О линейно упорядоченных линейных алгебрах

Ю. В. КОЧЕТОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: jkochetova@mail.ru

Е. Е. ШИРШОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: e.shir@relcom.ru

УДК 512.552+512.545

Ключевые слова: частично упорядоченная алгебра над полем, частично упорядоченное поле, линейно упорядоченная группа, выпуклое векторное пространство.

Аннотация

Рассматривается подход к упорядочению алгебр, предложенный В. М. Копытовым. Найдены необходимые и достаточные условия существования линейного порядка на алгебре над полем. Исследуются свойства идеалов линейно упорядоченных алгебр и приведены примеры алгебр, для которых порядок Копытова на алгебре индуцирует порядок того же типа на различных алгебраических объектах, связанных с данной алгеброй.

Abstract

J. V. Kochetova, E. E. Shirshova, On linearly ordered linear algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 1, pp. 53—63.

The Kopytov order for any algebras over a field is considered. Necessary and sufficient conditions for an algebra to be a linearly ordered algebra are presented. Some results concerning the properties of ideals of linearly ordered algebras are obtained. Some examples of algebras with the Kopytov order are described. The Kopytov order for these examples induces the order on other algebraic objects.

Введение

Пусть F — частично упорядоченное поле и $A = \langle A; +; \cdot \rangle$ — линейная алгебра над полем F.

Определение 1. Скажем, что на алгебре A над частично упорядоченным полем F определён порядок Копытова $\leqslant$, если

1) $\langle A; +; \leqslant \rangle$ — частично упорядоченная группа [9];
2) из $a \leqslant b$ следует, что $\lambda a \leqslant \lambda b$ для всех $a, b \in A$ и $\lambda > 0$, $\lambda \in F$;
3) из $0 \leqslant a$ следует, что $0 \leqslant a + ab$ и $0 \leqslant a + ba$ для всех $b \in A$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 1, с. 53—63.

Если в определении 1 группа $\langle A;+;\leqslant\rangle$ является линейно упорядоченной, то алгебра A над полем F называется *линейно упорядоченной*.

Данное определение упорядочения было введено для алгебр Ли В. М. Копытовым в [7]. Введение понятия упорядоченной алгебры Ли, отличного от обычного для упорядоченной алгебраической системы (см., например, [14]), дало возможность построить содержательную теорию линейно упорядочиваемых алгебр Ли над линейно упорядоченным полем. В 70—80 годах прошлого века В. М. Копытовым, Н. Я. Медведевым, С. А. Агалаковым и А. С. Штерном был получен ряд основных результатов этой теории (см. [1, 7—9, 11—13]).

В [7] В. М. Копытов отмечает, что такое определение порядка можно рассматривать не только для алгебр Ли, но и для произвольных алгебр над упорядоченным полем.

Основной целью данной статьи является изучение свойств порядка Копытова для произвольных линейных алгебр над частично упорядоченным полем.

В статье используется общепринятая терминология для частично упорядоченных алгебраических систем (см. [9, 14]).

Так как при положительной характеристике поля F его положительный конус равен нулю, т. е. порядок на поле тривиален, то далее рассматривается упорядоченное поле F нулевой характеристики.

Первый раздел посвящён исследованию свойств выпуклых подпространств частично упорядоченных по Копытову алгебр.

Определение 2. Пусть алгебра A над полем F удовлетворяет условиям 1) и 2) и $0 < a$, $a \in A$. Скажем, что элемент $b \in A$ бесконечно мал относительно элемента a ($b \ll a$), если $\lambda b \leqslant a$ для всех $\lambda \in F$.

Определение 2 позволяет дать эквивалентную формулировку определения частично упорядоченной алгебры над полем.

Определение 3. Будем говорить, что на алгебре A над частично упорядоченным полем F определён порядок Копытова $\leqslant$, если

1) $\langle A;+;\leqslant\rangle$ — частично упорядоченная группа [9];
2) из $a \leqslant b$ следует, что $\lambda a \leqslant \lambda b$ для всех $a, b \in A$ и $\lambda > 0$, $\lambda \in F$;
3$'$) из $0 < a$ следует, что $ab \ll a$ и $ba \ll a$ для всех $b \in A$.

Заметим, что если алгебра A частично упорядочена по Копытову, то в ней не может быть единицы, поскольку в противном случае для любого строго положительного элемента $a \in A$ по условию 3$'$) будет выполнено $a \ll a$, что невозможно.

В разделе 1 доказано, что множество всех элементов линейно упорядоченной по Копытову алгебры A над линейно упорядоченным полем F, бесконечно малых относительно некоторого $a > 0$, $a \in A$, является выпуклым двусторонним идеалом в A (теоремы 4 и 5).

