Решение проблемы ширины в свободных произведениях с объединением

И. В. ДОБРЫНИНА
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

УДК 519.4

Ключевые слова: группа, ширина вербальной подгруппы, свободное произведение с объединением.

Аннотация

В данной работе для свободных произведений групп с объединением решена проблема ширины.

Abstract

I. V. Dobrynina, Solution of the problem of expressibility in amalgamated products of groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 1, pp. 23—30.

The problem of expressibility is solved in amalgamated products of groups.

Следуя Ю. И. Мерзлякову [4], под шириной вербальной подгруппы $\varphi(G)$, определённой в группе G словом φ, будем понимать наименьшее $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, такое что всякий элемент подгруппы $\varphi(G)$ записывается в виде произведения не более чем m значений слова φ. Слово φ будем называть собственным, если $\varphi(G) \neq 1$ и $\varphi(G) \neq G$. Соответствующую подгруппу $\varphi(G)$ также будем называть собственной.

А. Ремтулла [6] доказал, что в нетривиальном свободном произведении $A * B$ ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна тогда и только тогда, когда $|A| \geqslant 3$, $|B| \geqslant 2$.

Теорема 1 [1]. *В свободных произведениях с объединением $A *_U B$, где U — нормальная подгруппа в A и в B и $|A : U| \geqslant 2$, $|B : U| \geqslant 3$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна.*

Теорема 2. *Пусть G — группа и H — её подгруппа, причём для любого $g \in G$ выполнено $g^{-1}H = gH$. Тогда H — нормальная подгруппа в G.*

Доказательство очевидно.

В [2] доказано, что для свободных произведений с объединением $A *_U B$, где $|A :: U| \geqslant 3$, $|B : U| \geqslant 2$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы, определённой коммутаторным словом φ, бесконечна ($|A :: U|$ — число двойных смежных классов A по U).

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 1, с. 23—30.

Теорема 3 [3]. *Пусть $G = A *_U B$, где $|A : U| \geqslant 2$ и в B существует такой элемент b, что $UbU \neq Ub^{-1}U$. Тогда ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна. Если $|A : U| \leqslant 2$ и $|B : U| \leqslant 2$, то ширина $\varphi(G)$ бесконечна тогда и только тогда, когда ширина $\varphi(U)$ бесконечна.*

В. Файзиев [5] доказал, что для свободных произведений с объединением $A *_U B$, где $|A : U| \geqslant 2$, $|B :: U| \geqslant 3$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна.

Теорема 4. *В свободных произведениях с объединением $A *_U B$, где $|A : U| \geqslant 2$, $|B : U| \geqslant 3$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна.*

Доказательство. Если для любых $a \in A$, $b \in B$ справедливо $aU = a^{-1}U$ и $bU = b^{-1}U$, то по теореме 2 U — нормальная подгруппа в A и в B, и утверждение теоремы следует из теоремы 1. Если $|A : U| \geqslant 2$, $|B : U| \geqslant 3$ и в A или в B существует такой элемент b, что $UbU \neq Ub^{-1}U$, то утверждение теоремы следует из теоремы 3. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай, когда существует такой элемент $b \in B(A)$, что $bU \neq b^{-1}U$, причём $UbU = Ub^{-1}U$. Для определённости считаем, что $b \in B$.

Прежде чем провести доказательство, введём следующие определения. Представим всякий элемент $f \neq u$, $u \in U$, из G в виде

$$f = g_1 g_2 \cdots g_m, \tag{1}$$

где $g_i \in A$ или $g_i \in B$, $g_i \notin U$ и g_i, g_{i+1} принадлежат разным сомножителям A, B. Элементы g_i назовём множителями слова f. Пусть

$$l = v_1 v_2 \cdots v_n —$$

представление (1) элемента l. Будем говорить, что в произведении fl имеет место слияние, если

$$fl = g_1 g_2 \cdots g_{m-1}(g_m v_1) v_2 \cdots v_n,$$

где $g_m v_1 \in A$ или $g_m v_1 \in B$ и $g_m v_1 \notin U$. Будем говорить, что в произведении fl имеет место сокращение, если

$$fl = g_1 g_2 \cdots g'_{m-1} v_2 \cdots v_n, \quad g'_{m-1} = g_{m-1} u, \quad u = g_m v_1, \quad u \in U,$$

причём между словами $g_1 g_2 \cdots g'_{m-1}$, $v_2 \cdots v_n$ возможно либо сокращение, либо слияние.

