Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов*

А. А. МАХНЕВ
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

УДК 519.17+512.54

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа, подграф неподвижных точек автоморфизма.

Аннотация

В статье представлен обзор результатов об автоморфизмах дистанционно регулярных графов, полученных в отделе алгебры и топологии ИММ УрО РАН за последние пять лет. Кроме того, изложен метод Г. Хигмена применения теории характеров конечных групп к изучению автоморфизмов дистанционно регулярных графов.

Abstract

A. A. Makhnev, On automorphisms of distance-regular graphs, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 1, pp. 65—79.

In this paper, we present a survey of results on automorphisms of distance-regular graphs obtained at the department of algebra and topology of IMM UB RAS in the last five years. Also, we explain the Higman method of application of the character theory to the investigation of automorphisms of distance-regular graphs.

В этой статье представлен обзор результатов об автоморфизмах дистанционно регулярных графов, полученных в отделе алгебры и топологии ИММ УрО РАН за последние пять лет. В первом разделе изложен метод Г. Хигмена применения теории характеров конечных групп к изучению автоморфизмов дистанционно регулярных графов (см. [25]). Во втором разделе приведены некоторые результаты об автоморфизмах сильно регулярных графов. В третьем разделе метод Хигмена применяется к исследованию автоморфизмов дистанционно регулярных графов диаметра, большего 2.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00009), РФФИ и БРФФИ (грант 08-01-90006), программы отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и с НАН Беларуси.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a,b)$ (через $\lambda(a,b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Индуцированный $[a]\cap[b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d и $i \leqslant d$, то через Γ_i обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ. *Степенью вершины* называется число вершин в её окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины a из Γ равна k.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $\lambda = k - b_1 - 1$, $c_1 = 1$ и $c_2 = \mu$. Дистанционно регулярный граф диаметра 2 называется сильно регулярным с параметрами (v, k, λ, μ), где v — число вершин графа.

1. Метод Хигмена

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d с n вершинами. Тогда графу Γ отвечает симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geqslant 1$ класс R_i состоит из пар (u,w), таких что $d(u,w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для подходящих неотрицательных целых p_{ij}^l, называемых числами пересечений. Заметим, что $p_{ij}^l = |\Gamma_i(u) \cap \Gamma_j(w)|$ для любых вершин u, w с $d(u,w) = l$.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j,l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $k = p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Заметим, что матрица P_j является значением некоторого рационального многочлена от P_1, поэтому упорядочение собственных значений матрицы P_1 задаёт порядок на множестве собственных значений матрицы P_j. Матрицы P и Q, у которых на месте (i,j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = |X|I$, где I — единичная матрица порядка $d+1$.

Предложение 1.1. *Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $n/\langle u_j, w_j\rangle$.*

Доказательство можно найти в [25, теорема 17.12]. Фактически, из доказательства теоремы 17.12 следует, что w_j — столбцы матрицы P и $m_j u_j$ — строки матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом даёт матричное представление ψ группы G в $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^n$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A_1, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [26, § 3.7]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = n^{-1} \sum\limits_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из Γ, таких что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

2. Автоморфизмы некоторых сильно регулярных графов

При изучении автоморфизмов сильно регулярных графов полезно отметить, что либо граф имеет параметры $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$, либо $\chi_i(g)$ — целое число.

П. Камерон отмечает, что самое сложное в методе Хигмена — это вычисление параметров $\alpha_j(g)$. Однако в классе графов без треугольников для любого автоморфизма f порядка 3 имеем $\alpha_1(f) = 0$. Кроме того, подграфы неподвижных точек автоморфизмов в графах с небольшими λ и μ имеют определённое строение. Так, М. Ашбахер [23] заметил, что непустой подграф неподвижных точек автоморфизма сильно регулярного графа Мура (грава с $\lambda = 0$ и $\mu = 1$) является графом Мура или звездой. В цикле работ А. Махнева и его учеников изучались автоморфизмы сильно регулярных графов с $\max\{\lambda, \mu\} \leqslant 3$. В случае $\mu = 0$ граф является объединением t изолированных $(k+1)$-клик, а его группа автоморфизмов — подстановочное сплетение S_{k+1} с помощью S_t.

Предположим сначала, что $\mu = 1$. Неизвестно, существуют ли в этом случае сильно регулярные графы с $\lambda > 0$. Если $\lambda = 0$, то $k \in \{2, 3, 7, 57\}$. Для каждого из случаев $k \in \{2, 3, 7\}$ существует единственный сильно регулярный граф Мура: пятиугольник, граф Петерсена и граф Хофмана—Синглтона соответственно. Неизвестно, существует ли граф Мура степени 57, но Хигмен доказал [26, гл. 5], что этот граф не является вершинно-симметричным.

