О конечно порождённых разрешимых нехопфовых группах

В. Г. МИКАЕЛЯН
e-mail: mikaelian@member.ams.org

УДК 512.54

Ключевые слова: разрешимые нехопфовы группы, многообразия групп, неметанильпотентные многообразия.

Аннотация

Существует континуум 3-порождённых разрешимых нехопфовых групп, порождающих попарно различные многообразия групп. Каждая счётная (разрешимая) группа субнормально вложима в 3-порождённую (разрешимую) нехопфову группу. В качестве иллюстрации к одной из проблем Ханны Нойман мы находим континуум неметанильпотентных многообразий, которые содержат конечно порождённые нехопфовы группы и несчётное количество попарно неизоморфных конечно порождённых групп.

Abstract

V. H. Mikaelian, On finitely generated soluble non-Hopfian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 1, pp. 81—98.

There is a continuum of 3-generator soluble non-Hopfian groups that generate pairwise distinct varieties of groups. Each countable (soluble) group is subnormally embeddable into a 3-generator (soluble) non-Hopfian group. As an illustration to a problem of Neumann, we find a continuum of nonmetanilpotent varieties that contain finitely generated non-Hopfian groups and contain noncountably many pairwise nonisomorphic finitely generated groups.

1. Введение и основные результаты

1.1. Континуум 3-порождённых разрешимых нехопфовых групп

Группа G называется хопфовой, если всякий эндоморфизм на G есть автоморфизм, т. е. если G не изоморфна ни одной из своих собственных фактор-групп. Каждая конечно порождённая финитно аппроксимируемая группа (в частности, каждая свободная группа конечного ранга и каждая свободная полинильпотентная группа конечного ранга) является хопфовой группой [2]. С другой стороны, легко убедиться, что свободная группа бесконечного ранга и свободная абелева группа бесконечного ранга не являются хопфовыми группами. Этот контраст вызывает интерес к конечно порождённым нехопфовым группам (на самом деле исходно в 1930-х годах проблема была поставлена Х. Хопфом именно о существовании таких групп [12]). Первые ответы на этот вопрос были даны Б. Нойманом [19] и Г. Хигманом [11]. В дальнейшем эта проблематика развивалась в [1, 6, 7, 13, 20, 21, 24, 25, 27] (см. также литературу, упомянутую в этих статьях).

Первая цель этой статьи — показать, что конечно порождённых нехопфовых групп «много». Существует континуум таких групп, более того, эти группы не только попарно неизоморфны, но и порождают попарно различные многообразия, т. е. имеют попарно неэквивалентные системы тождеств.

Теорема 1. *Существует континуум 3-порождённых разрешимых нехопфовых групп, порождающих попарно различные многообразия групп. Длина разрешимости этих групп не более девяти.*

В частности, принимая во внимание то, что множество всех многообразий групп само имеет мощность континуум [3], получаем, что множество многообразий, порождённых 3-порождёнными разрешимыми нехопфовыми группами, имеет ту же мощность, что и множество всех многообразий групп.

1.2. Вложения в нехопфовы группы, вербальные вложения

Прямое приложение нашей конструкции позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Каждая счётная группа N вложима в 3-порождённую нехопфову группу K. Более того, это вложение может быть субнормальным, и если N — разрешимая группа длины разрешимости l, то K — разрешимая группа длины не более $l+4$.*

Если мы опустим требование о субнормальности вложений и разрешимости нехопфовых групп, то имеется более сильный результат: как доказано П. Шуппом в [27], каждая счётная группа вложима в 2-порождённую нехопфову группу. В этой связи естествен следующий вопрос.

Проблема. Вложима ли любая счётная разрешимая группа N в 2-порождённую разрешимую нехопфову группу K? Если да, то как ограничена длина разрешимости группы K в терминах длины разрешимости группы N? Может ли это вложение быть субнормальным?

Важность вложений счётных разрешимых групп в конечно порождённые и в 2-порождённые разрешимые группы была подчёркнута Б. Нойманом. Счётные абелевы или нильпотентные группы не всегда вложимы в конечно порождённые абелевы или соответственно нильпотентные группы (см., например, [23, 24]). Возможность субнормальности вложения любой счётной группы в 2-порождённую группу была доказана Р. Дарком в [4].

Ещё одно свойство, которым может обладать наше вложение, есть вербальность. Для данного нетривиального множества слов $V \subseteq F_\infty$ заданное вложение группы X в группу Y вербальное (или V-вербальное), если изоморфная копия группы X в Y при этом вложении лежит в вербальной подгруппе $V(Y)$ группы Y. Чем «больше» множество слов V, тем «меньше» вербальная подгруппа $V(Y)$, т. е., образно выражаясь, вербальность вложений имеет тот смысл, что группа X не только может быть вложена в Y, но и занимает там «небольшую» часть. Понятие вербальных вложений было введён Х. Хайнекеном в [8] (см. также [9, 10, 14, 15]). Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 3. *Для любого нетривиального множества слов $V \subseteq F_\infty$ каждая счётная группа N вложима в 3-порождённую нехопфову группу K и это вложение может быть V-вербальным. Более того, это вложение субнормально, и если N — разрешимая группа длины l, то K — разрешимая группа длины не более $l + c + 4$, где c — наименьшее натуральное число, такое что многообразие $\mathfrak{N}_c$ нильпотентных групп класса не больше c не содержится в многообразии $\mathfrak{V}$ соответствующей V.*

1.3. Иллюстрация к проблеме Ханны Нойман

Ещё одна цель этой статьи — проиллюстрировать проблему 16 Х. Нойман [25] и результат Дж. Гроувза [5].

В литературе все известные примеры локально разрешимых многообразий содержат конечно порождённую нехопфову группу тогда и только тогда, когда они содержат несчётное количество попарно неизоморфных конечно порождённых групп. Проблема 16 [25] состоит в том, чтобы выяснить, верно ли, что эти два условия совпадают для всех локально разрешимых многообразий групп. Самый общий частичный ответ был дан Дж. Гроувзом. Он показал, что для метанильпотентных многообразий групп проблема 16 имеет положительный ответ [5]. Наша конструкция позволяет построить широкие классы многообразий, не являющихся метанильпотентными, для которых проблема также имеет положительный ответ.

Теорема 4. *Существует континуум разрешимых неметанильпотентных многообразий групп, каждая из которых содержит 3-порождённую нехопфову группу и несчётное количество попарно неизоморфных конечно порождённых групп. Таким образом, существует континуум неметанильпотентных многообразий групп, для которых проблема Ноймана имеет положительное решение.*

1.4. Структура доказательства

Теоремы 1—4 на самом деле следуют из одной общей конструкции вложения. Это вложение состоит из двух основных частей: в разделе 2 мы строим вложение произвольной 2-порождённой группы G в соответствующую 3-порождённую нехопфову группу K с заданными свойствами. В разделе 3 мы используем множество мощности континуум $\{N_i \mid i \in I\}$ счётных групп N_i, порождающих попарно различные многообразия групп, построенное А. Ю. Ольшанским в [3], и описываем вербальное вложение любой группы N в соответствующую 2-порождённую группу G. Комбинируя эти вложения группы N в G и группы G в K, мы получаем вложения теорем 2 и 3. Применяя это к группам $\{N_i \mid i \in I\}$, мы получаем континуум нехопфовых групп для теоремы 1. Дальнейшее изучение конструкции даёт нам многообразия, упомянутые в теореме 4. Доказательства в разделе 2 подробны, конструкция раздела 3 дана схематически, так как она была подробно описана в [3, 17, 18].