Пусть $f = g_1 g_2 \cdots g_m$ — представление (1) элемента f.

Если $g_i \in B$, $g_i = u_1 b u_2$, $g_i = u_3 b^{-1} u_4$, где $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$, то зафиксируем одно из таких представлений и будем писать $g_i = u' b^{\varepsilon} u''$, $u', u'' \in U$, $\varepsilon = \pm 1$. Далее заменим g_i на $u' b^{\varepsilon} u''$, причём если $1 < i < m$, то присоединяем u' к g_{i-1}, а u'' к g_{i+1}. Если $i = 1$, то $f = u' b^{\varepsilon} u'' g_2 \cdots g_m$, и u'' мы присоединяем к g_2, а u' оставляем. Если $i = m$, то $f = g_1 g_2 \cdots g_{m-1} u' b^{\varepsilon} u''$. В этом случае u' присоединяем к g_{m-1}, а u'' оставляем.

Такое представление назовём специальной формой элемента f. Если $f \in U$, то его специальная форма совпадает с этим элементом.

Рассмотрим случай, когда φ — собственное некоммутаторное слово. Если элемент b встречается в специальной форме слова x не менее двух раз, то отрезок слова x от одного появления b до другого назовём b-отрезком длины $2r-1$, где $2r-1$ — количество множителей между двумя b. Аналогично определим b^{-1}-отрезки для слова x. Обозначим через $\sigma_k(x)$ количество b-отрезков длины $2k-1$ в x и через $\sigma_k^*(x)$ количество b^{-1}-отрезков длины $2k-1$ в x. Пусть $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \varphi^*(x)$, где $\varphi^*(x)$ — коммутаторное слово. Пусть $e = \text{НОД}(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Так как слово φ собственное, $e \neq 1$.

Определим $\gamma(x)$ для данного представления слова x как количество b-отрезков длины $2k-1$, для которых не выполняется соотношение $\sigma_k(x) \equiv \sigma_k^*(x) \pmod e$.

Покажем, что для каждого фиксированного целого $p > 1$ функция $\gamma(x)$ является ограниченной на произведении числа p φ-значений на произвольно выбранном представлении x, но не является ограниченной на $\varphi(G)$. Для любого $x \in G$

$$\sigma_k(x) = \sigma_k^*(x^{-1}), \tag{2}$$

$$\gamma(x) = \gamma(x^{-1}), \tag{3}$$

$$\sigma_k(x) - \sigma_k^*(x) + \sigma_k(x^{-1}) - \sigma_k^*(x^{-1}) = 0. \tag{4}$$

Введём следующее обозначение: если δ_k, ϑ_k — функции, зависящие от параметра k, принимающего целые неотрицательные значения, то запись $\delta_k =_l \vartheta_k$ означает, что $\delta_k = \vartheta_k$ для всех значений параметра k, за исключением не более l значений.

Лемма 1. *Для любых двух слов $x, y \in G$ справедливо соотношение*

$$\sigma_k(xy) - \sigma_k^*(xy) =_l \sigma_k(x) - \sigma_k^*(x) + \sigma_k(y) - \sigma_k^*(y),$$

где $l = 9$.

Доказательство. Если одно из слов x, y принадлежит U или x, y принадлежат одновременно либо A, либо B, то доказательство очевидно. Рассмотрим остальные случаи.

1. Пусть $x = g_1 g_2 \cdots g_m$, $y = v_1 v_2 \cdots v_n$ — специальные формы элементов x, y и последний слог слова x и начальный слог слова y одновременно не лежат ни в A, ни в B. Тогда на стыке слов x, y мы не можем выделить или сократить элемент b. Следовательно, b-отрезки xy — это b-отрезки x плюс b-отрезки y плюс b-отрезок от последнего b в x до первого b в y. Следовательно, $\sigma_k(xy) =_1 \sigma_k(x) + \sigma_k(y)$. Аналогично $\sigma_k^*(xy) =_1 \sigma_k^*(x) + \sigma_k^*(y)$. Следовательно, $l = 2$.

