$

и, очевидно, любое продолжение содержится во вхождении

$$*D^{q+1}a^{t-k} * b^{-9}a^{-k}b^9a^kb^{-9}a^kb^9D^q,$$

откуда следует утверждение 4) в случае $t \neq k$.

В случае $t = k$ имеем

$$a^{-k} * b^{-9}a^{-k}b^9a^kb^{-9}a^kb^9D^{q-1}a^{-k}b^{-9}a^{-k}b^9a^k * a^kb^{-9}a^kb^9D^q \in \\ \in \mathsf{Норм}(2, D^q u'_t D^q, q+1),$$

и любое продолжение содержится во вхождении

$$*D^q a^{-k}b^{-9}a^{-k}b^9a^k * a^kb^{-9}a^kb^9D^q.$$

Аналогично рассматривается случай $\delta = -1$. Лемма доказана. □

Лемма 7 (ср. [8, лемма 4.1]). *Пусть*

$$F \rightleftharpoons [a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}]^{340}a^t[a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}]^{340}a^{2t} \cdots a^{(n-1)t}[a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}]^{340}a^t,$$

где $1 \leqslant |k|, |t| \leqslant \frac{n-1}{2}$, $\delta = \pm 1$ *и* $(t, n) = 1$. *Тогда* F *является сопряжённым в группе* Γ_1 *с некоторым словом* H *вида*

$$H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \cdots u_{n-1} D^r u_n, \tag{4.1}$$

где $D \equiv [a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]$ — *элементарный период ранга* 2, $r = 340 - 2$, *и для указанного* H *выполнены следующие условия*:

1) *если* $V \in \mathsf{Я}(2, H) \cap \mathsf{Акт}(2, H)$ *или* $V \in \mathsf{МаксНорм}(2, H, 9)$, *то* V *является согласованным с одним из вхождений слов* D^r *в слово* H *и удовлетворяет неравенствам*
$$339 = r + 1 \leqslant l_2(V) \leqslant r + 5 = 343;$$
2) *никакие из указанных в* (4.1) *вхождений слова* D^r *в слово* H^t *при* $t > 0$ *не являются попарно согласованными*;
3) *слово* $D^r u_i D^r$ *при любом* $1 \leqslant i \leqslant n$ *не содержит нормированных вхождений элементарных* 9*-степеней ранга* 3;
4) *при* $1 \leqslant i, l \leqslant n - 1$ *для любых* s, t *из* $u_l \stackrel{1}{=} D^s u_i D^t$ *следует* $i = l$;
5) $H \in \mathcal{M}_2$.

Доказательство. Как и в предыдущих леммах, достаточно рассматривать случай $\delta = 1$. По лемме 4 $D \equiv [a^k, b^{-9} a^k b^9]$ — элементарный период ранга 2. Рассмотрим слова $v_i \rightleftharpoons D a^{it} D \stackrel{0}{=} D a^{it-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9$ при $1 \leqslant i \leqslant n - 1$ и $v_n \rightleftharpoons D a^t D \rightleftharpoons v_1$. Заменив в словах $D a^{it-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9$ показатели $i \cdot t - k$ их абсолютно наименьшими вычетами t_i по модулю n и произведя всевозможные сокращения в ранге 0, вместо каждого слова v_i получим новое слово u_i. Поскольку $(t, n) = 1$, существует единственное целое число $j \in [1, n-1]$, для которого $j \cdot t - k \equiv 0 \pmod{n}$. Тогда $u_j \equiv a^{-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^{t_j} b^{-9} a^k b^9$. При $i \neq j$ получим $u_i \equiv D a^{t_i} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9$. Окончательно получим, что $1 \leqslant |t_i| \leqslant \frac{n-1}{2}$ и $v_i \stackrel{1}{=} u_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ (по определению $t_n = t_1$). Положим

$$H \rightleftharpoons D^r u_1 D^r u_2 \cdots u_{n-1} D^r u_n.$$

Из определения слова H следует, что $H \stackrel{1}{=} D^{-1} F D$.