Сведения о многообразиях групп и обозначения можно найти в [25] (см. также [26]).

2. Вложение 2-порождённых групп в 3-порождённые нехопфовы группы

2.1. Конструкция группы $H(G)$

Начнём с модификации конструкции, предложенной Б. Нойманом в [24, разделы 4, 7]. Упомянутая конструкция позволяет вложить бесконечную циклическую группу C в 3-порождённую нехопфову группу $K = K(C)$. В этой конструкции мы собираемся сделать следующие изменения:

1) вложение группы G в $K(G)$ будет построено для любой 2-порождённой группы G;
2) наше вложение будет иметь дополнительное свойство: если две 2-порождённые группы G_1 и G_2 порождают различные многообразия групп, то соответствующие группы $K(G_1)$ и $K(G_2)$ тоже порождают различные многообразия.

Ниже мы будем следовать обозначениям из [24], чтобы сделать схожесть конструкций более очевидной.

Возьмём любые две 2-порождённые группы $G = \langle g_1, g_2 \rangle$ и рассмотрим полное сплетение $P = \bar{G} \text{ Wr } C$, где $\bar{G}$ — прямое произведение копий $G_i \cong G$ группы G, занумерованных целыми числами $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, и $C = \langle c \rangle$ — бесконечная циклическая группа. Обозначим через g_{i1} и g_{i2} копии порождающих элементов g_1 и g_2 в i-й копии G_i в $\bar{G}$ соответственно. В частности, $\bar{G} = \langle g_{i1}, g_{i2} \mid i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \rangle$. Для любого g_{ij}, $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, $j = 1, 2$, выбираем координатный элемент $\dot{g}_{ij}$ и внешний элемент $\hat{g}_{ij}$ в базовой подгруппе $\bar{G}^C$ в P:

$$\dot{g}_{ij}(c^k) = \begin{cases} g_{ij}, & \text{если } k = 0, \\ 1, & \text{если } k \neq 0, \end{cases} \qquad \hat{g}_{ij}(c^k) = \begin{cases} g_{ij}, & \text{если } k < 0, \\ 1, & \text{если } k \geqslant 0. \end{cases}$$

Эффект от такого выбора состоит в том, что в P будет иметь место равенство $[\hat{g}_{ij}, c] = \dot{g}_{ij}$ (проверка проста и основана на факте, что $[\hat{g}_{ij}, c](c^k) = \dot{g}_{ij}(c^k)$ для любого k).

Далее возьмём любую 2-порождённую свободную абелеву группу $B = \langle b, b' \rangle$ и рассмотрим полное сплетение $Q = P \,\mathrm{Wr}\, B$. Определим $b_i = b^i b'$ для всех чисел $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Рассмотрим элемент a в базовой подгруппе $P^B \leqslant Q$:

$$\begin{aligned}
&a(1) = c, \\
&a(b_i^{-1}) = \hat{g}_{k1}, \quad \text{если } i = 2k, \\
&a(b_i^{-1}) = \hat{g}_{k2}, \quad \text{если } i = 2k+1, \\
&a(y) = 1, \qquad\quad\ \ \text{если } y \text{ — другой элемент в } B.
\end{aligned}$$

Легко вычислить, что

$$\begin{aligned}
&a^{b_i}(1) = a(b_i^{-1}) = \hat{g}_{k1}, && \text{если } i = 2k, \\
&a^{b_i}(1) = a(b_i^{-1}) = \hat{g}_{k2}, && \text{если } i = 2k+1, \\
&a^{b_i}(b_i) = a(1) = c, && \text{для любого } i, \\
&a^{b_i}(b^j) = a(b^j {b'}^{-1} b^{-i}) = a(b_{i-j}^{-1}) = \hat{g}_{k1}, && \text{если } i - j = 2k, \\
&a^{b_i}(b^j) = a(b^j {b'}^{-1} b^{-i}) = a(b_{i-j}^{-1}) = \hat{g}_{k2}, && \text{если } i - j = 2k+1, \\
&a^{b_i}(y) = 1, && \text{если } y \text{ — другой элемент в } B.
\end{aligned}$$

Из этих двух систем равенств ясно, что $y = 1$ — единственная координата в B, для которой значения $a(y)$ и $a^{b_i}(y)$ могут одновременно быть отличными от 1. Поэтому

$$[a^{b_i}, a](y) = \begin{cases} [\hat{g}_{k1}, c], & \text{если } y = 1 \text{ и } i = 2k, \\ [\hat{g}_{k2}, c], & \text{если } y = 1 \text{ и } i = 2k+1, \\ 1, & \text{если } y \neq 1. \end{cases}$$

Согласно нашей конструкции для любого $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ и $j = 1, 2$ имеет место равенство $[\hat{g}_{ij}, c] = \dot{g}_{ij}$. Для удобства используем обозначение $\ddot{g}_{ij}$ для координатного элемента, соответствующего $\dot{g}_{ij}$ в базовой подгруппе P^B группы Q:

$$\ddot{g}_{ij}(y) = \begin{cases} \dot{g}_{ij}, & \text{если } y = 1, \\ 1, & \text{если } y \text{ — любой другой элемент из } B. \end{cases}$$

Очевидно, заданная подгруппа Q содержит изоморфную копию $\bar{G}$ при условии, что она содержит все элементы $\ddot{g}_{ij}$ для всех $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ и $j = 1, 2$. Определим

$$H(G) = \langle a, b_i \mid i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \rangle = \langle a, b, b' \rangle.$$

Рассмотрение выше показывает, что группа $H(G)$ (и даже её коммутант $H(G)'$) содержит

1) все элементы $\ddot{g}_{k1} = [a^{b_i}, a]$ для всех $i = 2k$;
2) все элементы $\ddot{g}_{k2} = [a^{b_i}, a]$ для всех $i = 2k+1$.

Мы доказали следующую лемму.

Лемма 1. *Для любой 2-порождённой группы G 3-порождённая группа $H(G)$, построенная выше, содержит изоморфную копию $\bar{G}$ (в своём коммутанте $H(G)'$).*

2.2. Понятие N'-схожести в сплетениях и многообразие, порождённое группой $H(G)$

Если заданные 2-порождённые группы G_1 и G_2 имеют различные системы тождеств, то группы $H(G_1)$ и $H(G_2)$ также будут иметь различные системы тождеств. Для удобства доказательства и для единообразия обозначений введём следующее определение.