Теорема 2.1 [19]. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(3250, 57, 0, 1)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда*

1) *если G содержит инволюцию t, то либо $O(G) = P$ — силовская 5-подгруппа из G порядка 125, $|[P, t]| = 25$, $Z(P)$ действует полурегулярно на Γ, $\mathrm{Fix}\big(C_P(t)\big)$ — граф Хофмана—Синглтона, P содержит 25 подгрупп U_i порядка 5, имеющих пятиугольник в качестве подграфа неподвижных точек, либо $G = Y\langle t\rangle \times X$, Y — циклическая группа, инвертируемая t, $|Y|$ делит 7, 19, 55, $|X|$ делит 7, 25, 27 или 55 и если $X \neq 1$, то верно одно из следующих утверждений*:

а) $\mathrm{Fix}(X)$ — *звезда,* $|X| = 7$ *и* $Y = 1$;

б) $\mathrm{Fix}(X)$ — *пятиугольник и* $|Y|$ *делит* 5, *либо* $\mathrm{Fix}(x)$ — *граф Хофмана—Синглтона для некоторого элемента* x *порядка* 5 *из* X *и* $|X : \langle x\rangle| \in \{5, 11\}$, *либо* $\mathrm{Fix}(x) = \mathrm{Fix}(X)$ *для любого неединичного элемента* x *из* X *и* $|X|$ *делит* 55;

в) $\mathrm{Fix}(X)$ — *граф Петерсена,* $|X|$ *делит* 27, $|Y|$ *делит* 5 *и если* $Y \neq 1$, *то* $\mathrm{Fix}(Y)$ *является пустым графом*;

г) $\mathrm{Fix}(X)$ — *граф Хофмана—Синглтона,* $|X|$ *делит* 25, $|Y|$ *делит* 5 *или* 7 *и если* $|Y| = 5$, *то* $\mathrm{Fix}(Y)$ *является пустым графом или пятиугольником, а если* $|Y| = 7$, *то* $\mathrm{Fix}(Y)$ *является звездой на* 51 *или на* 16 *вершинах*;

2) *если порядок* $|G|$ *нечётен, то верно одно из следующих утверждений*:

а) 19 *делит* $|G|$, $G = G_a$ *для некоторой вершины* a *и* G — *подгруппа из группы Фробениуса порядка* $3^2 19$;

б) 13 *делит* $|G|$, *либо* G — *подгруппа из циклической группы порядка* 65 *и каждый неединичный элемент из* G *действует без неподвижных точек на* Γ, *либо* G — *группа Фробениуса порядка* 39;

в) 11 *делит* $|G|$, G — *расширение циклической группы порядка* 11 *с помощью элементарной абелевой группы* U *порядка, делящего* 25;

г) 7 *делит* $|G|$, *либо* G — *подгруппа прямого произведения циклической группы порядка* 7 *и элементарной абелевой группы* U *порядка, делящего* 25, *в случае* $U \neq 1$ *подграф* $\mathrm{Fix}(U)$ *является графом Хофмана—Синглтона, либо* G — *группа Фробениуса порядка* 21;

д) $\pi(G) \subseteq \{3, 5\}$, *либо* $|G|$ *делит* 5^4, *либо* G — *подгруппа прямого произведение группы порядка* 5 *и группы порядка* 27, *либо* G — *группа Фробениуса порядка* 75 *или* $5^4 3$, *либо* $|Z(G)| = 5$ *и* $G/Z(G)$ — *группа Фробениуса порядка* 75.

Хорошо известно, что сильно регулярные графы с $\lambda = \mu = 1$ не существуют. Сильно регулярный граф с $\lambda = 2$, $\mu = 1$ имеет параметры $(400, 21, 2, 1)$.

Теорема 2.2 [13]. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(400, 21, 2, 1)$, g — *элемент простого порядка* p *из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

1) Δ — *пустой граф и* $p = 5$;
2) *либо* $|\Delta| = 1$ *и* $p = 3$ *или* $p = 7$, *либо* Δ *является* 4*-кликой и* $p = 2$ *или* $p = 3$;
3) $p = 2$, Δ *содержится в* $a^{\perp}$ *для некоторой вершины* $a \in \Delta$, $\Delta(a)$ *является объединением* φ *изолированных вершин и* ψ *треугольников, причём пара* (φ, ψ) *может быть* $(0, 7)$, $(3, 4)$, $(2, 3)$, $(1, 2)$, $(6, 1)$ *или* $(5, 0)$.

Следствие 2.1. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(400, 21, 2, 1)$ *и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

1) 7 *делит* $|G|$ *и* $|G|$ *делит* $2 \cdot 3 \cdot 7$;

2) 5 *делит* $|G|$ *и* $|G|$ *делит* 10 *или* $3 \cdot 5^2$;
3) $|G|$ *делит* $2 \cdot 3^3$.

Имеется бесконечно много допустимых параметров сильно регулярных графов с $\lambda = 3$, $\mu = 1$.