Заметим, что в слове $H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \cdots u_{n-1} D^r u_n$ активными в ранге 1 могут быть лишь вхождения, согласованные с вхождениями с основами $a^{\pm k}$ или a^{t_i} (если $|k| \geqslant q$ или $|t_i| \geqslant q$). Поэтому в силу неравенств $1 \leqslant |k|, |t_i| \leqslant \frac{n-1}{2}$ для любого $t > 0$ имеем $H^t \in \bar{\mathcal{M}}_1$ и $D^r u_i D^r \in \bar{\mathcal{M}}_1$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Из леммы 6 и [2, II.6.6, II.6.7] получаем, что слово H не содержит элементарных $(r+5)$-степеней ранга 2, и следовательно, $H \in \mathcal{M}_2$. Тем самым справедливо утверждение 5).

Докажем утверждение 1). Из утверждений 2) и 4) леммы 6 и [2, II.6.6, II.6.7] следует, что любое активное ядро $V \in \mathsf{Я}(2, H)$ является согласованным с одним из вхождений с основой D^r. Согласно определению слово H можно представить в виде

$$H \equiv D^r D_1 a^{t_1} D_2 D^r D_3 a^{t_2} \cdots a^{t_{n-2}} D_{2n-4} D^r D_{2n-3} a^{t_{n-1}} D_{2n-2} D^r D_{2n-1} a^{t_n} D_{2n},$$

где для любого натурального $s \in [1, n]$ слово D_{2s-1} есть начало слова D, кончающееся на b^9, а D_{2s} — конец слова D, начинающийся на b^{-9}. Поскольку при $1 \leqslant s \leqslant n$ имеем $t_s \neq -k (\mathrm{mod} n)$, то каждое из вхождений

$$U_s \rightleftharpoons D^r D_1 a^{t_1} \cdots a^{t_s} * D_{2s} D^r D_{2s+1} * a^{t_{s+1}} \cdots a^{t_{n-1}} D_{2n-2} D^r D_{2n-1} a^{t_n} D_{2n}$$

устойчиво при повороте произвольного активного вхождения, согласованного с некоторым U_t, где $t \neq s$, или с

$$*D^r D_1 * a^{t_1} \cdots a^{t_s} D_{2s} D^r D_{2s+1} a^{t_{s+1}} \cdots D_{2n-1} a^{t_n} D_{2n}.$$

Более того, согласно [2, I.4.13] при $1 \leqslant s \leqslant n-1$ имеем, что $U_s \in$ $\in \mathsf{Норм}(2, H, r+1)$. Отсюда следует, что если ядро V слова H является согласованным с одним из вхождений U_s или если $V \in \mathsf{МаксНорм}(2, H, 9)$, то оно содержит U_s. По утверждению 4) леммы 6 получаем $r+1 \leqslant l_2(U_s) \leqslant l_2(V) < r+5$, что доказывает утверждение 1).

Докажем утверждение 4). При $1 \leqslant i, l \leqslant n-1$ предположение $u_l \overset{1}{=} D^s u_i D^t$ немедленно приводит к эквивалентности $u_l \overset{1}{\sim} D^s u_i D^t$. Так как никакой поворот ранга 1 в словах u_l и $D^s u_i D^t$ не меняет количества ядер ранга 1, то $s = t = 0$. Аналогично, с учётом того, что при $i \neq l$ выполнено соотношение $t_i \neq t_l \pmod n$ (так как $(t, n) \neq 1$), получаем, что эквивалентность $u_l \overset{1}{\sim} u_i$ возможна только при $i = l$, что доказывает утверждение 4).

Утверждения 2) и 3) непосредственно следуют из пунктов 2) и 3) леммы 6. Лемма 7 доказана. □

Лемма 8 (ср. [8, лемма 4.4]).

1. *В слова H, определённые соотношением* (4.1), *не входят нормированные квазиэлементарные* 9-*степени ранга* 3.
2. *Пусть $P{*}E{*}Q$ и $R{*}E{*}S$ — вхождения в слова H^t и $Y \overset{2}{\sim} H^s$, где H — слово, определённое соотношением* (4.1), *и $t \cdot s \neq 0$. Тогда если вхождение $P{*}E{*}Q$ содержит не менее трёх идущих подряд слева направо активных ядер ранга* 2 *и $P * E * Q \in \mathsf{Прав}(2, H^t)$, то $\mathsf{Соот}_{H^{\pm 1}}(P * E * Q, f_2(R * E * S; Y, H^s)$ и $\mathsf{ВзНорм}_2(P * E * Q, R * E * S)$.*