Определение 1. Пусть X — произвольная группа, Y и Z — бесконечные прямые степени бесконечной циклической группы C:

$$Y = \langle c_1\rangle\langle c_2\rangle \ldots \langle c_u\rangle, \quad Z = \langle c_1\rangle\langle c_2\rangle \ldots \langle c_v\rangle,$$

где $\langle c_i\rangle \cong \langle c\rangle$ для всех $i = 1, \ldots, \max\{u, v\}$. Тогда

1) для данного натурального числа N элементы $y_1\psi_1$ и $y_2\psi_2$ декартова сплетения $X \mathrm{\ Wr\ } Y$ (где $y_1, y_2 \in Y$ и $\psi_1, \psi_2 \in X^Y$) назовём N-схожими в $X \mathrm{\ Wr\ } Y$, если $y_1 = y_2$ и $\psi_1(y) = \psi_2(y)$ для любого $y = c_1^{l_1} \cdots c_u^{l_u} \in Y$, такого что $|l_i| \leqslant N$, $1 = 1, \ldots, u$;
2) для данного натурального числа N элементы $z_1\varphi_1$ и $z_2\varphi_2$ декартова сплетения $(X \mathrm{\ Wr\ } Y) \mathrm{\ Wr\ } Z$ (где $z_1, z_2 \in Z$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in (X \mathrm{\ Wr\ } Y)^Z$) назовём N'-схожими в $(X \mathrm{\ Wr\ } Y) \mathrm{\ Wr\ } Z$, если $z_1 = z_2$ и $\varphi_1(y)$ N-схож с $\varphi_2(y)$ для любого $z = c_1^{l_1} \cdots c_v^{l_v} \in Z$, такого что $|l_i| \leqslant N$, $1 = 1, \ldots, v$.

В приложениях ниже Y и Z содержат максимум по две копии группы C. Тем не менее мы даём это определение в более общей форме, чтобы сделать некоторые части доказательств ниже похожими. В частности, если, допустим, Y совпадает с C, то $c^{k_1}\psi_1$ и $c^{k_2}\psi_2$ являются N-схожими элементами, если $k_1 = k_2$ и $\psi_1(c^t) = \psi_2(c^t)$ для $t = -N, \ldots, N$. Другой пример: если элементы $z_1\varphi_1$ и $z_2\varphi_2$ N-схожи в сплетении двух групп $X_1 = X \mathrm{\ Wr\ } Y$ и Z, то они N'-схожи в сплетении трёх групп $(X \mathrm{\ Wr\ } Y) \mathrm{\ Wr\ } Z$. Обратное не всегда верно.

Лемма 2. *Для любой 2-порождённой группы G 3-порождённая группа $H(G)$, построенная выше, порождает многообразие $\mathrm{var}(G)\,\mathfrak{A}^2$.*

Отсюда и из [25, теорема 22.44] вытекает следствие.

Следствие 1. *В обозначениях выше, если $\mathrm{var}(G_1) \neq \mathrm{var}(G_2)$, то также и $\mathrm{var}\big(H(G_1)\big) \neq \mathrm{var}\big(H(G_2)\big)$.*

Доказательство леммы 2. Многообразие $\mathrm{var}(G)\,\mathfrak{A}^2$ порождено группой $W = W(G) = (\bar{G} \mathrm{\ wr\ } C) \mathrm{\ wr\ } B$, где сплетения прямые (см. [25, теорема 22.44]). Следовательно, будет достаточно взять любое тождество $w = w(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$ и показать, что если оно нарушается в группе W, то оно нарушается и в группе $H(G)$.

Идея доказательства состоит в использовании специального множества элементов из H, на которых соотношение $w \equiv 1$ нарушается. Начнём с построения вспомогательного элемента a_N, который N'-схож с элементом a и с элементом c для любого наперёд заданного натурального числа N. Как мы видели, элементы $\ddot{g}_{ij}$ принадлежат $H(G)$. Следовательно, $(\ddot{g}_{ij})^{a^k} \in H$ для всех $i, k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ и $j = 1, 2$. Как легко проверить,

$$(\ddot{g}_{ij})^{a^k}(y) = \begin{cases} \big(a^k(1)\big)^{-1}\dot{g}_{ij}a^k(1) = (\dot{g}_{ij})^{c^k}, & \text{если} \quad y = 1, \\ \big(a^k(y)\big)^{-1} \cdot 1 \cdot a^k(y) = 1, & \text{если} \quad y \neq 1, \end{cases} \tag{1}$$

где элемент $(\dot{g}_{ij})^{c^k} \in P$ есть сдвиг координатного элемента $\dot{g}_{ij}$:

$$(\dot{g}_{ij})^{c^k}(c^s) = \begin{cases} g_{ij}, & \text{если } s = k, \\ 1, & \text{если } s \text{ — другое целое число.} \end{cases} \tag{2}$$

Теперь рассмотрим элемент

$$g_{ijNt} = \Big((\ddot{g}_{ij})^{a^{-1}} \cdot (\ddot{g}_{ij})^{a^{-2}} \cdots (\ddot{g}_{ij})^{a^{-N}}\Big)^{b_t^{-1}}.$$

Согласно построению $g_{ijNt}(y) = 1$ для любой координаты $y \neq b_t^{-1}$ в B. Оставшийся элемент

$$g_{ijNt}(b_t^{-1}) = (\dot{g}_{ij})^{c^{-1}} \cdot (\dot{g}_{ij})^{c^{-2}} \cdots (\dot{g}_{ij})^{c^{-N}} \in (\bar{G})^C$$

не тривиален, так как

$$\big(g_{ijNt}(b_t^{-1})\big)(c^l) = \hat{g}_{ij}(c^l) = \begin{cases} g_{ij} & \text{для всех } l = -N, -N+1, \ldots, -1, \\ 1 & \text{для всех } l = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} d_N = {} & \big(g_{N2N(2N+1)} \cdot g_{N1N(2N)}\big) \cdots \\ & \cdots (g_{12N3} \cdot g_{11N2})(g_{02N1} \cdot g_{01N0})\big(g_{(-1)2N(-1)} \cdot g_{(-1)1N(-2)}\big) \cdots \\ & \cdots \big(g_{(-N)2N(-2N+1)} \cdot g_{(-N)1N(-2N)}\big). \end{aligned}$$

Множители d_N выбраны так, что, во-первых,

$$\begin{aligned} & d_N(b_{-2N}^{-1}) = g_{N2N(2N+1)}(b_{-2N}^{-1}), \ldots \\ & \quad \ldots \\ & d_N(b_0) = g_{02N1}(b_0^{-1}), \ldots \\ & \quad \ldots \\ & d_N(b_{2N+1}^{-1}) = g_{N2N(2N+1)}(b_{2N+1}^{-1}); \end{aligned}$$

во-вторых, $d_N(y) = 1$, поскольку

$$y \notin \{b_{-2N}, b_{-2N+1}, \ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{2N+1}\}.$$

Это означает, что почти все координаты d_N (кроме конечного их количества) тривиальны и конечное множество нетривиальных координат N-схожи в $\bar{G} \operatorname{Wr} C$ с соответствующими координатами a. Определим

$$a_N = ad_N^{-1}.$$

Из нашего построения ясно, что $a_N \in H(G)$ и

$$\begin{aligned}
&a_N(1) = c, \\
&a_N(b_i^{-1}) = \hat{g}_{k1}, &&\text{если } i = 2k \text{ и } i \notin \{-2N, 2N+1\}, \\
&a_N(b_i^{-1}) = \hat{g}_{k2}, &&\text{если } i = 2k+1 \text{ и } i \notin \{-2N, 2N+1\}, \\
&a_N(b_i^{-1}) = \tilde{g}_{k1N}, &&\text{если } i = 2k \text{ и } i \in \{-2N, 2N+1\}, \\
&a_N(b_i^{-1}) = \tilde{g}_{k2N}, &&\text{если } i = 2k+1 \text{ и } i \in \{-2N, 2N+1\}, \\
&a_N(y) = 1, &&\text{если } y \text{ — любой другой элемент из } B,
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{g}_{ijN}(c^k) = \begin{cases} g_{ij}, & \text{если } \ k < N, \\ 1, & \text{если } \ k \geqslant N \end{cases}$$

(в частности, $\tilde{g}_{ijN} = \hat{g}_{ij}$ для $N = 0$). Для каждой пары i, j элемент $\tilde{g}_{ijN}$ N-схож с $\hat{g}_{ij}$. Элемент a_N N'-схож с элементом a и, очевидно, с элементом c. Подготовка элемента a_N завершена.