Также первый раздел содержит доказательства следующих утверждений.

Теорема 1 (аналог теоремы Леви). *Пусть A — алгебра над частично упорядоченным полем F и I — идеал в A, где I и A/I являются частично упорядоченными по Копытову. Если для $a > 0$ в I и любого элемента $b \in A$ выполняется $ab, ba \leqslant a$, то на алгебре A можно определить порядок Копытова, индуцирующий заданные порядки на I и A/I, при котором I — выпуклый идеал в A.*

Для упорядоченных алгебр Ли данный результат доказан В. М. Копытовым в [7].

Предложение 1. *Если I — выпуклое направленное подпространство в частично упорядоченной алгебре A над частично упорядоченным полем F, то I — идеал в A.*

Во втором разделе исследована взаимосвязь линейной упорядочиваемости алгебры над полем с наличием в ней центральной системы идеалов, а именно доказаны следующие утверждения.

Теорема 2. *Алгебра A над линейно упорядоченным полем F может быть линейно упорядоченной тогда и только тогда, когда она обладает центральной системой идеалов.*

Следствие 1. *Конечномерная ассоциативная алгебра* (*алгебра Ли*) *может быть линейно упорядоченной в том и только в том случае, когда она нильпотентная.*

Для случая алгебр Ли данные результаты получены В. М. Копытовым (см. [7, 9]).

Третий раздел содержит различные примеры ассоциативных алгебр, частично упорядоченных по Копытову.

Авторы благодарны А. Ю. Ольшанскому за полезные советы.

1. Выпуклые подпространства упорядоченных алгебр

В данном разделе рассмотрены свойства выпуклых подпространств частично упорядоченных по Копытову алгебр над полем.

Замечание 1. Если $a > 0$ в упорядоченной алгебре A, то $-a \leqslant ab$, $ba \leqslant a$ для всех $b \in A$.

Условия 1) и 2) определений 1 и 3 означают, что A является частично упорядоченным векторным пространством над полем F.

Предложение 2. *Если на алгебре A определён порядок Копытова и $a > 0$, $a \in A$, то $ab \ll a$ и $ba \ll a$ для всех $b \in A$.*

Доказательство. По условию 3) имеем $a + a\big(\lambda(-b)\big) = a - \lambda(ab) \geqslant 0$ и $a + \big(\lambda(-b)\big)a = a - \lambda(ba) \geqslant 0$ для любого $b \in A$ и $\lambda \in F$. □

Следствие 2. *Если алгебра A удовлетворяет условиям* 1) *и* 2), *то условие* 3) *равносильно условию*

3$'$) *из* $0 < a$ *следует, что* $ab \ll a$ *и* $ba \ll a$ *для всех* $b \in A$.

Доказательство. Ясно, что импликация 3) $\Longrightarrow$ 3$'$) справедлива по предложению 2.

Пусть выполняется условие 3$'$) и $a \geqslant 0$, $a \in A$. Если $a = 0$, то $0 \leqslant a + ab$ и $0 \leqslant a+ba$ для всех $b \in A$. Если $0 < a$, то из условия 3$'$) получаем, что $a(-b) \ll a$ и $(-b)a \ll a$, поэтому $a(-b) \leqslant a$ и $(-b)a \leqslant a$. Отсюда следует, что $a + ab \geqslant 0$ и $a + ba \geqslant 0$ для всех $b \in A$. □

Предложение 3 (о транзитивности). *Если* $c \ll b$ *и* $b \ll a$ *для элементов* $a > 0$, $b > 0$ *частично упорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F, то* $c \ll a$.

Доказательство. Для любого $\lambda \in F$ имеем $\lambda c \leqslant b$ и $\lambda b \leqslant a$. При $\lambda = 1$ получаем, что $b \leqslant a$. Таким образом, $\lambda c \leqslant a$ для всех $\lambda \in F$. □

Теорема 3. *Подмножество P алгебры A над частично упорядоченным полем F является множеством положительных элементов при некотором частичном порядке Копытова этой алгебры тогда и только тогда, когда множество P удовлетворяет следующим условиям*:

1) $P + P \subseteq P$;
2) $\lambda P \subseteq P$ *для всех* $\lambda > 0$, $\lambda \in F$;
3) $-P \cap P = \{0\}$;
4) $a + ax, a + xa \in P$ *для всех* $a \in P$, $x \in A$.

Доказательство. Если на алгебре A задан частичный порядок Копытова, то свойства 1) и 3) имеют место в силу условия 1) для порядка, свойство 2) — в силу условия 2) для порядка, а свойство 4) — в силу условия 3) для порядка.