Доказательство. 1. Пусть $P * E * Q$ — вхождение в слово

$$H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \cdots u_{n-1} D^r u_n,$$

$R * E * S$ — нормальная квазиэлементарная 9-степень ранга 3 в слове $Y \overset{2}{\sim} H_1^s$ и $\mathsf{ВзНорм}_2(P * E * Q, R * E * S)$. В соответствии с [8, лемма 4.3] можно считать, что $H_1 \in \bar{\mathcal{H}}_3$ и поэтому $H_1 \equiv D_1^{r'} u_1' D_1^{r'} u_2' \cdots u_{n-1}' D_1^{r'} u_n'$. Для слов H и H_1 выполнены условия 1)—4) леммы 6 и леммы 4.1 из [8]. Пусть V_i $(1 \leqslant i \leqslant 9)$ — идущие подряд слева направо соседние опорные ядра ранга 2 вхождения $R{*}E{*}S$. В силу условий 1) и 2) леммы 4.1 из [8] ядра $W_i \rightleftharpoons f_2(V_i; Y, H_1^s)$ являются согласованными с девятью последовательными D_1-вхождениями в слово H_1^s, между которыми лежат прослойки u_{k+i}'. Очевидно, $1 < k+1$, $k+2$, $k+3 < n$.

Повторив начало доказательства леммы 4.4 из [8], мы получим, что в группе Γ_1 слова D^ε и D_1 являются сопряжёнными. Тогда в Γ_1 сопряжёнными являются $D^\varepsilon \equiv [a^k, b^{-9}a^k b^9]^\varepsilon$ и некоторое слово $C_1 \in \bar{\Psi}_3$. По определению множества $\bar{\Psi}_3$ для некоторых периодов A и B выполнено равенство $C_1 \overset{1}{=} [A^d, Z^{-1}B^d Z]$. По лемме 5 тогда $A \equiv a^\varepsilon$, $B \equiv a^\mu$, где $\varepsilon, \mu \in \{-1, 1\}$, и $k = \pm d$.

Из $\mathsf{ВзНорм}_2(P * E * Q, R * E * S)$ согласно [2, IV.3.3] получаем, что

$$U_i \rightleftharpoons \varphi(V_i; R * E * S, P * E * Q) \in \mathsf{Я}(2, H) \cap \mathsf{Акт}(2, H).$$

По условию 1) леммы 7 имеем $339 \leqslant l_2(U_{k+2}) \leqslant 343$, а по [2, II.5.1] $l_2(U_{k+2}) = l_2(V_{k+2})$. Согласно [8, (4.7)]

$$q + 42 < l_2(W_{k+2}) \leqslant r' - 2 + 29 + 14 + 67 + 4 < \frac{n-1}{2} - 43.$$

Поэтому в силу [2, IV.2.12] $\mathsf{Род}(V_{k+2}, W_{k+2})$ и $l_2(W_{k+2}) = l_2(V_{k+2})$. Значит, $l_2(V_{k+2}) \leqslant r' - 2 + 29 + 14 + 67 + 4$. Поскольку при $r' = 200 - 60$ или $r' = 270 - 60$ имеем $r' - 2 + 29 + 14 + 67 + 4 < 339$, то неравенства

$$339 < l_2(V_{k+2}) \leqslant r' - 2 + 29 + 14 + 67 + 4$$

возможны только при $r' = 340 - 60$. Отсюда, опираясь на определения множеств $\bar{\mathcal{H}}_3$ и Φ_3, немедленно получаем, что период $C_1 \equiv [A^d, Z^{-1}B^d Z]$ является приведённой формой одного из коммутаторов $[E^d, {Z'}^{-1}E^d Z'] \in \Pi_3$. Тогда по [8, определение 3.1] A и B являются циклическими сдвигами фиксированного нами периода E ранга γ_0. Так как $A \equiv a^\varepsilon$, то получается противоречие с условием $E \neq a$ в $B(m, n)$ (см. (1.1)). Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2 доказывается точно так же, как вторая часть леммы 4.4 в [8] (см. [8, с. 963]). □

Лемма 9. *В слово H, определённое соотношением* (4.1), *не входят нормированные элементарные* 9*-степени ранга* 3.

Утверждение доказывается точно так же, как первый пункт леммы 4.5 в [8], но ссылку на лемму 4.4 из [8] надо заменить ссылкой на второе утверждение леммы 8.