2. Пусть в произведении xy имеет место слияние, т. е. $g_m v_1 \in A$ или $g_m v_1 \in B$ и $g_m v_1 \notin U$. Первый случай аналогичен случаю 1. Рассмотрим случай, когда $g_m v_1 \in B$. Если $g_m v_1 \in B$ и $g_m v_1 = u_1 b u_2 = u_3 b^{-1} u_4$, то вновь зафиксируем

одно из таких представлений, обозначим его $u'b^\varepsilon u''$ и заменим $g_m v_1$ на $u'b^\varepsilon u''$, присоединяя u' к g_{m-1}, а u'' к v_2. Положим $g'_{m-1} = g_{m-1}u'$, $t = b^\varepsilon$, $v'_2 = u''v_2$. Если такого преобразования сделать нельзя, то положим $g'_{m-1} = g_{m-1}$, $t = g_m v_1$, $v'_2 = v_2$. Обозначим $\bar{x} = g_1 g_2 \cdots g'_{m-1} t$, $y' = v'_2 \cdots v_n$. Теперь к $\bar{x}y'$ применим рассуждения случая 1. Имеем

$$\sigma_k(\bar{x}y') - \sigma^*_k(\bar{x}y') =_2 \sigma_k(\bar{x}) - \sigma^*_k(\bar{x}) + \sigma_k(y') - \sigma^*_k(y').$$

В зависимости от g_m, v_1, t возможны следующие случаи.

Пусть $v_1 = u_2 b$, $u_2 \in U$. Тогда $\sigma_k(y) =_1 \sigma_k(y')$, $\sigma^*_k(y) = \sigma^*_k(y')$.

1) Если $g_m = bu_1$, $t = b$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) = \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 3$.
2) Если $g_m = bu_1$, $t = b^{-1}$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) =_1 \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) =_1 \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 5$.
3) Если $g_m = bu_1$, $t \neq b, b^{-1}$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) =_1 \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) = \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 4$.
4) Если $g_m = b^{-1}u_1$, $t = b$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) =_1 \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) =_1 \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 5$.
5) Если $g_m = b^{-1}u_1$, $t = b^{-1}$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) = \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 3$.
6) Если $g_m = b^{-1}u_1$, $t \neq b, b^{-1}$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) =_1 \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 4$.
7) Если $g_m \neq b^{-1}u_1, bu_1$, $t = b^{-1}$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) =_1 \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 4$.
8) Если $g_m \neq b^{-1}u_1, bu_1$, $t = b$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) =_1 \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) = \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 4$.
9) Если $g_m \neq b^{-1}u_1, bu_1$, $t \neq b, b^{-1}$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) = \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 3$.

Следующие случаи 10)—18) получаются, если $v_1 = u_2 b^{-1}$, $u_2 \in U$. Они рассматриваются аналогично.

Рассмотрим случаи, когда $v_1 \neq u_2 b, u_2 b^{-1}, u_2 \in U$. Тогда $\sigma_k(y) = \sigma_k(y')$, $\sigma^*_k(y) = \sigma^*_k(y')$.

19) Если $g_m = bu_1$, $t = b$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) = \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 2$.
20) Если $g_m = bu_1$, $t = b^{-1}$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) =_1 \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) =_1 \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 4$.
21) Если $g_m = bu_1$, $t \neq b, b^{-1}$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) =_1 \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) = \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 3$.
22) Если $g_m = b^{-1}u_1$, $t = b$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) =_1 \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) =_1 \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 4$.
23) Если $g_m = b^{-1}u_1$, $t = b^{-1}$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) = \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 2$.
24) Если $g_m = b^{-1}u_1$, $t \neq b, b^{-1}$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) =_1 \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 3$.
25) Если $g_m \neq b^{-1}u_1, bu_1$, $t = b^{-1}$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) =_1 \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 3$.
26) Если $g_m \neq b^{-1}u_1, bu_1$, $t = b$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) =_1 \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) = \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 3$.
27) Если $g_m \neq b^{-1}u_1, bu_1$, $t \neq b, b^{-1}$, $u_1 \in U$, то $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x})$, $\sigma^*_k(x) = \sigma^*_k(\bar{x})$, $l = 2$.