Если множество $P \subseteq A$ обладает свойствами 1)—4), определим порядок на алгебре A следующим образом: для $a, b \in A$ считаем, что $a \leqslant b$, если $a - b \in P$. Тогда группа $\langle A; +\rangle$ является частично упорядоченной группой, т. е. выполняется условие 1) для порядка. Свойство 2) влечёт выполнение условия 2) для порядка, а свойство 4) — условия 3) для порядка. □

Множество P положительных элементов при некотором частичном порядке алгебры A будем называть, как обычно, *положительным конусом* в A.

Предложение 4. *Пусть A — частично упорядоченная по Копытову алгебра над частично упорядоченным полем F и I — выпуклый идеал в A. Тогда векторное пространство A/I является частично упорядоченной алгеброй над полем F с порядком Копытова.*

Доказательство. Операции $(a+I)+(b+I) = (a+b)+I$, $\lambda(a+I) = \lambda a+I$ и $(a+I)(b+I) = ab+I$ определяют структуру алгебры на $\langle A/I; +; \cdot\rangle$ и структуру частично упорядоченной группы на $\langle A/I; +\rangle$, если считать, что $a + I \geqslant I$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $a' \in a + I$, что $a' \geqslant 0$ в A.

Если $I < a+I$, то можно считать, что $a > 0$ в A, поэтому по предложению 2 имеем $ab \leqslant a$ и $ba \leqslant a$ для всех $b \in A$. Тогда $ab + I \leqslant a + I$ и $ba + I \leqslant a + I$, т. е. $(a+I)(b+I) \leqslant a + I$ и $(b+I)(a+I) \leqslant a + I$. □

Следствие 3. *Если A — линейно упорядоченная по Копытову алгебра над частично упорядоченным полем F и I — выпуклый идеал в A, то фактор-алгебра A/I является линейно упорядоченной по Копытову алгеброй над полем F.*

Доказательство. Пусть $a + I \in A/I$. Если существует такой элемент $a' \in \in a + I$, что $a' \geqslant 0$ в A, то $a + I \geqslant I$. В противном случае для любого $b \in a + I$ имеем $b < 0$. Тогда $-b > 0$ и $-(a + I) = -b + I > I$, откуда следует, что $a + I < I$. □

Для упорядоченных алгебр Ли теорема 3 и предложение 4 рассмотрены В. М. Копытовым в [7, 9].

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $\leqslant_1$ порядок на идеале I, а через $\leqslant_2$ порядок на фактор-алгебре A/I. Зададим порядок $\leqslant$ на алгебре A следующим образом: для $a \in A \setminus I$ будем считать, что $a \geqslant 0$, если $a + I \geqslant_2 I$ в A/I, а для $a \in I$ будем считать, что $a \geqslant 0$, если $a \geqslant_1 0$ в I. Покажем, что множество $P = \{a \in A \mid a \geqslant 0\}$ является положительным конусом в A.

Если $a, b \in P$, то в случаях когда $a, b \in A \setminus I$ или $a, b \in I$, получаем $a+b \in P$. Пусть $a \in A \setminus I$ и $b \in I$. Тогда $(a + b) + I = (a + I) + (b + I) = a + I \geqslant_1 I$ в A/I, поэтому $a + b \in P$.

Легко проверить, что $\lambda P \subseteq P$ для всех $\lambda > 0$, $\lambda \in F$. Далее рассмотрим $a \in P \cap -P$. Если $a, -a \in A \setminus I$, то $a + I \geqslant_2 I$ и $-a + I \geqslant_2 I$, откуда следует, что $a + I = I$, т. е. $a \in I$. Для $a, -a \in I$ из $a \geqslant_1 0$ и $-a \geqslant_1 0$ следует, что $a = 0$. Таким образом, $P \cap -P = \{0\}$.

Пусть $a \in P$ и $x \in A$. Если $a \in A \setminus I$ и $a + I \geqslant_2 I$ в A/I, то по условию 3) определения 1 $(a+I)+(a+I)(x+I) \geqslant_2 I$. Следовательно, $a+ax+I \geqslant_2 I$. Если $a+ax+I = I$, то $a+I = (a+I)(-x+I)$, при этом по условию 3′) определения 3 $(a + I)(-x + I) \ll a + I$, откуда следует, что $a + I \ll a + I$, что невозможно. Значит, $a + ax + I \neq I$, т. е. $a + ax \notin I$.

Если $a \in I$ и $a \geqslant_1 0$ в I, то по условию 3) $a + ax \geqslant_1 0$, при этом $a + ax \in I$. Аналогично $a + xa \in I$ и $a + xa \geqslant_1 0$. Таким образом, $a + ax \in P$.