Лемма 10. *Для слова H, определённого равенством* (4.1), *имеет место соотношение $H \in \mathcal{A}_3$.*

Доказательство. Согласно утверждению 5) леммы 7 $H \in \mathcal{M}_2$, а по лемме 9 и утверждению 1 леммы 8 имеем $\mathsf{Норм}(3, H, 9) = \varnothing$, что согласно [2, I.4.34] означает, что $H \in \mathcal{A}_3$. □

Лемма 11. *Пусть $\delta = \pm 1$, k и t — такие целые числа, что $k \not\equiv 0 \pmod{n}$ и $(t, n) = 1$. Тогда*

$$[a^k, b^{-\delta 9}a^k b^{\delta 9}]^{340} a^t [a^k, b^{-\delta 9}a^k b^{\delta 9}]^{340} a^{2t} \cdots a^{(n-1)t} [a^k, b^{-\delta 9}a^k b^{\delta 9}]^{340} a^t \neq 1$$

в группе Γ.

Доказательство. Можно считать, что $1 \leqslant |k|, |t| \leqslant \frac{n-1}{2}$. Согласно лемме 7 слово

$$F \equiv [a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^t [a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^{2t} \cdots a^{(n-1)t} [a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^t$$

является сопряжённым в группе Γ_1 с некоторым словом H вида

$$H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \cdots u_{n-1} D^r u_n,$$

а по лемме 10

$$H \in \mathcal{A}_3 \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}_i.$$

Поэтому в силу [2, IV.2.16] $H \neq 1$ в Γ. Следовательно, $F \neq 1$ в группе Γ. Лемма 11 доказана. □

5. Доказательство предложения 1

Покажем, что в качестве фактор-группы N/L, о существовании которой говорится в формулировке предложения 1, можно взять заданную равенством (1.6) группу Γ.

Согласно [2, IV.2.16] элемент $a \rightleftharpoons a_1$ имеет порядок n в группе $N/L \rightleftharpoons \Gamma$. Предположим, что для некоторого автоморфизма $\varphi\colon \Gamma \to \Gamma$ имеет место соотношение $\varphi(a_1) \overset{\Gamma}{=} v(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. По выбору элементарного периода E ранга γ_0 в группе $B(m, n, \beta)$ ($\gamma_0 \leqslant \beta + 1$) выполнено соотношение (1.1). Так как группа Γ есть гомоморфный образ группы $B(m, n, \beta)$, то $v(a_1, a_2, \ldots, a_m) \overset{\Gamma}{=} SE^r S^{-1}$. Умножив φ на внутренний автоморфизм $i_s\colon \Gamma \to \Gamma$ ($i_S(X) \rightleftharpoons S^{-1}XS$), получим автоморфизм $\psi\colon \Gamma \to \Gamma$, при котором $\psi(a_1) = \psi(a) = E^r$, где $(r, n) = 1$. Значит, для некоторого целого t имеет место равенство $\psi(a^t) = E$, где $(t, n) = 1$ и $1 \leqslant |t| \leqslant \frac{n-1}{2}$. Найдём такое $1 \leqslant |k| \leqslant \frac{n-1}{2}$, что $k \equiv d \cdot t \pmod{n}$. Пусть $\psi(b^9) = Z$. Тогда $\psi(a^k) = \psi(a^{t \cdot d}) = E^d$ и $\psi([a^k, b^{-9} a^k b^9]) \overset{\Gamma}{=} [E^d, Z^{-1} E^d Z]$. Согласно [2, VI.2.4, IV.3.12] можно считать, что $Z \in \mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{A}_{\alpha+1}$ для некоторого $\alpha \geqslant \gamma$.

Согласно [8, леммы 3.2, 7.2] одна из приведённых форм коммутатора $C \rightleftharpoons [E^d, Z^{-1} E^d Z]$ есть некий элементарный период G ранга δ, где $\gamma + 1 \leqslant \delta \leqslant \alpha + 9$. Тогда $G \in \Pi_\delta$. По определению множества $\bar{\Pi}_\delta$ можно найти такую приведённую форму D некоторого коммутатора $[E^d, Z'^{-1} E^d Z']$, что $D \in \bar{\Pi}_\delta$ и период G является сопряжённым в группе $\Gamma_{\delta-2}$ или со словом D, или со словом D^{-1}. Тогда

$$D \overset{\delta-2}{=} [E_1^d, wZ'^{-1} E^d Z' w^{-1}] \overset{0}{=} w[E^d, Z'^{-1} E^d Z'] w^{-1},$$

где $w \in \Theta(E, E_1)$.