Допустим, что тождество $w \equiv 1$ нарушено на прямом сплетении W: существуют $x'_1, \ldots, x'_n \in W$, для которых $w(x'_1, \ldots, x'_n) \neq 1$. Каждый элемент из конечного множества элементов $x'_1, \ldots, x'_n$ может быть представлен как $x'_k = b^{i_k} b'^{j_k} \varphi_k$, где $\varphi_k \in (\bar{G} \operatorname{wr} C)^B$, $k = 1, \ldots, n$. Каждый элемент φ_k имеет всего конечное количество нетривиальных координат $\varphi_k\bigl(b^i b'^j\bigr)$. Поэтому существует достаточно большое натуральное число N_1, такое что если мы в каждом элементе φ_k произвольно заменим все значения $\varphi_k\bigl(b^i b'^j\bigr)$ для всех $|i| > N_1$ или $|j| > N_1$ любыми элементами декартова сплетения $\bar{G} \operatorname{Wr} C$ и обозначим полученные изменённые элементы через x'_k и x''_k, то соотношение $w(x''_1, \ldots, x''_n) \neq 1$ всё ещё будет иметь место (ясно, что элементы x''_k могут больше не принадлежать прямому сплетению W). Иными словами, если условие $w \equiv 1$ нарушается на некоторых элементах $x'_1, \ldots, x'_n \in W$, тогда существует такое N_1, что условие $w \equiv 1$ нарушается на элементах $x''_1, \ldots, x''_n$, которые N_1-схожи соответственно с $x'_1, \ldots, x'_n$ в декартовом сплетении $(\bar{G} \operatorname{wr} C) \operatorname{Wr} B$ двух групп $\bar{G} \operatorname{wr} C$ и B.

Для всех $b^i b'^j$ с $|i| \leqslant N_1$ и $|j| \leqslant N_1$ имеет место равенство $\varphi_k\bigl(b^i b'^j\bigr) = c^{t_{kij}} \psi_{kij}$, где ψ_{kij} — элемент из базовой подгруппы сплетения $\bar{G} \operatorname{wr} C$. Так как у нас всего конечное число элементов ψ_{kij} и так как каждый из них имеет всего конечное число нетривиальных координат $\psi_{kij}(c^l)$, ясно, что существует достаточно большое натуральное число N_2, такое что если мы для каждого элемента ψ_{kij} произвольно заменим все $\psi_{kij}(c^l)$ для всех $|l| > N_2$ любыми элементами $\bar{G}$ и обозначим изменённые элементы x''_k через x'''_k, то соотношение $w(x'''_1, \ldots, x'''_n) \neq 1$ всё ещё будет иметь место. Иными словами, если соотношение $w \equiv 1$ нарушается на некоторых элементах $x'_1, \ldots, x'_n \in W$, то существует такое N_2, что соотношение $w \equiv 1$ нарушается на элементах $x'''_1, \ldots, x'''_n$, которые N'_2-схожи соответственно с $x'_1, \ldots, x'_n$ в декартовом сплетении $(\bar{G} \operatorname{Wr} C) \operatorname{Wr} B$.

Следовательно, доказательство будет завершено, если мы покажем нечто более общее, чем заявлено выше: для любого элемента $x \in W$ и для произвольно большого натурального числа N группа $H(G)$ содержит элемент x', который N'-схож с x в декартовом сплетении $(\bar{G}\ \mathrm{Wr}\ C)\ \mathrm{Wr}\ B$.

Как мы видели (см. замечание перед леммой 1), для любого элемента $g_{ij} \in \bar{G}$ его образ $\ddot{g}_{ij}$ принадлежит $H(G)$. Поэтому первая копия группы $\bar{G}$ в сплетении $\bar{G}\ \mathrm{Wr}\ C$ лежит в $H(G)$. Далее по аналогии с (1) легко вычислить, что

$$(\ddot{g}_{ij})^{a_N^k}(y) = \begin{cases} \big(a_N^k(1)\big)^{-1}\dot{g}_{ij}a_N^k(1) = (\dot{g}_{ij})^{c^k}, & \text{если} \quad y = 1, \\ \big(a_N^k(y)\big)^{-1}\cdot 1\cdot a_N^k(y) = 1, & \text{если} \quad y \neq 1, \end{cases} \tag{3}$$

где опять элемент $(\dot{g}_{ij})^{c^k} \in P$ есть сдвинутая версия координатного элемента $\dot{g}_{ij}$ в смысле (2) (на данный момент значение N не важно). Пусть ψ — любой элемент из базовой подгруппы прямого сплетения $\bar{G}\ \mathrm{wr}\ C$, и пусть $\dot{\psi}$ — соответствующий координатный элемент в Q. Из (3) следует, что элемент $\dot{\psi}$ принадлежит $H(G)$ и может быть представлен как произведение конечного числа элементов вида $(\ddot{g}_{ij})^{a_N^k}$ для некоторого конечного числа значений i, j, k. Для любого элемента $c^s\psi \in \bar{G}\ \mathrm{wr}\ C$ рассмотрим элемент $a_N^s\dot{\psi} \in H(G)$. Очевидно,

$$(a_N^s\dot{\psi})(y) = \begin{cases} c^s\psi, & \text{если } y = 1, \\ \big(a_N(y)\big)^s, & \text{если } y = b_i^{-1},\ i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \\ 1, & \text{если } y \text{ — любой другой элемент из } B. \end{cases}$$

Следовательно, $a_N^s\dot{\psi}$ N'-схож с координатным элементом $(\dot{c^s\psi})$, соответствующим элементу $c^s\psi$ в $H(G)$. Допустим, что $x' = b^{i'}b'^{j'}\varphi \in W$, где элемент $\varphi \in (\bar{G}\ \mathrm{wr}\ C)^B$ имеет только конечное количество нетривиальных координат типа $\varphi\big(b^ib'^j\big) = c^{s'}\psi'$. Возьмём в качестве N_3 такое большое натуральное число, что для каждого из этих нетривиальных координат имеют место соотношения $|i| < \frac{N_3}{2}$ и $|j| < \frac{N_3}{2}$. Тогда, принимая во внимание сдвигающий эффект элементов b и b', легко получить, что элемент

$$(a_{N_3}^{s'}\dot{\psi}')^{b^ib'^j} \tag{4}$$

$\big(\frac{N_3}{2}\big)'$-схож с произведением $c^{s'}$ и координатой $\varphi(b^ib'^j)$ элемента φ. Это означает, что x' $\big(\frac{N_3}{2}\big)'$-схож с произведением конечного числа элементов типа (4) и степеней b и b'. Следовательно, для завершения доказательства достаточно взять в качестве N число $N_3 = \max\{N_1, N_2, 2N\}$. □

2.3. Конструкция нехопфовой группы $K(G)$

Обозначим через R подгруппу $\bar{G}$, порождённую копиями G_i, где $i = \ldots, -2, -1, 0$, и обозначим через $S = R^{H(G)}$ нормальное замыкание R в $H(G)$. Положим $K(G) = H(G)/S$.