3. Если на стыке слов x, y происходит сокращение, то мы получаем элемент $u \in U$, который присоединяем к последнему слогу в x, т. е. если $x = g_1 g_2 \cdots g_m$,

$y = v_1 v_2 \cdots v_n$, то $xy = g_1 g_2 \cdots g'_{m-1} v_2 \cdots v_n$, $g'_{m-1} = g_{m-1} u$, $u \in U$, и т. д. Последний шаг — слияние. Исключительным является случай, когда $xy = u$, $u \in U$. Тогда $x = uy^{-1}$, и результат очевиден.

Пусть $x_1 = g_1 g_2 \cdots g'_i$, $g'_i = g_i u$, $u \in U$, и $y_1 = v_{m-i+1} \cdots v_n$ — те части x, y, которые не сократились, т. е. между x_1, y_1 происходит слияние. Пусть $z = g_{i+1} \cdots g_m$, $z^{-1} = v_1 \cdots v_{m-i}$. Для x можно записать

$$\sigma_k(x) - \sigma_k^*(x) =_2 \sigma_k(x_1) - \sigma_k^*(x_1) + \sigma_k(z) - \sigma_k^*(z). \tag{5}$$

Аналогично

$$\sigma_k(y) - \sigma_k^*(y) =_2 \sigma_k(y_1) - \sigma_k^*(y_1) + \sigma_k(z^{-1}) - \sigma_k^*(z^{-1}). \tag{6}$$

Используя (4), из (5) и (6) получаем

$$\sigma_k(x) - \sigma_k^*(x) + \sigma_k(y) - \sigma_k^*(y) =_4 \sigma_k(x_1) - \sigma_k^*(x_1) + \sigma_k(y_1) - \sigma_k^*(y_1).$$

Используя случай 2, получаем

$$\sigma_k(x_1 y_1) - \sigma_k^*(x_1 y_1) =_5 \sigma_k(x_1) - \sigma_k^*(x_1) + \sigma_k(y_1) - \sigma_k^*(y_1).$$

Таким образом,

$$\sigma_k(xy) - \sigma_k^*(xy) =_9 \sigma_k(x) - \sigma_k^*(x) + \sigma_k(y) - \sigma_k^*(y).$$

Мы показали, что для любых представлений x, y, xy лемма справедлива. □

Лемма 2. *Для любых двух слов $x, y \in G$ справедливо неравенство*

$$\gamma(xy) \leqslant \gamma(x) + \gamma(y) + 9.$$

Данный результат непосредственно следует из леммы 1.

Лемма 3. *Для любого коммутатора $[x, y] \in G$ справедливо неравенство*

$$\gamma([x, y]) \leqslant 27.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{gathered}
\sigma_k([x,y]) - \sigma_k^*([x,y]) =_9 \sigma_k(x^{-1}y^{-1}) - \sigma_k^*(x^{-1}y^{-1}) + \sigma_k(xy) - \sigma_k^*(xy), \\
\sigma_k(x^{-1}y^{-1}) - \sigma_k^*(x^{-1}y^{-1}) =_9 \sigma_k(x^{-1}) - \sigma_k^*(x^{-1}) + \sigma_k(y^{-1}) - \sigma_k^*(y^{-1}), \\
\sigma_k(xy) - \sigma_k^*(xy) =_9 \sigma_k(x) - \sigma_k^*(x) + \sigma_k(y) - \sigma_k^*(y).
\end{gathered}$$

Эти три равенства вместе с равенством (2) дают $\sigma_k([x,y]) - \sigma_k^*([x,y]) =_{27} 0$, т. е. $\gamma([x,y]) \leqslant 27$. □

Лемма 4. *Для любого слова $x \in G$ справедливо соотношение*

$$\gamma(x^e) \leqslant 20.$$

Доказательство. Если $x \in U$, $x \in A$ или $x \in B$, то доказательство очевидно. Рассмотрим остальные случаи. Пусть для элемента x^e имеем $x^e = z^{-1} y^e z$, где специальная форма y начинается и заканчивается на элементы из разных сомножителей A, B.