Поскольку

$$[E^d, ZE^d Z^{-1}] \overset{0}{=} Z[E^d, Z^{-1} E^d Z]^{-1} Z^{-1}$$

и коммутатор и его приведённая форма являются сопряжёнными, то сопряжёнными являются или $[E^d, Z'^{-1}E^dZ']$ и $[E^d, Z^{-1}E^dZ]$, или $[E^d, Z'^{-1}E^dZ']$ и $[E^d, ZE^dZ^{-1}]$. Рассмотрим первый случай. Согласно лемме 3 для некоторых целых чисел u и v или $Z'^{-1}E^{-d}Z' \overset{\Gamma}{=} E^uZ^{-1}E^{-d}ZE^v$, или $Z'E^{-d}Z'^{-1} \overset{\Gamma}{=} E^uZ^{-1}E^dZE^v$.

Случай 1. Предположим, что

$$Z'E^{-d}Z'^{-1} \overset{\Gamma}{=} E^uZ^{-1}E^dZE^v.$$

Применив к обеим частям этого равенства автоморфизм ψ^{-1}, получим

$$\psi^{-1}(Z')a^{-k}\psi^{-1}(Z'^{-1}) \overset{\Gamma}{=} \psi^{-1}(E^u)b^{-9}a^kb^9\psi^{-1}(E^v).$$

Пусть

$$\psi^{-1}(E^u) \overset{\Gamma}{=} a^x, \quad \psi^{-1}(E^v) \overset{\Gamma}{=} a^y, \quad \psi^{-1}(Z') \overset{\Gamma}{=} T.$$

Тогда $Ta^{-k}T^{-1} \overset{\Gamma}{=} a^xb^{-9}a^kb^9a^y$ и $a^yTa^{-k}T^{-1}a^{-y} \overset{\Gamma}{=} a^{x+y}b^{-9}a^kb^9$. Очевидно, можно считать, что $|x+y| \leqslant \frac{n-1}{2}$. Если $x+y \not\equiv 0 \pmod n$, то слово $a^{x+y}b^{-9}a^kb^9$ является элементарным периодом ранга 2. Получается, что элементарный период $a^{x+y}b^9a^kb^{-9}$ ранга 2 является сопряжённым со степенью элементарного периода a ранга 1, что противоречит [8, лемма 6.6]. Если же $x+y \equiv 0 \pmod n$, то сопряжёнными являются a^{-k} и a^k, что противоречит лемме 2. Значит, рассматриваемый случай невозможен.

Случай 2. Предположим, что

$$Z'^{-1}E^{-d}Z' \overset{\Gamma}{=} E^uZ^{-1}E^{-d}ZE^v.$$

Тогда прямые вычисления показывают, что

$$[E^d, Z'^{-1}E^dZ'] \overset{\Gamma}{=} E^u[E^d, Z^{-1}E^dZ]E^{-u}.$$

Согласно определению множества Φ_δ имеем

$$D^{340}E_1D^{340}E_1^2\cdots E_1^{n-3}D^{340}E_1^{n-1}D^{340}E_1 \in \Phi_\delta,$$

и поэтому

$$D^{340}E_1D^{340}E_1^2\cdots E_1^{n-3}D^{340}E_1^{n-1}D^{340}E_1 \overset{\Gamma}{=} 1.$$

Следовательно,

$$(w^{-1}Dw)^{340}(w^{-1}E_1w)(w^{-1}Dw)^{340}(w^{-1}E_1w)^2\cdots$$
$$\cdots(w^{-1}E_1w)^{n-1}(w^{-1}Dw)^{340}(w^{-1}E_1w) \overset{\Gamma}{=} 1.$$

Таким образом,

$$C'^{340}EC'^{340}E^2\cdots C'^{340}E^{n-1}C'^{340}E \overset{\Gamma}{=} 1,$$

где $C' \rightleftharpoons [E^d, Z'^{-1}E^dZ']$. Сопрягая последнее равенство словом E^u и учитывая равенство $C' \overset{\Gamma}{=} E^uCE^{-u}$, окончательно получим

$$C^{340}EC^{340}E^2\cdots E^{n-2}C^{340}E^{n-1}C^{340}E \overset{\Gamma}{=} 1.$$