Пусть $a \leqslant x \leqslant b$, где $a, b \in I$ и $x \in A$. Если $x \notin I$, то $a + I \leqslant_2 x + I \leqslant_2 b + I$ в A/I, откуда следует, что $I \leqslant_2 x + I \leqslant_2 I$. Поэтому $x + I = I$ и $x \in I$. Таким образом, I является выпуклым идеалом в A. □

Пусть A — частично упорядоченная по Копытову алгебра над частично упорядоченным полем F, $a \in A$, $a > 0$ и $M_a = \{x \in A \mid x \ll a\}$.

Теорема 4. *Если $\langle A; +\rangle$ — линейно упорядоченная группа, то M_a — двусторонний идеал в алгебре A.*

Доказательство. Пусть $b, c \in M_a$, но $b + c \notin M_a$. Тогда $\beta b \leqslant a$ и $\beta c \leqslant a$ для всех $\beta \in F$, при этом найдётся элемент $\lambda \in F$, для которого $a < \lambda(b+c) = \lambda b+\lambda c$.

Из условия теоремы следует, что $\lambda b \leqslant \lambda c$ или $\lambda c \leqslant \lambda b$. Отсюда получаем, что $a < 2\lambda c$ или $a < 2\lambda b$, что противоречит выбору b и c. Значит, $b + c \in M_a$.

Так как для любых элементов $b \in M_a$, $\lambda \in F$ и $\gamma \in F$ выполняется соотношение $\lambda(\gamma b) = (\lambda\gamma)b \leqslant a$, то $\gamma b \in M_a$, и поэтому M_a — подпространство в A.

Для $b \in M_a$ по условию теоремы $b > 0$ или $b \leqslant 0$. Пусть $x \in A$. При $b > 0$ по предложению 2 имеем $bx \ll b$ и $xb \ll b$. Тогда по предложению 3 получаем, что $bx \ll a$ и $xb \ll a$, т. е. $bx, xb \in M_a$. При $b = 0$ ясно, что $bx, xb \in M_a$. Если $b < 0$, то $-b > 0$, поэтому по предложению 2 $bx = (-b)(-x) \ll -b$ и $xb = (-x)(-b) \ll -b$, где $-b \in M_a$ по доказанному. Отсюда по транзитивности следует, что $bx \ll a$ и $xb \ll a$, и значит, $bx, xb \in M_a$. □

Теорема 5. *Если A — линейно упорядоченная алгебра над линейно упорядоченным полем F, то M_a — выпуклый идеал в A и $M_a \neq A$.*

Доказательство. Пусть $b, c \in M_a$, $x \in A$ и $b \leqslant x \leqslant c$. Для элемента $\lambda \in F$ по условию теоремы имеем $\lambda < 0$ или $\lambda \geqslant 0$. При $\lambda > 0$ по условию 2) определения 1 получаем $\lambda x \leqslant \lambda c$, где $\lambda c \leqslant a$, откуда следует, что $\lambda x \leqslant a$. Имеем $-c \leqslant -x \leqslant -b$. Если $\lambda < 0$, то $-\lambda > 0$, поэтому по условию 2) имеем $(-\lambda)(-c) \leqslant (-\lambda)(-x) \leqslant \leqslant (-\lambda)(-b)$, т. е. $\lambda x \leqslant \lambda b$, где $\lambda b \leqslant a$. Отсюда следует, что $\lambda x \leqslant a$.

Таким образом, $\lambda x \leqslant a$ для всех $\lambda \in F$, т. е. $x \ll a$, и значит, $x \in M_a$. Итак, M_a — выпуклый идеал и при этом $M_a \neq A$, так как $a \notin M_a$. □

Предложение 5. *Пусть A — линейно упорядоченная алгебра над линейно упорядоченным полем F и $b > 0$, $b \in A \setminus M_a$. Тогда $x \ll b$ для всех $x \in M_a$ и $M_a \subseteq M_b$.*

Доказательство. Пусть $x \in M_a$. Если существует $\lambda \in F$, для которого $b \leqslant \lambda x$, то $b \in M_a$ в силу выпуклости идеала M_a, что противоречит выбору элемента b. Значит, $\lambda x \leqslant b$ для всех $\lambda \in F$, т. е. $x \ll b$. Тогда $M_a \subseteq M_b$. □

Предложение 6. *Пусть A — линейно упорядоченная алгебра над линейно упорядоченным полем F. В линейно упорядоченной алгебре A/M_a все строго положительные классы состоят только из положительных элементов алгебры A.*

