

Об инвариантах модулярных свободных алгебр Ли*

В. М. ПЕТРОГРАДСКИЙ

Ульяновский государственный университет
e-mail: petrogradsky@rambler.ru

А. А. СМЕРНОВ

Ульяновский государственный университет
e-mail: dronsmr@yandex.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: свободные алгебры Ли, модулярные алгебры Ли, инварианты.

Аннотация

Предположим, что $L(X)$ — это свободная алгебра Ли конечного ранга над полем положительной характеристики. Пусть G — нетривиальная конечная группа однородных автоморфизмов $L(X)$. Известно, что подалгебра инвариантов $H = L^G$ является бесконечно порождённой. Наша цель — определить, насколько велико её свободное порождающее множество. Пусть $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ — однородное свободное порождающее множество для H , где элементы Y_n имеют степень n относительно X . Мы описываем рост производящей функции для Y и доказываем, что последовательность $|Y_n|$ растёт экспоненциально.

Abstract

V. M. Petrogradsky, A. A. Smirnov, On invariants of modular free Lie algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 1, pp. 117–124.

Suppose that $L(X)$ is a free Lie algebra of finite rank over a field of positive characteristic. Let G be a nontrivial finite group of homogeneous automorphisms of $L(X)$. It is known that the subalgebra of invariants $H = L^G$ is infinitely generated. Our goal is to describe how big its free generating set is. Let $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ be a homogeneous free generating set of H , where elements of Y_n are of degree n with respect to X . We describe the growth of the generating function of Y and prove that $|Y_n|$ grow exponentially.

1. Введение

Пусть K — поле характеристики $p \geq 0$ и $L = L(X)$ — свободная алгебра Ли над K со свободным порождающим множеством $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. Рассмотрим естественную градуировку алгебры L относительно этого множества:

$$L = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_n.$$

* Авторы частично поддержаны грантом РФФИ 07-01-00080.

Рассмотрим векторное пространство $V = \langle x_1, \dots, x_k \rangle_K \subset L$. Пусть G — конечная подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$. Мы всегда будем предполагать, что $|G| > 1$. Очевидно, L — модуль над G . Мы рассмотрим подалгебру инвариантов

$$L^G = \{v \in L \mid g * v = v, g \in G\}.$$

Подалгебра инвариантов L^G является бесконечно порождённой при условии, что $|G| > 1$ [6]. Аналогичный факт был доказан для не обязательно однородной конечной группы автоморфизмов $G \subset \mathrm{Aut}(L(X))$ в случае поля характеристики ноль [9]. Наконец, случай произвольного поля и произвольной конечной группы автоморфизмов был изучен в [8]. Подобный результат также установлен для инвариантов свободной цветной супералгебры Ли и однородной конечной группы автоморфизмов [3].

2. Основной результат

Вернёмся к случаю $G \subset \mathrm{GL}(V)$. Тогда G — группа однородных автоморфизмов для $L(X)$. Пусть H — подгруппа в G , состоящая из всех элементов группы G , действующих на V скалярно. Так как H вкладывается в мультипликативную группу поля K^* , эта подгруппа является циклической и её порядок $|H| = m$ не делится на p . Пусть ξ — примитивный m -й корень из единицы. Тогда $H \cong \{1, \xi, \dots, \xi^{m-1}\} \subset K^*$. Очевидно, что подалгебра инвариантов L^G однородна. Более того, она лежит в следующих компонентах [6]:

$$L^G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_{im}^G.$$

По теореме Ширшова—Витта любая подалгебра свободной алгебры Ли свободна. Кроме того, однородная подалгебра имеет однородное свободное порождающее множество (см. [1, 12]). Мы предполагаем, что L^G свободно порождается однородным множеством

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n,$$

где $Y_n \subset L_n$. Рассмотрим соответствующую производящую функцию

$$\mathcal{H}(Y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n = \sum_{i=1}^{\infty} |Y_{im}| t^{im}.$$

Точная формула для $\mathcal{H}(Y, t)$ была найдена в случае характеристики ноль [4]. Эта формула была обобщена для свободных супералгебр Ли [5, 11]. Множество свободных порождающих Y не просто бесконечно, полученная формула даёт экспоненциальную асимптотику для $|Y_{im}|$, когда $i \rightarrow \infty$.

Сейчас наша цель — изучить действие однородной конечной группы автоморфизмов $G \subset \mathrm{GL}(V)$ над полем положительной характеристики и усилить результаты [6]. Мы исследуем производящую функцию $\mathcal{H}(Y, t)$ и доказываем,

что числа $|Y_{im}|$ в этом случае также растут экспоненциально. Мы не получаем точной формулы для $\mathcal{H}(L^G, t)$, подобной [5], наш результат состоит в следующем.