Значит, в силу равенств $\psi([a^k, b^{-9}a^kb^9]) \overset{\Gamma}{=} [E^d, Z^{-1}E^dZ] \rightleftharpoons C$ и $\psi(a^t) = E$ справедливы соотношения

$$\psi^{-1}(C^{340}EC^{340}E^2 \cdots E^{n-2}C^{340}E^{n-1}C^{340}E) \overset{\Gamma}{=}$$
$$\overset{\Gamma}{=} [a^k, b^{-9}a^kb^9]^{340}a^t[a^k, b^{-9}a^kb^9]^{340}a^{2t} \cdots a^{(n-1)t}[a^k, b^{-9}a^kb^9]^{340}a^t \overset{\Gamma}{=} 1.$$

Последнее равенство противоречит лемме 11.

Аналогичным образом, рассматривая сопряжённость коммутаторов $[E^d, Z'^{-1}E^dZ']$ и $[E^d, ZE^dZ^{-1}] \overset{0}{=} Z[E^d, Z^{-1}E^dZ]^{-1}Z^{-1}$ и меняя в предыдущих рассуждениях слово Z^{-1} на Z, мы получим

$$[a^k, b^9a^kb^{-9}]^{340}a^t[a^k, b^9a^kb^{-9}]^{340}a^{2t} \cdots a^{(n-1)t}[a^k, b^9a^kb^{-9}]^{340}a^t \overset{\Gamma}{=} 1.$$

Это равенство также противоречит лемме 11. Полученные противоречия опровергают существование указанного автоморфизма. Предложение 1 доказано.

6. Доказательство теоремы 1

Пусть $n \geqslant 1003$ — произвольное нечётное число и N — нетривиальная подгруппа свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ произвольного ранга m. Предположим, что подгруппа N изоморфна некоторой свободной периодической группе $B(r,n)$. Доказывая теорему 1 от противного, предположим, что N не совпадает со своим нормализатором в группе $B(m,n)$. Тогда существует такая подгруппа H, что $H \rhd N$ и H/N имеет простой порядок p. Пусть фактор-группа H/N порождается смежным классом gN, а $b_1, b_2, \ldots$ — свободные порождающие группы N.

Допустим, что для некоторого целого k имеет место равенство $gb_1g^{-1} = ub_1^ku^{-1}$, где $u \in N$. Тогда согласно утверждению 2 леммы 2 $\langle u^{-1}g, b_1\rangle_{B(m,n)}$ — циклическая подгруппа группы $B(m,n)$, и поэтому $\langle u^{-1}g, b_1\rangle_{B(m,n)} = \langle b_1\rangle_{B(m,n)}$, так как b_1 — свободный порождающий. Но тогда $g \in N$, что противоречит выбору g.

Таким образом, можно предположить, что элемент $gb_1g^{-1} \in N$ не является сопряжённым в группе N со степенями элемента b_1. Обозначив $gb_1g^{-1} = v$, выберем нормальную подгруппу $L \lhd N$, удовлетворяющую условиям предложения 1. Если бы подгруппа L была нормальной в H, то отображение $\psi\colon N/L \to N/L$, заданное правилом $\psi(xL) = gxg^{-1}L$ для любого $x \in N$, было бы автоморфизмом, при котором $\psi(b_1L) = vL$, что противоречит выбору L. Поэтому $L \ntrianglelefteq H$. Для завершения доказательства нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [9].

Лемма 12 (см. [9, леммы 2.1, 2.2]). *Пусть N — такая нормальная подгруппа группы H, что H/N — циклическая группа порядка p. Предположим также,* *что для некоторой нормальной в N, но не нормальной в H подгруппы L фактор-группа N/L — неабелева простая группа. Положим $K = \bigcap_{x\in H} xLx^{-1}$. Тогда существует такое прямое разложение $N/K = X_0 \times \ldots \times X_{p-1}$, что*

1) $X_i \cong N/L$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$;
2) $gX_ig^{-1} \in \{X_0, \ldots, X_{p-1}\}$ *для каждого* $g \in P = H/K$;
3) *действие группы P на $\{X_0, \ldots, X_{p-1}\}$ сопряжением является транзитивным*;
4) *если подгруппа X_0 содержит элемент a порядка n, то произведение pn делит порядок некоторого элемента из $P = H/K$.*

По выбору L канонический образ элемента a_1 имеет порядок n в группе $N/L \cong X_0$ (см. предложение 1). Тогда согласно лемме 12 в фактор-группе $P = H/K$ существует некий элемент порядка pn. Но это невозможно, поскольку P — фактор-группа периодической группы H периода n.