Теорема 2.3 [2]. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(3905, 64, 3, 1)$, g — *элемент простого порядка* p *из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

1) $p > 3$, *либо* Ω — *пустой граф*, $p = 5$, $p = 11$ *или* $p = 71$ *и* 16 *делит* $\alpha_1(g)+9$, *либо* Ω *является* 5*-кликой*, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 5(16s + 4)$, *либо* Ω *является мельницей на* $4x + 1$ *вершинах из* $a^{\perp}$ *для некоторой вершины* a, $p = 5$, $x = 6$ *или* $x = 11$, $\alpha_1(g) = 5(16q + 8)$ *или* $\alpha_1(g) = 5(16r + 12)$;
2) $p = 3$, Ω *является подграфом из* $a^{\perp}$ *и* $\Omega(a)$ *содержит* x *изолированных вершин и* y *клик порядка* 4, *где пара* (x, y) *может быть* $(0, 4)$, $(0, 16)$, $(2, 5)$, $(4, 6)$, $(6, 7)$, $(8, 8)$ *или* $(16, 0)$;
3) $p = 2$ *и* $\Omega = a^{\perp}$ *для некоторой вершины* a.

Следствие 2.2. *Сильно регулярный граф с параметрами* $(3905, 64, 3, 1)$ *не является вершинно-симметричным.*

Теорема 2.4 [1]. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(9701, 100, 3, 1)$, g — *элемент простого порядка* p *из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

1) $p > 3$, *либо* Ω — *пустой граф*, $p = 89$ *или* $p = 109$ *и* 20 *делит* $\alpha_1(g) + 11$, *либо* Ω *является одновершинным графом*, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g)$ *делится на* 20;
2) $p = 3$, Ω — *подграф из* $a^{\perp}$ *и* $\Omega(a)$ *является объединением* x *изолированных вершин и* y *клик порядка* 4, 3 *делит* $x + y - 1$ *и* 5 *делит* $2x + y$;
3) $p = 2$ *и* $\Omega = a^{\perp}$ *для некоторой вершины* a.

Следствие 2.3. *Порядок группы автоморфизмов сильно регулярного графа* Γ *с параметрами* $(9701, 100, 3, 1)$ *делит* $2^l 3 \cdot 5^2 89 \cdot 109$, *и* Γ *не является вершинно-симметричным графом.*

Предположим теперь, что $\mu = 2$.

Теорема 2.5 [14]. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(352, 26, 0, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

1) $p = 2$ *и либо* Δ — *пустой граф*, 14*-коклика или связный граф степени* 6 *на* 32 *вершинах, либо* Δ *имеет четыре связные компоненты, являющиеся четырёхугольниками*;
2) $p = 5$ *и* Δ — *двухвершинная клика*;
3) $p = 11$ *и* Δ — *пустой граф*;
4) $p = 13$ *и* Δ *является одновершинным графом.*

Из теоремы 2.5 следует, что порядок группы автоморфизмов G графа Γ с параметрами (352,26,0,2) делит $2^l \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13$.

Теорема 2.6 [20]. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(704, 37, 0, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *$p = 2$ и Ω либо пустой граф, либо объединение 10 изолированных рёбер, либо вполне регулярный граф степени 5 на 32 вершинах, либо вполне регулярный граф степени 7 на 44 вершинах;*
2) *$p = 5$ или $p = 7$ и Ω является четырёхугольником;*
3) *$p = 11$ и Ω — пустой граф;*
4) *$p = 37$ и Ω — одновершинный граф.*

Из теоремы 2.6 следует что порядок группы автоморфизмов G графа Γ с параметрами $(704, 37, 0, 2)$ делит $2^l \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37$. В частности, G — разрешимая группа.

Теорема 2.7 [12]. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(99, 14, 1, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если g — элемент простого порядка из G, $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *Δ — одновершинный граф и $|g| = 2$ или $|g| = 7$;*
2) *Δ — пустой граф и $|g| = 3$ или $|g| = 11$;*
3) *Δ — треугольник и $|g| = 3$.*

В частности, порядок группы автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(99, 14, 1, 2)$ делит $2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$.

Следствие 2.4. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(99, 14, 1, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если G содержит инволюцию t, то выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *$|G|$ делится на 7 и делит 42, причём $[O(G), t] = 1$ и в случае $|G| = 42$ подгруппа $O(G)$ неабелева;*
2) *$|G|$ делит 6.*

Теорема 2.8 [22]. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(243, 22, 1, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если g — элемент простого порядка p из G, $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *$p = 2$, $|\Delta| = 9$ и каждая связная компонента графа Δ является одновершинным графом, треугольником или (3×3)-решёткой;*
2) *$p = 3$, Δ является пустым графом или (3×3)-решёткой;*
3) *$|p| = 5$, Δ является треугольником;*
4) *$|p| = 11$, Δ является одновершинным графом.*

Пусть Γ — сильно регулярный граф с $\lambda = \mu = 2$. Тогда $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = 4(k - 2)$ является квадратом. Поэтому $k = u^2 + 2$, и по условию целочисленности $4u$ делит $(u - 1)(u^2 + 2)(u^2 + u + 2)$. Следовательно, $u = 2$ и Γ имеет параметры $(16,6,2,2)$ (в частности, Γ является (4×4)-решёткой или графом Шрикханде).