Лемма 3. *В обозначениях выше $K(G)$ есть 3-порождённая нехопфова группа.*

Доказательство. Сначала рассмотрим автоморфизм β, заданный на группе B правилами $\beta(b) = b$ и $\beta(b') = bb'$. Мы продолжаем β до автоморфизма β^* на группе Q следующим образом: β^* действует на B как β и для каждого $\varphi \in P^B$ положим $\big(\beta^*(\varphi)\big)(y) = \varphi\big(\beta^{-1}(y)\big)$ для всех $y \in B$. Теперь рассмотрим автоморфизм γ, заданный на группе $\bar{G}$ правилами $\gamma(g_{i1}) = g_{i+1\ 1}$ и $\gamma(g_{i2}) = g_{i+1\ 2}$. Мы продолжаем γ до автоморфизма γ^* на группе Q следующим образом: γ^* действует тривиально на C и на B и для каждого $\psi \in \bar{G}^C$ положим $\big(\gamma^*(\psi)\big)(c^k) = \big(\gamma(\psi)\big)(c^k)$ для всех $c^k \in C$ (действие γ^* на P^B может быть получено из этого). Проверка, что β^* и γ^* — автоморфизмы, проста, и мы опускаем её.

Обозначим $\alpha = (\beta^*)^2 \cdot \gamma^*$. Легко проверить, что

$$(\alpha a)(1) = \gamma^*\Big(\big((\beta^*)^2 a\big)(1)\Big) = \gamma^*\Big(a\big(\beta^{-2}(1)\big)\Big) = \gamma^*(c) = c. \tag{5}$$

Далее,

$$(\alpha a)(b_i^{-1}) = \gamma^*\Big(\big((\beta^*)^2 a\big)(b_i^{-1})\Big) = \gamma^*\Big(a\big(\beta^{-2}(b_i^{-1})\big)\Big) = \gamma^*\big(a(b_{i-2}^{-1})\big) = a(b_i^{-1}), \tag{6}$$

где последнее равно $\hat{g}_{k1}$, если $i = 2k$, и равно $\hat{g}_{k2}$, если $i = 2k+1$. Наконец,

$$(\alpha a)(y) = \gamma^*\Big(\big((\beta^*)^2 a\big)(y)\Big) = 1, \tag{7}$$

где y — любой другой элемент в B. Соотношения (5)—(7) показывают, что $\alpha(a) = a$, т. е. элемент a инвариантен относительно α. Так как $\alpha(b) = b$ и $\alpha(b^{-1}b') = b'$, мы получаем, что α — автоморфизм над группой $H(G)$.

Рассмотрим образы $\alpha(R)$ и $\alpha(S)$ наших подгрупп R и S при действии α. Очевидно, $\alpha(S)$ есть нормальное замыкание в $H(G)$ подгруппы, порождённой копиями G_i, где $i = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2$. Таким образом, нормальные подгруппы $\alpha(S)$ и S различны, так как вторая из них не содержит, например, элемента $\ddot{g}_{21}$ (ведь сопряжения элементов из R элементами $\bar{G}$ из C или из B не позволяют нам достигнуть элемента $\ddot{g}_{21}$). Так как S — собственная подгруппа $\alpha(S)$, фактор-группы $H(G)/S$ и $H(G)/\alpha(S)$ различны: вторая есть собственная фактор-группа первой:

$$(H(G)/S)/(\alpha(S)/S) \cong H(G)/\alpha(S).$$

Собирая полученные факты, имеем

$$\alpha\big(K(G)\big) = \alpha(H(G)/S) = \alpha\big(H(G)\big)/\alpha(S) \cong H(G)/\alpha(S) \neq H(G)/S = K(G).$$

Значит, $K(G)$ изоморфна своей собственной фактор-группе $H(G)/\alpha(S)$. $\square$

К лемме 2 и следствию 1 мы добавляем следующие результаты.

Лемма 4. *Для любой 2-порождённой группы G 3-порождённые группы $H(G)$ и $K(G)$, полученные выше, порождают одно и то же многообразие* (*именно многообразие* $\mathrm{var}(G)\,\mathfrak{A}^2$).

Следствие 2. *В обозначениях, использованных выше, если* $\mathrm{var}(G_1) \neq \mathrm{var}(G_2)$, *то и* $\mathrm{var}\big(K(G_1)\big) \neq \mathrm{var}\big(K(G_2)\big)$.

Доказательство леммы 4. Допустим, что тождество $w = w(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$ нарушается на элементах $x'_1, \dots, x'_n \in W$. Каждый из этих элементов может быть представлен как $x'_k = b^{i'_k} b'^{j'_k} \varphi_k$, где $\varphi_k \in (\bar{G} \text{ wr } C)^B$, $k = 1, \dots, n$. Каждый элемент φ_k имеет только конечное количество нетривиальных координат $\varphi_k\bigl(b^i b'^j\bigr)$, и каждая из этих координат имеет вид $c^{k_{ij}} \psi_{k_{ij}} \in \bar{G} \text{ wr } C$.

Сначала рассмотрим случай, когда элементы $\psi_{k_{ij}}$ тривиальны для всех k, i, j. Тогда элементы $x'_1, \dots, x'_n$ на самом деле лежат в группе $C^B \text{ wr } B$. Последняя порождает многообразие $\mathrm{var}(C^B)\,\mathrm{var}(B) = \mathfrak{A}^2$. Но группа $K(G)$ уже содержит подгруппу, порождающую $\mathfrak{A}^2$. Следовательно, соотношение $w \equiv 1$ в этом случае также нарушается на некоторых элементах из $K(G)$.

Допустим, что существует нетривиальный элемент $\psi_{k_{ij}}$. Так как число таких элементов $\psi_{k_{ij}}$ конечно и так как каждый из них имеет всего конечное число нетривиальных координат в $\bar{G}$, существует достаточно большое натуральное число m, такое что для элементов

$$x''_1 = (\gamma^*)^m (x'_1), \dots,\ x''_n = (\gamma^*)^m ({x'}_n)$$

имеет место соотношение $w(x''_1, \dots, x''_n) \notin S = R^{H(G)}$, так как, действуя на x'_k, степени автоморфизма γ^*, определённого в доказательстве предыдущей леммы, сдвигают координаты в каждом $\psi_{k_{ij}}$ «вправо». Таким образом, $w(x''_1, \dots, x''_n)$ не равно 1 в фактор-группе $K(G)$. □

Лемма 5. *2-порождённая группа G изоморфно вложима в 3-порождённые группы $H(G)$ и $K(G)$. Более того, эти вложения могут быть субнормальными.*

Доказательство. Самое естественное вложение $\bar{G}$ в $H(G)$ порождено двумя инъекциями $g_{ij} \mapsto \dot{g}_{ij}$ и $\dot{g}_{ij} \mapsto \ddot{g}_{ij}$, $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$, $j = 1, 2$, рассмотренными выше. Так как группа G имеет бесконечное количество копий в $\bar{G}$, это приводит нас к изоморфному вложению G в $H(G)$, заданному правилом

$$g_1 \mapsto \ddot{g}_{i_0 1}, \quad g_2 \mapsto \ddot{g}_{i_0 2},$$

где i_0 — любое фиксированное целое число. Для перехода к последнему шагу конструкции, т. е. к натуральному гомоморфизму $H(G) \to K(G) = H(G)/S$, остается заметить, что $\ddot{g}_{i_0 1}, \ddot{g}_{i_0 2} \in S$ тогда и только тогда, когда $i_0 \leqslant 0$. Таким образом, искомое изоморфное вложение может быть задано следующим образом:

$$\Phi\colon g_1 \mapsto \ddot{g}_{i_0 1} S \in K(G), \quad \Phi\colon g_2 \mapsto \ddot{g}_{i_0 2} S \in K(G) \ \text{ для любого } \ i_0 > 0.$$

Это вложение субнормально, так как G нормальна в $\bar{G}$, $\bar{G}$ субнормальна в P и P субнормальна в Q. □

Результат этого раздела собран в следующей лемме.