Полученные противоречия доказывают, что подгруппа N совпадает со своим нормализатором. Теорема 1 доказана.

Литература

[1] Адян С. И. О подгруппах свободных периодических групп нечётного показателя // Тр. МИАН СССР. — 1971. — Т. 112. — С. 64—72.

[2] Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. — М.: Наука, 1975.

[3] Адян С. И. Аксиоматический метод построения групп с заданными свойствами // Успехи мат. наук. — 1977. — Т. 32, № 1 (193). — С. 3—15.

[4] Адян С. И. О простоте периодических произведений групп // ДАН СССР. — 1978. — Т. 241, № 4. — С. 745—748.

[5] Адян С. И. Нормальные подгруппы свободных периодических групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — Т. 45, № 5. — С. 931—947.

[6] Адян С. И. Случайные блуждания на свободных периодических группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1982. — Т. 46, № 6. — С. 1139—1149.

[7] Адян С. И. Проблема Бернсайда о периодических группах и смежные вопросы // Совр. пробл. мат. — 2003. — Вып. 1. — С. 5—28.

[8] Адян С. И., Лысёнок И. Г. О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1991. — Т. 55, № 5. — С. 933—990.

[9] Атабекян В. С. Об аппроксимации и подгруппах свободных периодических групп. — Деп. в ВИНИТИ; № 5380-В86.

[10] Атабекян В. С. О простых и свободных периодических группах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1987. — № 6. — С. 76—78.

[11] Атабекян В. С. О периодических группах нечётного периода $n \geqslant 1003$ // Мат. заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 495—500.

[12] Атабекян В. С. О подгруппах свободных периодических групп нечётного периода $n \geqslant 1003$ // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — Т. 73, № 5. — С. 3—36.

[13] Атабекян В. С. Равномерная неаменабельность подгрупп свободных бернсайдовых групп нечётного периода // Мат. заметки. — 2009. — Т. 85, № 4. — С. 516—523.

[14] Иванов С. В. О подгруппах свободных бернсайдовых групп нечётного составного периода // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1989. — № 2. — С. 7—11.

[15] Коуровская тетрадь: Нерешённые вопросы теории групп. — Новосибирск, 1980.

[16] Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах. I, II, III // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1968. — Т. 32, № 1. — С. 212—244; т. 32, № 2. — С. 251—524; т. 32, № 3. — С. 709—731.

[17] Новиков П. С., Адян С. И. О коммутативных подгруппах и проблеме сопряжённости в свободных периодических группах нечётного порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1968. — Т. 32, № 5. — С. 1176—1190.

[18] Новиков П. С., Адян С. И. Определяющие соотношения и проблема тождества для свободных периодических групп нечётного порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1968. — Т. 32, № 4. — С. 971—979.

[19] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. — М.: Наука, 1989.

[20] Ширванян В. Л. Вложение группы $B(\infty, n)$ в группу $B(2, n)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1976. — Т. 40, № 1. — С. 190—208.

[21] Cherepanov E. A. Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents // Internat. J. Algebra Comput. — 2006. — Vol. 16, no. 5. — P. 839—847.

[22] Lubotzky A. Normal automorphisms of free groups // J. Algebra. — 1980. — Vol. 63, no. 2. — P. 494—498.

[23] Lue A. S.-T. Normal automorphisms of free groups // J. Algebra. — 1980. — Vol. 64, no. 1. P. 52—53.

[24] Ol'shanskii A. Yu. Self-normalization of free subgroups in the free Burnside groups // Groups, Rings, Lie and Hopf Algebras. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2003. — (Math. Its Appl.; Vol. 555). — P. 179—187.

[25] Osin D. V. Uniform non-amenability of free Burnside groups // Arch. Math. (Basel). — 2007. — Vol. 88, no. 5. — P. 403—412.