Теорема 2.9 [21]. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(85,14,3,2)$, g — элемент простого порядка p из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *$p=5$ или $p=17$ и Δ — пустой граф;*
2) *$p=7$ и Δ является 1-кликой или $p=5$ и Δ является 5-кликой;*
3) *$p=3$, Δ является четырёхугольником или (2×5)-решёткой и в последнем случае для шести вершин из Δ их окрестности содержат ровно две максимальных 3-клики;*
4) *$p=2$, окрестность каждой вершины из Δ связна, Δ является объединением φ изолированных вершин и ψ изолированных треугольников, причём либо $\psi=1$ и $\varphi\in\{4,6\}$, либо $\psi=0$ и $\varphi=5$.*

Из теоремы следует, что для группы G автоморфизмов графа Γ множество $\pi(G)$ содержится в $\{2,3,5,7,17\}$.

Предположим, что $\mu=3$.

Теорема 2.10 [15]. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(162,21,0,3)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$, X_i — множество вершин из $\Gamma-\Omega$, смежных ровно с i вершинами из Ω, и $x_i=|X_i|$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *$p=2$ и либо $|\Omega|=0$, либо Ω является 3-лапой;*
2) *$p=3$ и выполняется одно из следующих утверждений:*
   а) *Ω является $K_{3,3}$-подграфом;*
   б) *Ω является объединением трёх изолированных $K_{3,3}$-подграфов;*
   в) *Ω содержит три изолированные вершины u_1, u_2, u_3 и две $K_{3,3}$-компоненты Ω^1, Ω^2;*
   г) *Ω содержит три изолированных вершины u_1, u_2, u_3 и $K_{3,3}$-компоненту Ω^1;*
   д) *Ω является 3α-кокликой, $\alpha\leqslant 5$;*
3) *$p=5$ и Ω является двухвершинной кликой;*
4) *$p=7$ и Ω является одновершинной кликой.*

Из теоремы следует, что $|G/O(G)|\leqslant 2$.

Теорема 2.11 [10]. *Если Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(115,18,1,3)$, то порядок группы автоморфизмов графа Γ делит $2^\alpha 3^\beta 5\cdot 23$.*

Теорема 2.12 [11]. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(364,33,2,3)$, g — элемент простого порядка p из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *$p=7$ или $p=13$ и Ω — пустой граф;*
2) *$p=11$ и Ω является 1-кликой или $p=5$ и Ω является 4-кликой;*

3) *$p = 3$ и либо Ω является графом Пэли с параметрами $(13, 6, 2, 3)$, либо Ω является объединением α изолированных вершин и β изолированных 4-клик, число $|\Omega|$ сравнимо с 1 по модулю 3 и не превосходит 22;*
4) *$p = 2$ и либо для некоторых несмежных вершин $a, b \in \Omega$ получим $|\Omega(a) \cap \Omega(b)| = 3$, либо Ω является одним из следующих графов:*
   а) *граф Петерсена;*
   б) *$\Omega \subset a^{\perp}$ для некоторой вершины a, $\Omega(a)$ содержит β изолированных вершин и γ треугольников, причём число $\beta + \gamma$ нечётно.*

Из теоремы следует, что для группы G автоморфизмов графа Γ множество $\pi(G)$ содержится в $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с $\lambda = \mu = 3$. Тогда число $(\lambda - \mu)^2 + 4(k-\mu) = 4(k-3)$ является квадратом. Следовательно, $k = u^2+3$, и по условию целочисленности $6u$ делит $(u-1)(u^2+3)(u^2+u+3)$, поэтому $u = 3$ и Γ имеет параметры $(45, 12, 3, 3)$. Все сильно регулярные графы с этими параметрами и их автоморфизмы найдены в [27].

Пусть сильно регулярный граф Γ с параметрами (v, k, λ, μ) имеет собственные значения k, r, s. Если графы Γ и $\bar{\Gamma}$ связны, то выполняются неравенства, называемые условиями Крейна:

1) $(r+1)(k+r+2rs) \leqslant (k+r)(s+1)^2$;
2) $(s+1)(k+s+2rs) \leqslant (k+s)(r+1)^2$.

Граф Γ назовём графом Крейна, если для него достигается равенство в одном из условий Крейна. Интересно, что в графе Крейна первая и вторая окрестности любой вершины сильно регулярны. Сильно регулярный граф Крейна без треугольников имеет параметры $\big((r^2+3r)^2, r^3+3r^2+r, 0, r^2+r\big)$ для некоторого натурального числа r, такой граф мы обозначим через $\mathrm{Kre}(r)$.

Для каждого из $r = 1, 2$ существует единственный граф Крейна $\mathrm{Kre}(r)$. Это дополнительный граф для графа Клебша и граф Хигмена—Симса соответственно. В [7] доказано, что в случае $r = 3$ графа Крейна не существует. Вопрос о существовании графов Крейна с $r \geqslant 4$ остаётся открытым.

Теорема 2.13 [16]. *Пусть Γ — граф Крейна $\mathrm{Kre}(5)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если g — элемент нечётного простого порядка p из G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, то верно одно из следующих утверждений:*

1) *Ω — пустой граф и $p = 2$ или $p = 5$;*
2) *либо Ω — одновершинный граф и $p = 41$, либо Ω является 2-кликой и $p = 17$;*
3) *Ω является графом $K_{8,8}$ с удалённым максимальным паросочетанием и $p = 3$.*

Теорема 2.14 [5]. *Пусть Γ — граф Крейна $\mathrm{Kre}(4)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если g — элемент простого порядка p из G, то $p \in \{2, 7\}$, причём в случае $p = 7$ g действует без неподвижных точек.*

3. Автоморфизмы графов диаметра, большего 2

Впервые метод Хигмена был применен к графам диаметра 3 в [3]. В этой работе изучены автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{8,7,5;1,1,4\}$ на 135 вершинах. Граф Γ имеет спектр $\{8^1,3^{54},-1^{50},-4^{30}\}$, и граф Γ_3 сильно регулярный с параметрами $(135,70,37,35)$.