Доказательство. Если $x + M_a > M_a$ в A/M_a, то $x > 0$ в A, $x \notin M_a$ и для любого элемента $y \in x + M_a$ имеем $y = x + m$, где $m \in M_a$. По предложению 5 получаем, что $-m \ll x$. Следовательно, $-m \leqslant x$, откуда получаем, что $y = x + m \geqslant 0$. □

Доказательство предложения 1. Пусть $x \in A$, $y \in I$. Если $y > 0$, то по замечанию 1 $-y \leqslant xy$, $yx \leqslant y$, откуда в силу выпуклости I имеем $xy, yx \in I$. Если $y < 0$, то $-y > 0$, и по доказанному $-xy \in I$, откуда следует, что $xy \in I$. В случае когда $y \parallel 0$, существуют элементы $a, b \in I$, такие что $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $y = a - b$ (см., например, [14, гл. 2, § 1, предложение 1]). Тогда $xy = xa - xb$, при этом по доказанному выше $xa, xb \in I$, откуда получаем, что $xy \in I$. Аналогично $yx \in I$. □

2. Центральные системы упорядоченных алгебр

Этот раздел посвящён исследованию взаимосвязи между линейной упорядочиваемостью алгебры над полем и наличием в данной алгебре центральной системы идеалов.

Предложение 7. *Пусть A — алгебра над линейно упорядоченным полем F, для которой $\langle A;+\rangle$ — линейно упорядоченная группа. Если в A нет выпуклых подалгебр, то A — алгебра с нулевым умножением и для любых элементов $a,b\in A$, таких что $a>0$ и $b>0$, существуют элементы $\beta,\gamma\in F$, для которых $a<\beta b$ и $b<\gamma a$.*

Доказательство. Пусть $a\in A$. По условию теоремы имеем $a>0$ или $a\leqslant 0$. Если $a>0$, то по теореме 5 в A существует выпуклая подалгебра $M_a=\{x\in A \mid x\ll a\}$. Следовательно, по условию $M_a=\{0\}$. Так как по теореме 5 $ab\in M_a$ для всех $b\in A$, то $ab=0$. Пусть $b>0$ в A. Поскольку $M_a=\{0\}$, то $b\notin M_a$, поэтому существует такой элемент $\beta\in F$, что $a<\beta b$. Так как по теореме 5 в A существует выпуклая подалгебра $M_b=\{x\in A\mid x\ll b\}$, то по условию $M_b=\{0\}$, и значит, $a\notin M_b$. Поэтому найдётся элемент $\gamma\in F$, для которого $b<\gamma a$.

При $a=0$ ясно, что $ab=0$ для всех $b\in A$. Если $a<0$, то $-a>0$, и по доказанному выше $-ab=(-a)b=0$ для всех $b\in A$. Следовательно, $ab=0$. $\square$

Для упорядоченных алгебр Ли предложение 7 рассмотрено В. М. Копытовым в [7, 9].

Пусть B и C — идеалы алгебры A над полем, для которых $B\supset C$ и $B\neq C$. Скажем, что идеалы B и C образуют *скачок*, если для любого идеала J в A из включений $C\subseteq J\subseteq B$ следует, что $J=B$ или $J=C$.

Теорема 6. *Пусть A — линейно упорядоченная алгебра над линейно упорядоченным полем F. Если $C\subset B$ — скачок выпуклых подпространств в A, то $AB\subseteq C$ и $BA\subseteq C$.*

Доказательство. Рассмотрим фактор-алгебру B/C. Пусть в ней существует выпуклое подпространство $\bar J$. Тогда легко показать, что множество $T = \{x\in B\mid x+C\in\bar J\}$ является подпространством в B. Если $x,y\in T$, $z\in B$ и $x\leqslant z\leqslant y$, то $x+C, y+C\in\bar J$ и $x+C\leqslant z+C\leqslant y+C$. Тогда в силу выпуклости пространства $\bar J$ $z+C\in\bar J$, т. е. $z\in T$. Следовательно, T является выпуклым подпространством в B и $C\subseteq T$. Значит, $T=C$ и $\bar J=C$. Таким образом, линейно упорядоченная фактор-алгебра B/C не содержит выпуклых подпространств.

Пусть $b\in B\setminus C$. Если $b>0$, то $bx\ll b$ и $xb\ll b$ для всех $x\in A$. Следовательно, $\lambda(xb)\leqslant b$ для всех $\lambda\in F$. Пусть существует $x\in A$, для которого $xb\notin C$, где $xb>0$. Тогда $b+C>C$, $xb+C>C$ и $b+C\geqslant\lambda(xb)+C$ в фактор-алгебре B/C.

Так как линейно упорядоченная фактор-алгебра B/C не содержит выпуклых подпространств, то по предложению 7 существует $\beta \in F$, для которого $b + C < \beta(xb) + C$, что противоречит доказанному ранее.