Теорема 1. *Рассмотрим конечную подгруппу $G \subset \mathrm{GL}(V)$, $|G| > 1$, где $V = \langle x_1, \dots, x_k \rangle_K$ и поле K произвольно. Рассмотрим диагональное действие G на свободной алгебре Ли $L = L(x_1, \dots, x_k)$. Пусть*

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n,$$

где $Y_n \subset L_n$ — свободное однородное порождающее множество для подалгебры инвариантов L^G и

$$\mathcal{H}(Y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n -$$

её производящая функция. Тогда

- 1) $\mathcal{H}(Y, t)$ не зависит от выбора свободного однородного порождающего множества Y ;
- 2) последовательность $|Y_n|$ растёт экспоненциально:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|Y_n|} = k;$$

- 3) радиус сходимости для $\mathcal{H}(Y, t)$ равен $1/k$;
- 4) производящая функция имеет следующую асимптотику:

$$\mathcal{H}(Y, t) = 1 - (1 - kt)^{1/|G| + o(1)}, \quad t \rightarrow \frac{1}{k} - 0.$$

Здесь $t \rightarrow 1/k - 0$ означает, что вещественная переменная стремится слева к $1/k$.

Производящая функция для всей свободной алгебры Ли оказалась полезной [4, 7, 11]. Она равна

$$\mathcal{H}(L, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dim L_n t^n = - \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\mu(a)}{a} \ln(1 - kt^a), \quad (1)$$

где $\mu(a)$ — функция Мёбиуса.

Напомним разложение

$$-\ln(1 - t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n},$$

которое имеет место для всех комплексных чисел t , таких что $|t| < 1$. Пусть t — комплексное число и $|t| = r$. Оценим (1) следующим образом:

$$|\mathcal{H}(L, t)| \leq \sum_{a=1}^{\infty} -\ln(1 - kr^a).$$

Имеем $-\ln(1 - kr^a) \approx kr^a$, когда $a \rightarrow \infty$, для всех $r < 1/k$. Тогда сходимость ряда выше эквивалентна сходимости $\sum_{a=1}^{\infty} r^a$. Заключаем, что ряд (1) сходится абсолютно к аналитической функции в круге $|t| < 1/k$. Аналогично сумма всех слагаемых, кроме первого (1), сходится к аналитической функции в большем круге $|t| < 1/\sqrt{k}$.

Наши рассуждения опираются на следующей результат.

Теорема 2 [6, теорема 3.2]. В условиях предыдущей теоремы существует предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\dim L_{im}^G}{\dim L_{im}} = \frac{m}{|G|}.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим подалгебру Ли (подалгебру Веронезе)

$$L_{(m)} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_{mi} \subset L.$$

Вычислим её производящую функцию, используя следующее наблюдение.

Лемма 1. Пусть ξ — примитивный корень из единицы порядка m . Тогда

$$\sum_{j=0}^{m-1} \xi^{jn} = \begin{cases} m, & m \mid n, \\ 0, & m \nmid n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Действительно, для $m \mid n$ утверждение тривиально. Пусть $(m, n) = d$, $m = m_0 d$, $n = n_0 d$, где $m_0 > 1$. Пусть $j = m_0 a + b$, где $0 \leq a < d$, $0 \leq b < m_0$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{m-1} \xi^{jn} = \sum_{a=0}^{d-1} \sum_{b=0}^{m_0-1} \xi^{(m_0 a + b)dn_0} = d \sum_{b=0}^{m_0-1} \xi^{bdn_0} = d \frac{\xi^{dm_0 n_0} - 1}{\xi^{dn_0} - 1} = 0. \quad \square$$

Мы используем (1):

$$\mathcal{H}(L_{(m)}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \dim L_{mi} t^{mi} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{H}(L, \xi^j t) = -\frac{1}{m} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\mu(a)}{a} \ln \prod_{j=0}^{m-1} (1 - k(\xi^j t)^a).$$

Обозначим через $g(t)$ сумму слагаемых для $a > 1$. Она является аналитической в круге $|t| < \sqrt{1/k}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(L_{(m)}, t) &= -\frac{1}{m} \ln \prod_{j=0}^{m-1} (1 - k\xi^j t) + g(t) = -\frac{1}{m} \ln(1 - k^m t^m) + g(t) = \\ &= -\frac{1}{m} \ln(1 - kt) - \frac{1}{m} \ln(1 + kt + \dots + (kt)^{m-1}) + g(t) \approx \\ &\approx -\frac{1}{m} \ln(1 - kt), \quad t \rightarrow \frac{1}{k} - 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Доказательство теоремы 1. Согласно (2) мы имеем

$$\lim_{t \rightarrow 1/k-0} \mathcal{H}(L_{(m)}, t) = +\infty.$$

Тогда для любого целого числа N имеем также

$$\lim_{t \rightarrow 1/k-0} \sum_{i=N}^{\infty} \dim L_{mi} t^{mi} = +\infty.$$

По теореме 2 для любого числа $\varepsilon > 0$ существует N , такое что

$$\left(\frac{m}{|G|} - \varepsilon\right) \dim L_{mi} \leq \dim L_{mi}^G \leq \left(\frac{m}{|G|} + \varepsilon\right) \dim L_{mi}, \quad i \geq N. \quad (3)$$