Теорема 3.1 [3]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{8,7,5;1,1,4\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

1) $p=3$ *или* $p=5$ *и* Ω — *пустой граф*;
2) $p=7$ *и* Ω *является двухвершинной кликой*;
3) $p=2$ *и выполнено одно из следующих утверждение*:

   а) Ω *состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии* 3 *в* Γ, *и* $|\Omega|$ *равно* 3, 5, 7, 9, 11 *или* 13;
   б) Ω *содержит две вершины степени* 4, *восемь вершин степени* 2 *и одну или три вершины степени* 0;
   в) Ω *содержит шестиугольник и единственную изолированную вершину.*

Следствие 3.1. *Дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{8,7,5;1,1,4\}$, не является вершинно транзитивным.*

В [8] изучались вполне регулярные графы диаметра d, в которых для некоторой вершины a пара $\big(\Gamma_3(a),\Gamma_2(a)\big)$ является 2-схемой.

Для дистанционно регулярных графов диаметра 3, в которых для любой вершины a пара $\big(\Gamma_3(a),\Gamma_2(a)\big)$ является 2-схемой, можно выдвинуть следующее предположение.

Гипотеза Σ. Если Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, в котором для любой вершины a пара $\big(\Gamma_3(a),\Gamma_2(a)\big)$ является 2-схемой, то подграф $\Sigma=\Gamma_3(a)$ является кликой или кокликой.

Указанная гипотеза подтверждается тем, что среди допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов диаметра 3, приведённых в [24], лишь два массива, $\{60,45,8;1,12,50\}$ и $\{49,36,8;1,6,42\}$, отвечают графам, для которых могут быть выполнены условия гипотезы Σ. Для первого массива $\Gamma_3(a)$ является (6×6)-решёткой, а для второго — объединением семи изолированных 8-клик. Однако в [8] доказано, что в дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{60,45,8;1,12,50\}$ найдётся вершина, третья окрестность которой не является (6×6)-решёткой. Для второго случая пара $\big(\Gamma_3(a),\Gamma_2(a)\big)$ является 2-(V,K,Λ)-схемой, где $V=56$, $K=8$ и $\Lambda=42\cdot 7/55$.

В [9] изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{60,45,8;1,12,50\}$. Этот граф имеет спектр $\{60^1,14^{45},0^{207},-10^{69}\}$, является Q-полиномиальным, и граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(322,225,160,150)$.

Теорема 3.2 [9]. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$, g — *элемент из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *простого порядка* $p \geqslant 5$ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда верно одно из следующих утверждений*:

1) $p = 7$ *или* $p = 23$ *и* Ω — *пустой граф*;
2) $p = 5$ *и верно одно из следующих утверждений*:
   а) Ω *состоит из двух вершин, находящихся на расстоянии* 3 *в* Γ;
   б) $|\Omega| = 7$ *и* $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ *является* 6-*кликой для некоторой вершины* $a \in \Omega$.

Каждый из известных дистанционно регулярных графов Тервиллигера с $\mu > 1$ является локально графом Мура (т. е. сильно регулярным графом с параметрами $(k^2+1, k, 0, 1)$, $k \in \{2, 3, 7, 57\}$. Связный локально пятиугольный граф является графом икосаэдра. По теореме Дж. Холла [24, теорема 1.16.5] имеется ровно три связных локально петерсеновских графа: $\bar{T}(7)$, граф Конвея—Смит (единственный дистанционно регулярный граф на 63 вершинах с массивом пересечений $\{10, 6, 4, 1; 1, 2, 6, 10\}$) и граф Доро (единственный дистанционно регулярный граф на 65 вершинах с массивом пересечений $\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$). Неизвестно, существуют ли графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана—Синглтона.

В [6] найдены возможные автоморфизмы гипотетических дистанционно регулярных графов Тервиллигера с массивами пересечений $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$ и $\{50, 42, 9; 1, 2, 42\}$. Хорошо известна гипотеза о том, что дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана—Синглтона, имеет один из указанных массивов пересечений.

Теорема 3.3 [6]. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф Тервиллигера, имеющий массив пересечений* $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* p *нечётно и верно одно из следующих утверждений*:

1) $p = 3$, $p = 11$ *или* $p = 17$ *и* Ω — *пустой граф*;
2) $p = 5$, Ω *состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии* 3, *и* $|\Omega| \in \{2, 7, 12, 17\}$.