Лемма 6. *Для каждой 2-порождённой группы G существуют 3-порождённая группа $K(G)$ и изоморфное вложение $\Phi\colon G \to K(G)$ со следующими свойствами:*

1) *$K(G)$ нехопфова группа;*
2) *если $\mathrm{var}(G_1) \neq \mathrm{var}(G_2)$, то также $\mathrm{var}\bigl(K(G_1)\bigr) \neq \mathrm{var}\bigl(K(G_2)\bigr)$;*
3) *вложение Φ субнормально: $\Phi(G) \lhd\lhd K(G)$.*

3. Континуум 2-порождённых групп, порождающих попарно различные многообразия групп. Вложения в 2-порождённые группы

3.1. Две вспомогательные конструкции к предыдущему доказательству

Нам потребуются две конструкции в дополнение к доказательству выше. Первая конструкция позволяет строить континуальное множество $\Omega = \{N_i \mid i \in I\}$ таких счётных групп, что для каждой пары различных элементов $i, j \in I$ многообразия, порождённые группами N_i и N_j, различны (и отличны от многообразия всех групп). Вторая конструкция для любого нетривиального множества слов $V \leqslant F_\infty$ позволяет вложить каждую счётную группу N (не порождающую многообразие всех групп) в 2-порождённую группу $G = G(N, V)$, такую что изоморфный образ N в G лежит в вербальной подгруппе $V(G)$, и если две группы N_1 и N_2 порождают различные многообразия групп, то многообразия, порождённые группами $G_1 = G(N_1, V)$ и $G_2 = G(N_2, V)$, тоже различны.

В частности, беря группы N_i из множества Ω, вкладывая каждую из них в 2-порождённую группу $G(N_i, V)$, $i \in I$, и используя конструкцию предыдущего раздела для вложения каждой $G(N_i, V)$ в соответствующую 3-порождённую группу $H_i = H\big(G(N_i, V)\big)$, мы после факторизации получим континуальное множество $\{K_i \mid i \in I\}$ нехопфовых групп, которые не только попарно неизоморфны, но и порождают попарно различные многообразия. Описание этих двух конструкций будет дано в двух подразделах ниже.

3.2. Счётное множество групп со специальным свойством

Как обычно, обозначим через $\mathfrak{G}_l$ многообразие разрешимых групп длины не более l и через $\mathfrak{B}_e$ бернсайдово многообразие групп экспонент, делящих e. Нам нужно исходное счётное множество некоторых конечных групп

$$\Theta = \{S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$$

со следующими свойствами:

1) $\Theta \subseteq \mathfrak{G}_5 \cap \mathfrak{B}_{24p}$, где $p > 3$ — простое число;
2) $S_i \notin \mathrm{var}(\Theta \setminus \{S_i\})$ для любых $i = 1, 2, \ldots$.

Такое множество построено А. Ю. Ольшанским в статье [3], где это множество играет ключевую роль в решении проблемы конечного базиса тождеств и в конструкции континуум-множества многообразий групп. Так как группы S_i будут использованы во всех конструкциях нашей статьи, дадим их краткое определение, отсылая читателя к [3] за деталями доказательств.

Группы S_i могут быть определены как $S_i = C_p \mathrm{\ wr\ } D_i$, $i = 1, 2, \ldots$, где C_p — циклическая группа порядка p для простого числа p и группы D_i определены следующим образом. Пусть $\mathfrak{A}_2$ — многообразие абелевых групп экспонент, делящих 2. Пусть $L_i = F_{i+1}\Big(\mathrm{var}\big(F_i(\mathfrak{A}_2^2)\big)\Big)$. Определим группу A_i с $2|L_i|$ порождающими a_g, b_h, $g,h \in L_i$, и соотношениями

$$\begin{array}{ll}
a_g^2 = b_d^2 = 1, & g,h \in L_i; \\
[a_{g_1}, a_{g_2}] = [a_{g_3}, a_{g_4}] = c_i, & g_1 \neq g_2,\ g_3 \neq g_4; \\
[b_{h_1}, b_{h_2}] = [b_{h_3}, b_{h_4}] = d_i, & h_1 \neq h_2,\ h_3 \neq h_4; \\
[a_{g_1}, b_{h_1}] = [a_{g_2}, b_{h_2}] = c_i d_i, & g_1 \neq h_1,\ g_2 \neq h_2; \\
[a_g, b_g] = 1, & g \in L_i; \\
[a_g, c_i] = [b_g, c_i] = [a_g, d_i] = [b_g, d_i] = 1, & g \in L_i.
\end{array}$$

Возьмём циклическую группу $C_3 = \langle c \rangle$ порядка 3 и определим D_i как расщепляемое расширение A_i с помощью прямого произведения $L_i \times C_3$, определённого правилами

$$a_h^g = a_{hg}, \quad b_h^g = b_{hg} \quad (g,h \in L_i), \quad x^c = x\delta_i \quad (x \in A_i),$$

где δ_i — автоморфизм порядка 3 на группе A_i, определённый своим действием на порождающих элементах: $a_g\delta_i = b_g$, $b_g\delta_i = a_g b_g$.

Из условий 1) и 2) вытекает следующая лемма.

Лемма 7 [3]. *Для любых различных подмножеств Θ_1 и Θ_2 в Θ многообразия $\mathrm{var}(\Theta_1)$ и $\mathrm{var}(\Theta_2)$ различны. Все такие многообразия являются подмногообразиями в $\mathfrak{G}_5 \cap \mathfrak{B}_{32p}$.*

В частности, в качестве множества Ω, упомянутого в предыдущем разделе, мы можем взять множество

$$\Omega = \Big\{ N_i = \prod_{S_u \in i} S_u \mid i \in 2^\Theta \Big\},$$

состоящее из прямых произведений $S_u \in i$ для подмножеств i в Θ (т. е. $I = 2^\Theta$).

3.3. Вербальное вложение любой группы в 2-порождённую группу

Вторая конструкция тоже будет дана только схематически, без доказательств, так как она была описана в [18] (см. также [17], где похожие построения использованы в других целях). В [18] с помощью этой конструкции доказывалось, что всякая SD-группа вложима в 2-порождённую SD-группу с некоторыми дополнительными свойствами.