Таким образом, $AB \subseteq C$. Аналогично доказывается, что $BA \subseteq C$. □

Напомним, что *инвариантной системой* называется любая упорядоченная по включению полная система идеалов алгебры A, содержащая $\{0\}$ и A, где

$$0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_k \subset I_{k+1} \subset \ldots \subset A$$

и I_k — идеал в I_{k+1}. Если при этом для всякого скачка $I_k \subset I_{k+1}$ этой системы имеет место включение $AI_{k+1} \subseteq I_k$, то система идеалов называется *центральной системой* [10, с. 356, 392].

Теорема 7. *Любая линейно упорядоченная алгебра A над линейно упорядоченным полем F обладает центральной системой идеалов.*

Доказательство. Пусть B и C — выпуклые подпространства в A. Если $B \nsubseteq C$ и $C \nsubseteq B$, то существуют такие элементы $b \in B \setminus C$ и $c \in C \setminus B$, что $b > 0$ и $c > 0$. Если $b > c$, то $c \in B$, а если $c > b$, то $b \in C$, что противоречит выбору элементов b и c. Следовательно, $B \subseteq C$ или $C \subseteq B$, т. е. все выпуклые подпространства в A образуют цепь. Ясно, что система всех выпуклых подпространств в A является полной.

Если $B \supset C$ — скачок выпуклых подпространств в A, то по теореме 6 $AB \subseteq \subseteq C$ и $BA \subseteq C$.

Таким образом, рассматриваемая система выпуклых подпространств является центральной. □

Предложение 8. *Пусть A — линейно упорядоченная алгебра над линейно упорядоченным полем F и $C \subset B$ — скачок выпуклых подпространств в A. Тогда для любого $b > 0$, $b \in B \setminus C$, выполняется равенство $C = M_b$.*

Доказательство. Пусть $b \in B \setminus C$, $b > 0$, для скачка выпуклых подпространств $B \supset C$. Тогда для любых элементов $x \in C$ и $\lambda \in F$ имеем $\lambda x < b$, так как в случае $\lambda x \geqslant b > 0$ в силу выпуклости C получим, что $b \in C$. Следовательно, $x \ll b$, поэтому $C \subseteq M_b$, где M_b — выпуклый идеал в A, соответствующий элементу $b > 0$. Из того факта, что все выпуклые подпространства в A образуют цепь, следует, что $B \subseteq M_b$ или $M_b \subseteq B$. Если $B \subseteq M_b$, то $b \ll b$, что невозможно. Поэтому $M_b \subseteq B$. Учитывая, что $C \subseteq M_b$, для скачка $B \supset C$ получаем, что $C = M_b$.

Пусть $d > 0$, $d \in B \setminus C$. Тогда по предложению 5 $C \subseteq M_d$. Рассуждая так же, как выше, получаем $C = M_d = M_b$, т. е. все строго положительные элементы из $B \setminus C$ определяют один и тот же выпуклый идеал M_b, который всегда совпадает с нижним идеалом скачка. □

Теорема 8. *Если алгебра над линейно упорядоченным полем обладает центральной системой идеалов, то она может быть линейно упорядочена по Копытову.*

Доказательство. Пусть A — линейная алгебра над линейно упорядоченным полем F, имеющая центральную систему идеалов

$$0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_k \subset I_{k+1} \subset \ldots \subset A. \tag{1}$$

Для скачка идеалов $I_1 \subset I_2$ рассмотрим абелевы группы $\langle I_1; +\rangle$ и $\langle I_2/I_1; +\rangle$. Поскольку, как отмечалось ранее, упорядоченное поле F имеет нулевую характеристику, то абелевы группы I_1 и I_2/I_1 свободны от кручений. Известно, что любую абелеву группу без кручения можно превратить в линейно упорядоченную (см., например, [3, гл. 13, § 7, теорема 11]). Следовательно, группы I_1 и I_2/I_1 можно линейно упорядочить. Тогда по теореме Леви для групп (см., например, [14, гл. 2, § 4, предложение 6]) на группе I_2 можно определить линейный порядок $\leqslant$, индуцирующий найденный порядок на I_1, при котором I_1 — выпуклая подгруппа в I_2. Таким образом, выполнено условие 1) определения 3.

Далее рассмотрим пространство I_2 над полем F и для $a \geqslant 0$ из $\langle I_2; +\rangle$ будем считать, что $\alpha a \leqslant \beta a$, если $\alpha \leqslant \beta$ в поле F. Тогда выполняется условие 2) определения 3.