Если $y \in A$ (или $y \in B$), то $\sigma_k(y^e) = \sigma_k^*(y^e) = 0$. В остальных случаях $\sigma_k(y^e) =_1 e\sigma_k(y^e)$ или $\sigma_k^*(y^e) =_1 e\sigma_k^*(y^e)$. Следовательно, из

$$\sigma_k(x^e) - \sigma_k^*(x^e) \equiv_{18} \sigma_k(y^e) - \sigma_k^*(y^e) \pmod e$$

получаем неравенство $\gamma(x^e) \leqslant 20$. □

Очевидно, что для любой группы G e-я степень каждого элемента из G есть φ-значение. Положим

$$z_j = (ab)^e(ab^{-1})^{2e}(ab)^e(ab^{-1})^{3e}(ab)^e \cdots (ab^{-1})^{je}(ab)^e,$$

где $b^{-1} \neq b$. При этом $z_j \in G$ для любого j. Кроме того, $\gamma(z_j) \geqslant j-1$. Здесь один и только один b-отрезок длины $2ei+1$, $i = 2, 3, \ldots, j$, исключая b^{-1}-отрезки этих длин. Следовательно, $\varphi(G)$ содержит элементы произвольно больших значений γ. Слово $\varphi^*(x)$ коммутаторное, поэтому оно записывается в виде произведения s коммутаторов для некоторого целого $s = s(\varphi^*)$. По леммам 2 и 3

$$\gamma\big(\varphi^*(x)\big) \leqslant 27s + 9(s-1).$$

Так как e делит r_i, то $\gamma(x_i^r) \leqslant 20$ по лемме 4. Следовательно,

$$\gamma\big(\varphi(x)\big) \leqslant 20n + 9n + 27s + 9(s-1) = 29n + 36s - 9,$$

и если x — произведение m φ-значений, то

$$\gamma(x) \leqslant (29n + 36s - 9)m + 9(m-1) = 29nm + 36sm - 9.$$

Если задано φ, то определены и целые n и s. Но γ может быть сколь угодно большим. Следовательно, мы доказали теорему для собственного некоммутаторного слова φ.

Покажем, что теорема справедлива и для коммутаторных слов. Пусть, как и раньше, специальная форма слова x есть $g_1g_2\cdots g_m$. Пусть (x,b) указывает кратность b в x, т. е. количество b в специальной форме x. Аналогично пусть (x,b^{-1}) — кратность b^{-1} в x. Положим $w(x) = (x,b) - (x,b^{-1})$. Тогда $w(x) + w(x^{-1}) = 0$

Лемма 5. *Для любых $x, y \in G$ справедливы неравенства*

$$w(x) + w(y) - 3 \leqslant w(xy) \leqslant w(x) + w(y) + 3.$$

Доказательство. Если одно из слов x, y принадлежит U или x, y принадлежат либо A, либо B, то доказательство очевидно.

Пусть $x = g_1g_2\cdots g_m$, $y = v_1v_2\cdots v_n$ в специальных формах.

Случай 1. Пусть в слове xy нет ни слияния, ни сокращения. В этом случае количество b в xy равно количеству b в x плюс количество b в y. Следовательно, $w(xy) = w(x) + w(y)$.

Случай 2. Пусть слово xy на стыке имеет слияние. Используя доказательство леммы 1, запишем $\bar{x} = g_1g_2\cdots g'_{m-1}t$, $y' = v'_2\cdots v_n$, $\bar{x}y'$ на стыке не имеет ни объединений, ни сокращений. Поэтому применим случай 1. Таким образом, $w(xy) = w(\bar{x}) + w(y')$.

Так как только один множитель v_1 убирается при переходе от y к y', имеем $w(y') - 1 \leqslant w(y) \leqslant w(y') + 1$. Так как при замене x на $\bar{x}$ количество b может измениться не более чем на 2, то $w(\bar{x}) - 2 \leqslant w(xy) \leqslant w(\bar{x}) + 2$. Таким образом,

$$w(\bar{x}) + w(y') - 3 \leqslant w(x) + w(y) \leqslant w(\bar{x}) + w(y') + 3,$$

или

$$w(xy) - 3 \leqslant w(x) + w(y) \leqslant w(xy) + 3.$$

В общем случае произведение xy влечёт за собой сокращение и слияние.