Теорема 3.4 [6]. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф Тервиллигера, имеющий массив пересечений* $\{50, 42, 9; 1, 2, 42\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* p *нечётно и верно одно из следующих утверждений*:

1) $p = 3$, $p = 13$ *или* $p = 17$ *и* Ω — *пустой граф*;
2) $p = 7$ *и* Ω *является объединением пяти изолированных* 2-*клик*;
3) $p = 5$ *и* Ω *является одновершинной кликой.*

Следствие 3.2. *Дистанционно регулярные графы Тервиллигера, имеющие массив пересечений* $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$ *или* $\{50, 42, 9; 1, 2, 42\}$, *не являются вершинно транзитивными.*

Система инцидентности $(X, \mathcal{L})$, где X — множество точек и $\mathcal{L}$ — множество прямых, называется *почти $2n$-угольником порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точек, каждая точка лежит на $t+1$ прямых (прямые пересекаются не более чем по одной точке), диаметр графа коллинеарности равен n и для любой пары $(a, L) \in (X, \mathcal{L})$ на прямой L найдётся единственная точка, ближайшая к a в графе коллинеарности. Почти $2n$-угольник называется *обобщённым $2n$-угольником*, если любые две точки u, w, находящиеся на расстоянии, меньшем n, лежат в единственном геодезическом пути, идущем от u к w. Обобщённый $2n$-угольник порядка (s,t) называется *толстым*, если $s>1$ и $t>1$.

В [4] изучаются автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{10,8,8,8;1,1,1,5\}$ на 1755 вершинах. Этот граф имеет спектр $\{10^1, 5^{351}, 1^{650}, -3^{675}, -5^{78}\}$, является точечным графом обобщённого восьмиугольника $\mathrm{GO}(2,4)$ (см. [3, гл. 6]) и не содержит n-циклов для $4 \leqslant n \leqslant 8$. Известно существование толстого обобщённого восьмиугольника только для $\{s,t\} = \{q, q^2\}$, $q = 2^{2n-1}$. При этом $\mathrm{GO}(q,q^2)$ отвечает билдингу группы ${}^2F_4(q)$.

В случае $q=2$ вершинами графа Γ являются центральные инволюции группы ${}^2F_4(2)'$ и две центральные инволюции u, w смежны тогда и только тогда, когда uw также является центральной инволюцией группы ${}^2F_4(2)'$. Легко понять, что $d(u,w)=2$ тогда и только тогда, когда uw является нецентральной инволюцией группы ${}^2F_4(2)'$, $d(u,w)=3$ тогда и только тогда, когда $|uw|=4$ (и в этом случае $(uw)^2$ является нецентральной инволюцией группы ${}^2F_4(2)'$), $d(u,w)=4$ тогда и только тогда, когда $|uw|=5$.

Теорема 3.5 [4]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{10,8,8,8;1,1,1,5\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

1) *$p=3$ или $p=13$ и Ω — пустой граф*;
2) *$p=5$ и Ω состоит из 5ω вершин, любые две из которых находятся на расстоянии 4 в Γ*;
3) *$p=2$, $|\Omega|$ нечётно верно одно из следующих утверждений*:
    а) *в Ω найдётся такой треугольник $\{x,y,z\}$, что Ω является объединением шаров радиуса 1 с центрами в $\{x,y,z\}$*;
    б) *в Ω найдётся такая вершина b, что $[b] \subset \Omega$, Ω содержится в шаре радиуса 2 с центром b и найдутся такие две несмежные вершины $a, c \in [b]$, что $\Omega(a)$ и $\Omega(c)$ не содержатся в $b^{\perp}$.*

С помощью классификации конечных простых групп получено следствие.

Следствие 3.3. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{10,8,8,8;1,1,1,5\}$, и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда Γ — точечный граф классического обобщённого восьмиугольника группы Титса ${}^2F_4(2)'$.*

В [18] изучаются автоморфизмы дистанционно регулярных накрытий графа Хигмена—Симса. Если Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 5, являющийся r-накрытием графа Хигмена—Симса, то Γ имеет массив пересечений $\{22, 21, t(r-1), 6, 1; 1, 6, t, 21, 22\}$ и $r = 2, 3$. Если $r = 3$, то $t \in \{6, 7, 8\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность. Если же $r = 2$, то по [24, теорема 4.2.11] граф Γ является двудольным удвоением графа Хигмена—Симса.

Теорема 3.6 [18]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{22, 21, 3, 1; 1, 3, 21, 22\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ и верно одно из следующих утверждений:*

1) *$p = 11$, Ω — антиподальный класс, $\alpha_2(g) = 154$ и $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 22$;*
2) *$p = 7$, Ω — граф степени 1, являющийся объединением двух антиподальных классов, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 14$ и $\alpha_2(g) = 168$;*
3) *$p = 5$, Ω — пустой граф, $\alpha_4(g) = 0$ и либо $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$, либо $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 50$;*
4) *$p = 3$, Ω является объединением двух изолированных $K_{5,5}$-подграфов с удалённым максимальным паросочетанием и $\alpha_2(g) = 180$;*
5) *$p = 2$, Ω — пустой граф и $\alpha_4(g) = 200$.*

Теорема 3.7 [18]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{22, 21, 4, 1; 1, 2, 21, 22\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ и верно одно из утверждений:*