Пусть $c \in I_1$, $b \in I_2 \setminus I_1$ и $b > 0$. Тогда $c \leqslant b$, так как в случае $c \geqslant b$ в силу выпуклости I_1 получаем, что $b \in I_1$. Следовательно, каждый элемент из $I_2 \setminus I_1$ больше любого элемента из I_1.

Упорядочивая подобным образом каждый следующий скачок системы (1), получим линейный порядок, заданный на пространстве A.

Пусть $a \geqslant 0$ в A и $z \in A$. Тогда $a \in I_{k+1} \setminus I_k$ для некоторого k. Поскольку система идеалов (1) является центральной, то $\lambda(az) \in I_k$. Отсюда получаем, что $a \geqslant \lambda(az)$, т. е. $az \ll a$ для всех $z \in A$. Следовательно, выполнено условие 3′) определения 3.

Таким образом, алгебра A линейно упорядочена по Копытову. □

Доказательство теоремы 2. Утверждение следует из теорем 7 и 8. □

3. Примеры алгебр, упорядоченных по Копытову

Пример 1. Пусть $A = \langle A; +; \cdot\rangle$ — ассоциативная алгебра над полем F, радикальная по Джекобсону, с порядком Копытова $\leqslant$.

Рассмотрим группу $G = \langle A; \circ\rangle$ квазирегулярных элементов, где $a \circ b = a + b - ab$ для $a, b \in A$ (см. [2, гл. 1, § 3; 5, гл. 1, § 5]). Положим $P(G) = P(A) = \{a \in A \mid a \geqslant 0\}$. Покажем, что $P(G)$ — положительный конус группы G.

Пусть $a, b \in P(G)$, тогда $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ в алгебре A. Если $b = 0$, то $a \circ b = a \geqslant 0$ и $a \circ b \in P(G)$. Если $b > 0$, то $a \circ b = a + (b + (-a)b) = a + c$, где $c \geqslant 0$ по условию 3) определения 1. Следовательно, $a + c \geqslant 0$ в A и $a \circ b \in P(G)$. Значит, $P(G) \circ P(G) \subseteq P(G)$.

Если $x \in P(G) \cap P(G)^{-1}$, то $x \in P(G)$ и $x^{-1} \in P(G)$, где $x \circ x^{-1} = 0$, поскольку единица группы G равна нулю алгебры A. Тогда $x \geqslant 0$ и $x^{-1} \geqslant 0$. Так как $x + x^{-1} - xx^{-1} = 0$, то $-x = x^{-1} - xx^{-1}$. При этом из $x^{-1} \geqslant 0$ по условию 3) получаем $x^{-1} - xx^{-1} \geqslant 0$. Следовательно, $x \geqslant 0$ и $-x \geqslant 0$, поэтому $x = 0$. Таким образом, $P(G) \cap P(G)^{-1} = \{0\}$.

Пусть $a \in P(G)$ и $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = 0$ для элемента $x \in A$. Тогда

$$\begin{aligned} x \circ a \circ x^{-1} &= (x + a - xa) \circ x^{-1} = \\ &= x + a - xa + x^{-1} + xx^{-1} + ax^{-1} - xax^{-1} = (a - xa) + (a - xa)x^{-1}. \end{aligned}$$

Так как $a \geqslant 0$, то по условию 3) $a - xa \geqslant 0$, откуда следует, что $x \circ a \circ x^{-1} \in P(G)$. Следовательно, $x \circ P(G) \circ x^{-1} \subseteq P(G)$. Таким образом, $P(G)$ — положительный конус группы G.

Пример 2. Пусть F — поле и $T = F[x_1, x_2, \ldots, x_d]$ — кольцо полиномов над F от свободных образующих $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Рассмотрим градуировку на данной алгебре T, т. е. её разложение в прямую сумму

$$T = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_n = T_0 \oplus T_1 \oplus \ldots \oplus T_n \oplus \ldots,$$

где $T_0 = F$, а подпространство T_n однородных полиномов степени n имеет базис из d^n элементов вида $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$. При этом $T_i T_j \subset T_{i+j}$.

Рассмотрим подалгебру $A = T_1 \oplus \ldots \oplus T_n \oplus \ldots$ алгебры T. Упорядочим базис T_n $(n = 1, 2, \ldots)$ линейно, а элементы T_n лексикографически. При этом будем считать, что каждый полином из базиса T_{n-1} $(n = 2, 3 \ldots)$ больше любого элемента базиса T_n. Тогда на A будет задано отношение линейного лексикографического порядка, для которого выполняются условия 1) и 2) определения 3. Пусть $f \geqslant 0$ в A и f содержит слагаемые только большей чем $m \geqslant 1$ степени. Тогда по включению $T_i T_j \subset T_{i+j}$ для любых $g \in A$ и $\lambda \in F$ слагаемые произведения $\lambda(fg)$ принадлежат только тем алгебрам T_n, для которых $n > m$. По правилу задания порядка на A получаем, что $f \geqslant \lambda(fg)$ для всех $\lambda \in F$. Следовательно, $fg \ll f$ для любого $g \in A$, т. е. выполнено условие $3'$) определения 3. Таким образом, алгебра A является линейно упорядоченной по Копытову.