Пусть N — произвольная группа, не порождающая многообразия всех групп, и V — любое нетривиальное множество слов. Рассмотрим декартово сплетение $N \mathrm{\ Wr\ } T$, где группа T строится следующим образом. Пусть $\mathfrak{V} = \mathrm{var}\big(F_\infty / V(F_\infty)\big)$ — многообразие, соответствующее множеству слов V. Рассмотрим $L = F_r(\mathfrak{N}_c)$ — относительно свободную нильпотентную группу ранга r

и класса $c \leqslant r$, такую что $L \notin \mathfrak{V}$. В декартовом сплетении $L \operatorname{Wr} \langle z \rangle$ группы L и бесконечной циклической группы $\langle z \rangle$ возьмём элементы $\hat{l} \in L^{\langle z \rangle}$, $l \in L$, определённые как

$$\hat{l}(z^i) = \begin{cases} l, & \text{если } \; i \geqslant 0, \\ 1, & \text{если } \; i < 0, \end{cases}$$

и возьмём $T = \langle \hat{l}, z \mid l \in L \rangle$. Пусть $V(T) \geqslant V(L) \neq 1$. Мы можем выделить нетривиальный элемент $a \in V(L)$ и определить следующие элементы $\breve{n}$, $n \in N$, в базовой подгруппе в $N \operatorname{Wr} T$:

$$\breve{n}(t) = \begin{cases} n, & \text{если } t = a^i \text{ для некоторого числа } i > 0, \\ 1, & \text{если } t = a^i \text{ для некоторого числа } i \leqslant 0, \\ 1 & \text{для всех других элементов } t \in T. \end{cases}$$

Пусть $R = R(N, V) = \langle \breve{n}, T \mid n \in N \rangle$.

Лемма 8 [18, леммы 3—5]. *Пусть $R(N, V)$ — группа, построенная выше для исходной группы N, не порождающей многообразия всех групп, и для нетривиального множества слов V. Тогда существует изоморфное вложение $\Psi\colon N \to R(N, V)$ со следующими свойствами*:

1) *если N порождает многообразие $\mathfrak{U}$, то $R(N, V)$ порождает многообразие $\mathfrak{U}\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$;*
2) *в частности, если $\operatorname{var}(N_1) \neq \operatorname{var}(N_2)$ для некоторых групп N_1 и N_2, то и $\operatorname{var}\bigl(R(N_1, V)\bigr) \neq \operatorname{var}\bigl(R(N_2, V)\bigr)$;*
3) *вложение Ψ субнормально*: $\Psi(N) \lhd\lhd R(N, V)$;
4) *вложение Ψ V_1-вербально*: $\Psi(N) \subseteq V_1\bigl(R(N, V)\bigr)$, *где V_1 — множество слов, соответствующих произведению многообразий $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}\mathfrak{A}$.*

Так как $R = R(N, V)$, очевидно, счётная группа (она порождена счётным множеством элементов в несчётной группе $N \operatorname{Wr} T$), мы можем линейно упорядочить её:

$$R = \{r_0, r_1, r_2, \ldots\}.$$

Тогда в декартовом сплетении $R \operatorname{Wr} \langle c \rangle$ группы R и бесконечной циклической группы $\langle c \rangle$ можно рассмотреть элемент ω, определённый следующим образом:

$$\omega(c^i) = \begin{cases} i, & \text{если } i = 2^k \text{ для некоторых } k = 0, 1, 2, \ldots, \\ 1 & \text{для всех других целых чисел } i \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Обозначим: $G(R) = \langle \omega, c \rangle$.

Лемма 9 [18, леммы 1, 6]. *Пусть $G(R)$ — построенная выше группа для исходной группы R, не порождающей многообразия всех групп. Тогда существует изоморфное вложение $\Delta\colon R \to G(R)$ со следующими свойствами*:

1) *если R порождает многообразие $\mathfrak{W}$, то $G(R)$ порождает многообразие $\mathfrak{W}\mathfrak{A}$;*
2) *в частности, если $\operatorname{var}(R_1) \neq \operatorname{var}(R_2)$ для некоторых групп R_1 и R_2, то и $\operatorname{var}\bigl(G(R_1)\bigr) \neq \operatorname{var}\bigl(G(R_2)\bigr)$;*

3) *вложение* Δ *субнормально*: $\Delta(R) \lhd\lhd G(R)$.

Чтобы получить группу $G(N,V)$, упомянутую в подразделе 3.1, надо всего лишь взять $G = G(N,V) = G\big(R(N,V)\big)$.

Замечание 1. В представленных шагах вспомогательная группа $L = F_r(\mathfrak{N}_c)$ была использована, чтобы получить, что вложение Ψ V_1-вербально для $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}\mathfrak{A}$. Однако в следующем разделе нам понадобится ослабленная версия леммы 8, в которой V_1-вербальность будет заменена более слабым условием: вложение будет не в любую вербальную подгруппу, а лишь в коммутант группы R. Преимущество этой конструкции в том, что R окажется более маленькой группой. В частности, если мы в конструкции выше возьмём $T = \langle z \rangle$ и выберем в декартовом сплетении $N \operatorname{Wr} T$ элементы $\hat{n}$, определённые для всех $n \in N$ как

$$\hat{n}(z^i) = \begin{cases} n, & \text{если } \; i \geqslant 0, \\ 1, & \text{если } \; i < 0, \end{cases}$$

то для группы $R = R(N) = \langle \hat{n}, z \mid n \in N \rangle$ аналог леммы 8 будет иметь место со следующими двумя различиями в пунктах 1) и 4):

1′) если N порождает многообразие $\mathfrak{U}$, то $R(N)$ порождает многообразие $\mathfrak{U}\mathfrak{A}$;

4′) N вложима в коммутант $R(N)$.

4. Заключительные доказательства

Теперь мы можем привести доказательства всех результатов.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим множество $\Omega = \{N_i \mid i \in 2^{\Theta}\}$, определённое в подразделе 3.2. Все группы этого множества принадлежат $\mathfrak{G}_5 \cap \mathfrak{B}_{8pq}$. Группы $R(N_i,V)$, построенные для этих N_i и для заданного нетривиального множества слов V, принадлежат многообразию $(\mathfrak{G}_5 \cap \mathfrak{B}_{32p})\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$, так как все они подгруппы в сплетениях $N_i \operatorname{Wr} \big(L \operatorname{Wr} \langle z \rangle\big)$, $i \in 2^{\Theta}$. Таким образом, группы $G_i = G(N_i,V)$ принадлежат многообразию $(\mathfrak{G}_5 \cap \mathfrak{B}_{32p})\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}^2$, так как они являются подгруппами в соответствующих сплетениях:

$$W_i = \big(N_i \operatorname{Wr} (L \operatorname{Wr} \langle z \rangle)\big) \operatorname{Wr} \langle c \rangle, \quad i \in 2^{\Theta}.$$

Как отмечено в подразделе 3.1, теперь мы можем применить конструкцию раздела 2, чтобы вложить 2-порождённые группы G_i в 3-порождённые нехопфовы группы $K_i = K(G_i)$, $i \in 2^{\Theta}$. Согласно леммам 2 и 4 все группы K_i принадлежат многообразию

$$\big((\mathfrak{G}_5 \cap \mathfrak{B}_{32p})\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}^2\big)\mathfrak{A}^2 = (\mathfrak{G}_5 \cap \mathfrak{B}_{32p})\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}^4,$$

и поэтому их длина разрешимости не более $5 + c + 2 + 2 = 9 + c$. Эта граница выше, чем было обещано в теореме 1. Вспомним, что согласно замечанию 1, если мы опустим требование о вербальности вложений, мы можем в произведении выше заменить множитель $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}$ и тем самым опустить слагаемое c в сумме выше.