1) *$p = 11$, Ω является антиподальным классом, $\alpha_2(g) = 231$ и $\alpha_1(g) = 66$;*
2) *$p = 7$, Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_2(g) = 252$ и $\alpha_1(g) = \alpha_3(g)/2 = 14$;*
3) *$p = 5$, Ω — пустой граф, $\alpha_4(g) = 0$ и либо $\alpha_2(g) = 300$, либо $\alpha_1(g) = \alpha_3(g)/2 = 50$, $\alpha_2(g) = 150$;*
4) *$p = 3$, Ω — пустой граф, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$, $\alpha_4(g) = 300$ или $\alpha_4(g) = 30$, $\alpha_2(g) = 270$;*
5) *$p = 2$, Ω — пустой граф, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 180$ и $\alpha_1(g) = \alpha_3(g)/2 = 40$.*

Следствие 3.4. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 4, являющийся 2-накрытием или 3-накрытием графа Хигмена—Симса. Тогда группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует интранзитивно на множестве антиподальных классов графа Γ.*

В [17] изучаются автоморфизмы дистанционно регулярного графа Γ, являющегося r-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$. Хорошо известно, что существует единственный сильно регулярный граф с такими параметрами. Если диаметр графа Γ равен 5, то граф имеет массив пересечений $\{20, 18, t(r-1), 6, 1; 1, 6, t, 18, 20\}$ и $c_2 \leqslant t \leqslant \min\{b_1, a_2\}/(r-1)$ (здесь параметры a_2, b_1, c_2 отвечают сильно регулярному графу), поэтому $r \leqslant 3$. Если $r = 3$, то

$t = 6, 7$. Если же $r = 2$, то $6 \leqslant t \leqslant 14$. В любом случае некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность. Если диаметр графа Γ равен 4, то граф имеют допустимые массивы пересечений при $r \in \{2, 3, 6\}$ и в случае $r = 3$ такое накрытие существует (это граф смежных классов укороченного тернарного кода Голея). Проблема существования 2- и 6-накрытий диаметра 4 явно сформулирована в [24, § 11.3.H].

Теорема 3.8 [17]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $|G|$ делит 18 и верно одно из следующих утверждений:*

1) *$p = 2$, $|\Omega| = 0$ и $d(u, u^g) = 4$ для любой вершины $u \in \Gamma$;*
2) *$p = 3$, Ω является пустым графом или объединением двух треугольников, расстояние между которыми в Γ равно 3, и $\alpha_3(g) = \alpha_4(g) = 0$.*

Теорема 3.9 [17]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{20, 18, 4, 1; 1, 2, 18, 20\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p, $\bar{\Gamma}$ — антиподальное частное графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

1) *$p = 5$, Ω — антиподальный класс, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 180$ и $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 30$;*
2) *$p = 2$, $\bar{\Omega}$ является m-кокликой, $m \in \{1, 3, 9\}$, и Ω является n-кокликой, $n \in \{1, 9, 9\}$;*
3) *$p = 3$, $\alpha_3(g) = \alpha_4(g) = 0$ и верно одно из следующих утверждений:*
   а) *$\alpha_4(g) = 243$;*
   б) *$\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 243$ и $\alpha_1(g)$ делится на 9;*
   в) *$\alpha_2(g) = 243$;*
   г) *$\alpha_0(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 54$, $\alpha_2(g) = 162$, $\alpha_4(g) = 27$ и $\alpha_1(g) \in \{0, 27, 54\}$;*
   д) *$\alpha_0(g) = 9$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 54$, $\alpha_2(g) = 162$, $\alpha_4(g) = 18$ и $\alpha_1(g) \in \{0, 27, 54\}$.*

Теорема 3.10 [17]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p, $\bar{\Gamma}$ — антиподальное частное графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

1) *$p = 5$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 120$, $\alpha_2(g) = 360$, либо $\alpha_0(g) = 1$, $\alpha_4(g) = 5$ и $\alpha_1(g) \in \{20, 65, 110\}$, либо $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_0(g) = 6$ и $\alpha_1(g) \in \{0, 45, 90\}$;*
2) *$p = 3$ и верно одно из следующих утверждений:*
   а) *$\alpha_4(g) = 486$;*
   б) *$\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 486$ и $\alpha_1(g)$ делится на 9;*
   в) *$\alpha_2(g) = 486$;*
   г) *$\alpha_0(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 108$, $\alpha_2(g) = 324$, $\alpha_4(g) = 54$ и $\alpha_1(g)$ делится на 9;*

д) $\alpha_0(g) = 18$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 108$, $\alpha_2(g) = 324$, $\alpha_4(g) = 36$ *и* $\alpha_1(g) - 3$ *делится на* 9.

Следствие 3.5. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф диаметра* 4, *являющийся* r-*накрытием сильно регулярного графа с параметрами* $(81, 20, 1, 6)$, $r \in \{2, 3, 6\}$. *Если группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ, *то* $r = 3$.

Литература

[1] Белоусов И. Н. О сильно регулярных графах с $\mu = 1$ и их автоморфизмах. II // Тр. ИММ УрО РАН. — 2007. — Т. 13, № 4. — С. 27—33.