Пример 3. Алгебра Голода — бесконечномерная ненильпотентная ниль-алгебра, радикальная по Джекобсону и градуированная по построению (см., например, [4; 6, с. 215]) — является линейно упорядоченной по Копытову согласно примеру 2. Из примера 1 следует, что линейный порядок Копытова на алгебре Голода A индуцирует линейный порядок на группе $\langle A; \circ \rangle$ её квазирегулярных элементов. Присоединим к алгебре Голода A единицу и рассмотрим мультипликативную группу $G = \{1 + a \mid a \in A\}$. Рассмотрим множество $P = \{1 + a \mid a \geqslant 0 \text{ в } A\}$ и покажем, что P является положительным конусом для G.

Пусть $1 + a, 1 + b \in P$. Если $b = 0$, то $(1 + a)(1 + b) = 1 + a \in P$. Если $b > 0$, то $(1 + a)(1 + b) = 1 + a + (b + ab)$, где $b + ab \geqslant 0$ по условию 3) определения 1, откуда следует, что $a + b + ab \geqslant 0$. Следовательно, $(1 + a)(1 + b) \in P$, т. е. $PP \subseteq P$.

Пусть $1 + a \in P \cap P^{-1}$. Тогда $1 + a \in P$, и для элемента $1 + b$, такого что $(1 + a)(1 + b) = 1$, имеем $1 + b \in P$. Из равенства $1 + a + b + ab = 1$ следует, что

$a+b+ab=0$. Если $b=0$, то $a=0$. Если $b>0$, то $b+ab\geqslant 0$ по условию 3), поэтому $-a\geqslant 0$. Значит, $a=0$ и $P\cap P^{-1}=\{1\}$.

Пусть $1+a\in G$, $1+c\in P$, т. е. $c\geqslant 0$ в A. Рассмотрим $(1+a)^{-1}=1+b\in G$ и $x=(1+a)(1+c)(1+b)$. Если $c=0$, то $x=1\in P$. При $c>0$ по условию 3) имеем $c+cb\geqslant 0$, откуда следует, что

$$x=(1+a)(1+b+c+cb)=(1+a)(1+b)+(c+cb)+a(c+cb),$$

где $(1+a)(1+b)=1$ и $(c+cb)+a(c+cb)\geqslant 0$. Следовательно, $x\in P$.

Таким образом, G — упорядоченная группа.

Пример 4. Пусть A — линейно упорядоченная по Копытову ассоциативная алгебра над линейно упорядоченным полем. Тогда алгебра Ли $A^{(-)}$ ассоциативной алгебры A также является линейно упорядоченной по Копытову. Действительно, условия 1) и 2) определения 3 выполнены в $A^{(-)}$, поскольку они выполнены в A. Если $a\geqslant 0$ в $A^{(-)}$, то по условию $3'$) для A имеем $ab\ll a$ и $ba\ll a$, откуда по теореме 4 получаем, что $[a,b]=ab-ba\ll a$. Значит, для $A^{(-)}$ выполняется условие $3'$) определения 3.

Если A — ассоциативная алгебра, линейно упорядоченная по Копытову, и B — подалгебра в A, то порядок на A индуцирует линейный порядок Копытова на алгебре Ли $B^{(-)}$ ассоциативной алгебры B.

Литература

[1] Агалаков С. А., Штерн А. С. Свободные произведения линейно упорядочиваемых алгебр Ли // Сиб. мат. журн. — 1982. — Т. 23, № 3. — С. 5—9.

[2] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[3] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.

[4] Голод Е. С. О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — Т. 28, № 2. — С. 273—276.

[5] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.

[6] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1972.

[7] Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 295—325.

[8] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные алгебры Ли // Сиб. мат. журн. — 1977. — Т. 18, № 3. — С. 595—607.

[9] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[10] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[11] Медведев Н. Я. О продолжении порядков алгебр Ли // Сиб. мат. журн. — 1977. — Т. 18, № 2. — С. 469—471.

[12] Медведев Н. Я. О решётках многообразий решёточно упорядоченных групп и алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 1. — С. 40—45.

[13] Медведев Н. Я. К теории решёточно упорядоченных колец // Мат. заметки. — 1987. — Т. 41, вып. 4. — С. 484—489.

[14] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.