Пусть $z = g_{i+1} \cdots g_m$, $z^{-1} = v_1 \cdots v_{m-i}$ и g_i, v_{m-i+1} сливаются. Как и раньше, запишем $x_1 = g_1 g_2 \cdots g'_i$, $y_1 = v_{m-i+1} \cdots v_n$. Тогда $w(x) = w(x_1) + w(z)$. Аналогично $w(y) = w(y_1) + w(z^{-1})$. Поэтому $w(x) + w(y) = w(x_1) + w(y_1)$. По случаю 2 имеем

$$w(x_1 y_1) - 3 \leqslant w(x_1) + w(y_1) \leqslant w(x_1 y_1) + 3.$$

Таким образом, $w(xy) - 3 \leqslant w(x) + w(y) \leqslant w(xy) + 3$. □

Лемма 6. *Для любых $x, y \in G$ справедливо неравенство*

$$|w(xy)| \leqslant |w(x)| + |w(y)| + 3.$$

Этот результат непосредственно следует из леммы 5.

Лемма 7. *Для любого коммутатора $[x, y] \in G$ справедливо неравенство*

$$|w([x, y])| \leqslant 9.$$

Доказательство. Результат получается тремя последовательными применениями леммы 5. □

Лемма 8. *Группа G имеет бесконечную ширину для любого собственного коммутаторного слова φ.*

Доказательство. Так как собственное коммутаторное слово φ может быть представлено в виде произведения s коммутаторов для некоторого целого $s = s(\varphi)$, то любой элемент z, являющийся произведением m φ-значений, должен удовлетворять неравенству

$$|w(z)| \leqslant 12sm - 3 \tag{7}$$

по леммам 6 и 7. Выберем произвольный элемент $a \in A$, $a \notin U$. Рассматривая, если необходимо, сопряженный, считаем, что $\varphi(G_1)$, $G_1 = \langle a, b \rangle \subset G$, содержит элемент

$$g = a^{m_1} b^{n_1} \cdots a^{m_r} b^{n_r},$$

где $a^{m_i}, b^{n_i} \neq u$, $u \in U$, $i = \overline{1, r}$. Так как g — коммутаторное слово, то r не меньше 2.

Пусть $b^{n_i} = u' b u''$, $u', u'' \in U$. Заменим всюду b^{n_i} на $u' b u''$. Тогда $|w(g)| > 0$ и $|w(g^t)| \geqslant t$ для всякого положительного целого числа t, так как для произведения gg применима лемма 5.

Если $w(g) = 0$, то выберем γ следующим образом: $b^{n_r+\gamma} = bu$, $u \in U$.

Положим $g_1 = b^{-\gamma} g b^{\gamma}$ и $g_t = b^{-\gamma} g_{t-1} g b^{\gamma} = b^{-\gamma t}(gb^{\gamma})^t$ для $t > 1$. Очевидно, $g_t \in \varphi(G)$. Таким образом, $w(g) = 0$ и $w(gb^{\gamma}) \neq 0$.

По лемме 5 для любого положительного t справедливо равенство

$$\left|w\big((gb^{\gamma})^t\big)\right| = t|w(gb^{\gamma})|.$$

Нас интересует значение $|w|$ от $g_t = b^{-\gamma t}(gb^{\gamma})^t$. Но $|w(b^{-\gamma t})| \leqslant 1$. По лемме 5 имеем $w(g_t) = w\big((gb^{\gamma})^t\big) + w(b^{-\gamma t})$, что противоречит неравенству (7).

Завершая доказательство леммы, мы завершаем доказательство теоремы. □

Литература

[1] Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. — 1997. — Т. 36, № 5. — С. 494—517.

[2] Григорчук Р. И. Ограниченные когомологии групповых конструкций // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, № 4. — С. 546—550.

[3] Добрынина И. В. О ширине в свободных произведениях с объединением // Мат. заметки. — 2000. — Т. 68, № 3. — С. 353—359.

[4] Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. — М.: Наука, 1987.

[5] Faiziev V. A. A problem of expressibility in some amalgamated products of groups // J. Aust. Math. Soc. — 2001. — Vol. 71. — P. 105—115.

[6] Rhemtulla A. H. A problem of bounded expressibility in free products // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1969. — Vol. 64, no. 3. — P. 573—584.