Для каждого $i \in 2^\Theta$ группа K_i порождает многообразие

$$\mathrm{var}(S_u \mid S_u \in i) \cdot \mathfrak{N}_c\mathfrak{A}^4.$$

По леммам 7—9 и следствиям 1, 2 все группы K_i, $i \in 2^\Theta$, порождают попарно различные многообразия групп. □

Доказательство теорем 2 и 3. Для любой счётной группы N и любого нетривиального множества слов V требуемое изоморфное вложение

$$N \to K(N,V)$$

может быть задано как суперпозиция вложений

$$N \xrightarrow{\Psi} R(N,V) \xrightarrow{\Delta} G\big(R(N,V)\big) \xrightarrow{\Phi} K\Big(G\big(R(N,V)\big)\Big) = K(N,V),$$

где Ψ и Δ — вложения из лемм 8 и 9 соответственно и Φ — вложение, построенное в разделе 2, т. е. суперпозиция гомоморфизма 2-порождённой группы $\langle g_1, g_2\rangle = G\big(R(N,V)\big)$ в 3-порождённую группу $H(N,V) = H\Big(G\big(R(N,V)\big)\Big)$, определённого как

$$g_1 \mapsto \ddot{g}_{i_0 1}, \quad g_2 \mapsto \ddot{g}_{i_0 2} \ \text{ для любого } \ i_0 > 0,$$

и натурального гомоморфизма $H(N,V) \to K(N,V)$ (см. раздел 2).

V-вербальность вложения $\Psi \cdot \Delta \cdot \Phi$ следует из V-вербальности вложения Ψ (см. лемму 8). Если группа N разрешима длины l то по аналогии с предыдущим доказательством длина разрешимости $K(N,V)$ ограничена числом $l+2+c+2 = l+c+4$. Это доказывает теорему 3.

Принимая во внимание замечание 1, если мы опустим требование о вербальности вложения, мы можем опустить слагаемое c в сумме выше и получить границу, упомянутую в теореме 2.

Субнормальность этих вложений следует из субнормальности всех вложений, которые мы построили выше. □

Доказательство теоремы 4. Вернёмся к подразделу 3.2 и рассмотрим подмножество $\bar{\Omega}$ множества Ω, состоящее из тех прямых произведений $N_j = \prod\limits_{S_u \in j} S_u$, $j \in 2^\Theta$, для которых j есть бесконечное подмножество в Θ. Таким образом, $\bar{\Omega}$ будет содержать континуум групп N_j, порождающих попарно различные многообразия групп. По аналогии с доказательством теоремы 1 применим вложения разделов 2 и 3 к группе $\bar{\Omega}$ и получим континуум 3-порождённых нехопфовых групп $K_j = K_j(N_j, V)$, $N_j \in \bar{\Omega}$ (здесь множество слов V не играет важной роли, и мы можем взять любое нетривиальное множество слов). Эти многообразия не являются метанильпотентными, так как каждое из них содержит многообразие $\mathfrak{A}^3$ в качестве подмногообразия.

Так как чисел j счётное бесконечное множество, существует несчётное количество подмножеств j' множества j. Для каждого такого j' группа $K_{j'}$ есть конечно порождённая группа в $\mathrm{var}(K_j)$. Поэтому многообразия $\mathrm{var}(K_j)$ удовлетворяют теореме 4. □

Литература

[1] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.

[2] Мальцев А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. — 1940. — Т. 8, № 3. — С. 405—422.

[3] Ольшанский А. Ю. О проблеме конечного базиса тождеств в группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1970. — Т. 34, № 2. — С. 376—384.

[4] Dark R. On subnormal embedding theorems of groups // J. London Math. Soc. — 1968. — Vol. 43. — P. 387—390.

[5] Groves J. R. J. On some finiteness conditions for varieties of metanilpotent groups // Arch. Math. — 1973. — Vol. 24. — P. 252—268.

[6] Hall P. Finiteness conditions for soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3). — 1954. — Vol. 4. — P. 419—436.

[7] Hall P. The Frattini subgroups of finitely generated groups // Proc. London Math. Soc. (3). — 1961. — Vol. 11. — P. 327—352.

[8] Heineken H. Normal embeddings of p-groups into p-groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1992. — Vol. 35. — P. 309—314.

[9] Heineken H. On normal embedding of subgroups // Geom. Dedicata. — 2000. — Vol. 83. — P. 211—216.

[10] Heineken H., Mikaelian V. H. On normal verbal embeddings of groups // J. Math. Sci. — 2000. — Vol. 100, no. 1. — P. 1915—1924.

[11] Higman G. A finitely related group with an isomorphic proper factor group // J. London Math. Soc. — 1951. — Vol. 26. — P. 59—61.

[12] Hopf H. Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen // J. Reine Angew. Math. — 1931. — Vol. 165. — P. 225—236.

[13] Miller C. F., Schupp P. E. On embeddings into Hopfian groups // J. Algebra. — 1971. — Vol. 17. — P. 171—176.

[14] Mikaelian V. H. Subnormal embedding theorems for groups // J. London Math. Soc. — 2000. — Vol. 62. — P. 398—406.

[15] Mikaelian V. H. On embeddings of countable generalized soluble groups in two-generated groups // J. Algebra. — 2002. — Vol. 250. — P. 1—17.

[16] Mikaelian V. H. An embedding construction for ordered groups // J. Aust. Math. Soc. (A). — 2003. — Vol. 74. — P. 379—392.

[17] Mikaelian V. H. Infinitely many not locally soluble SI^*-groups // Ricerche Mat. — 2003. — Vol. 52. — P. 1—19.

[18] Mikaelian V. H. On embedding properties of SD-groups // Internat. J. Math. Math. Sci. — 2004. — No. 2. — P. 65—76.

[19] Neumann B. H. A two-generator group isomorphic to a proper factor group // J. London Math. Soc. — 1950. — Vol. 25. — P. 247—248.

[20] Neumann B. H. On a problem of Hopf // J. London Math. Soc. — 1953. — Vol. 28. — P. 351—353.

[21] Neumann B. H. An essay on free products of groups with amalgamations // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. — 1954. — Vol. 246. — P. 503—554.

[22] Neumann B. H. Embedding theorems for ordered groups // J. London Math. Soc. — 1960. — Vol. 35. — P. 503—512.

[23] Neumann B. H. Embedding theorems for groups // Nieuw Arch. Wisk. (3). — 1968. — Vol. 16. — P. 73—78.

[24] Neumann B. H., Neumann H. Embedding theorems for groups // J. London Math. Soc. — 1959. — Vol. 34. — P. 465—479.

[25] Neumann H. Varieties of Groups. — Berlin: Springer, 1967.

[26] Robinson D. J. S. A Course in the Theory of Groups. — Berlin: Springer, 1996.

[27] Schupp P. E. A note on non-Hopfian groups // J. London Math. Soc. (2). — 1977. — Vol. 16. — P. 235—236.