[2] Белоусов И. Н., Махнев А. А. О сильно регулярных графах с $\mu = 1$ и их автоморфизмах // Докл. РАН. — 2006. — Т. 410, № 2. — С. 151—155.

[3] Белоусов И. Н., Махнев А. А. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{8, 7, 5; 1, 1, 4\}$ и его автоморфизмы // Тр. ИММ УрО РАН. — 2007. — Т. 13, № 1. — С. 44—56.

[4] Белоусов И. Н., Махнев А. А. Об автоморфизмах обобщённого восьмиугольника порядка $(2, 4)$ // Докл. РАН. — 2008. — Т. 423, № 2. — С. 151—154.

[5] Гаврилюк А. Л. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами $(784, 116, 0, 20)$ // Сиб. электрон. мат. изв. — 2008. — Т. 5. — С. 80—87.

[6] Гаврилюк А. Л., Го Вэньбинь, Махнев А. А. Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов Тервиллигера // Алгебра и логика. — 2008. — Т. 13, № 2. — С. 41—53.

[7] Гаврилюк А. Л., Махнев А. А. О графах Крейна без треугольников // Докл. РАН. — 2005. — Т. 403, № 6. — С. 727—730.

[8] Гаврилюк А. Л., Махнев А. А. Вполне регулярные графы и блок-схемы // Сиб. мат. журн. — 2006. — Т. 47, № 4. — С. 753—768.

[9] Гаврилюк А. Л., Махнев А. А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ // Тр. ИММ УрО РАН. — 2007. — Т. 13, № 2. — С. 41—53.

[10] Кабанов В. В., Ткачёва (Минакова) И. М. Об автоморфизмах графов с параметрами $(115, 18, 1, 3)$ // Тр. 35-й регион. молод. конф. — Екатеринбург: УрО РАН, 2004. — С. 30—32.

[11] Казарина В. И., Махнев А. А. Об автоморфизмах сильно регулярных графов с $\lambda = 2$ и $\mu = 3$ // Вестн. УГТУ. — 2005. — № 17 (69). — С. 174—194.

[12] Махнев А. А., Минакова И. М. Об автоморфизмах графов с $\lambda = 1$, $\mu = 2$ // Дискрет. мат. — 2004. — Т. 16, № 1. — С. 95—104.

[13] Махнев А. А., Нирова М. С. Узкие частичные четырёхугольники и их автоморфизмы // Алгебра и логика. — 2006. — Т. 45, № 5. — С. 603—619.

[14] Махнев А. А., Носов В. В. Об автоморфизмах сильно регулярных графов с $\lambda = 0$, $\mu = 2$ // Мат. сб. — 2004. — Т. 185, № 3. — С. 47—68.

[15] Махнев А. А., Носов В. В. Об автоморфизмах графов с $\lambda = 0$, $\mu = 3$ // Междунар. алгебр. конф. «Классы групп и алгебр». Тез. докл. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 2005. — С. 78—79.

[16] Махнев А. А., Носов В. В. Об автоморфизмах сильно регулярных графов Крейна без треугольников // Алгебра и логика. — 2005. — Т. 44, № 3. — С. 335—354.

[17] Махнев А. А., Падучих Д. В. Автоморфизмы накрытий сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$ // Докл. РАН. — 2008. — Т. 423, № 1. — С. 25—28.

[18] Махнев А. А., Падучих Д. В. О накрытиях графа Хигмена—Симса и их автоморфизмах // Докл. РАН. — 2008. — Т. 422, № 1. — С. 26—29.

[19] Махнев А. А., Падучих Д. В. О группе автоморфизмов графа Ашбахера // Докл. РАН. — 2009. — Т. 426, № 3. — С. 310—313.

[20] Носов В. В. Об автоморфизмах графа с параметрами $(704, 37, 0, 2)$ // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тр. 36-й регион. молод. конф. — Екатеринбург: УрО РАН, 2005. — С. 55—60.

[21] Падучих Д. В. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (85,14,3,2) // Междунар. алгебр. конф. «Классы групп и алгебр». Тез. докл. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 2005. — С. 85—87.

[22] Ткачёва (Минакова) И. М. Об автоморфизмах графов с параметрами $(243, 22, 1, 2)$ // Тр. 35-й регион. молод. конф. — Екатеринбург: УрО РАН, 2004. — С. 51—59.

[23] Aschbacher M. The nonexistence of rank three permutation groups of degree 3250 and subdegree 57 // J. Algebra. — 1971. — Vol. 19, no. 3. — P. 538—540.

[24] Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs. — Berlin: Springer, 1989.

[25] Cameron P. J., van Lint J. Graphs, Codes and Designs. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. — (London Math. Soc., Student Texts; Vol. 22).

[26] Cameron P. J. Permutation Groups. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. — (London Math. Soc., Student Texts; Vol. 45).

[27] Cooolsaet K., Degraer R., Spence E. The strongly regular $(45, 12, 3, 3)$ graphs // Electron. J. Combin. — 2006. — Vol. 13, No. R32. — P. 1—9.