Используя нижнюю оценку, получаем, что

$$\lim_{t \rightarrow 1/k-0} \sum_{i=N}^{\infty} \dim L_{mi}^G t^{mi} = +\infty.$$

Теперь, учитывая (3), легко убедиться, что

$$\lim_{t \rightarrow 1/k-0} \frac{\mathcal{H}(L^G, t)}{\mathcal{H}(L_{(m)}, t)} = \lim_{t \rightarrow 1/k-0} \frac{\sum_{i=N}^{\infty} \dim L_{mi}^G t^{mi}}{\sum_{i=N}^{\infty} \dim L_{mi} t^{mi}} = \frac{m}{|G|}.$$

Из этого соотношения и (2) выводим, что

$$\mathcal{H}(L^G, t) \approx -\frac{1}{|G|} \ln(1 - kt), \quad t \rightarrow \frac{1}{k} - 0. \quad (4)$$

Рассмотрим следующий оператор, действующий на формальных степенных рядах. Пусть

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n \in K[[t]]^\circ,$$

где через $K[[t]]^\circ$ обозначены ряды с нулевым свободным членом. Определим

$$\mathcal{E}(\varphi(t)) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - t^n)^{b_n}} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varphi(t^n)\right) \in 1 + K[[t]]^\circ.$$

Доказательство равенства можно найти, например, в [5, 10]. Пусть

$$L = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_n -$$

градуированная алгебра Ли. Тогда её универсальная обёртывающая алгебра $U(L)$ также имеет естественную градуировку и её производящая функция может быть вычислена следующим образом: $\mathcal{H}(U(L), t) = \mathcal{E}(\mathcal{H}(L, t))$ [5, 10].

Теперь мы рассмотрим производящую функцию для универсальной обёртывающей алгебры $R = U(L^G)$:

$$\mathcal{H}(R, t) = \mathcal{E}(\mathcal{H}(L^G, t)) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathcal{H}(L^G, t^n)\right). \quad (5)$$

Хорошо известно, что R изоморфна свободной ассоциативной алгебре $A(Y)$, порождённой множеством Y , и в этом случае

$$\mathcal{H}(R, t) = \mathcal{H}(A(Y), t) = \frac{1}{1 - \mathcal{H}(Y, t)}. \quad (6)$$

Из (6) и (5) мы получаем

$$\mathcal{H}(Y, t) = 1 - \frac{1}{\mathcal{H}(R, t)} = 1 - \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathcal{H}(L^G, t^n)\right), \quad (7)$$

откуда следует первое утверждение.

Так как $\dim L_i^G \leq \dim L_i$ для всех $i \geq 1$, мы видим, что первое слагаемое $\mathcal{H}(L^G, t)$ в сумме справа (7) определено для любого $|t| < 1/k$. Значит, другие члены $\mathcal{H}(L^G, t^n)$, $n \geq 2$, определены для всех $|t| < \sqrt{1/k}$ и не влияют на асимптотику первого члена, когда $t \rightarrow 1/k - 0$.

Действительно, согласно (4) первое слагаемое $\mathcal{H}(L^G, t)$ стремится к $+\infty$ при $t \rightarrow 1/k - 0$. Пусть $\mathcal{H}(L^G, t) = tg(t)$, тогда $g(t)$ является рядом с ненулевыми коэффициентами. Как отмечено выше, $C = g(1/k^2) = k^2 \mathcal{H}(L^G, 1/k^2)$ — конечное число. Пусть t — комплексное число и $|t| < 1/k$. Тогда $|g(t^n)| \leq g(|t|^n) \leq g(1/k^2) = C$ для всех $n \geq 2$. Оценим сумму остальных слагаемых (7):

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \mathcal{H}(L^G, t^n) \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |\mathcal{H}(L^G, t^n)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |t|^n |g(t^n)| \leq \frac{C}{k^2(1 - 1/k)} < \infty.$$

Используя (4), (7), получаем

$$\mathcal{H}(Y, t) = 1 - \exp\left(\frac{1 + o(1)}{|G|} \ln(1 - kt)\right) = 1 - (1 - kt)^{1/|G| + o(1)}, \quad t \rightarrow \frac{1}{k} - 0. \quad (8)$$

Последнее утверждение доказано.

Заметим, что

$$\mathcal{H}(Y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n,$$

где $|Y_n| \leq \dim L_n$. Обозначим через W окружность $|t| < 1/k$. Так как (1) сходится в W , мы делаем вывод, что $\mathcal{H}(Y, t)$ сходится по крайней мере в W . Предположим, что $t_0 = 1/k$ является *регулярной* точкой для $\mathcal{H}(Y, t)$, т. е. существует аналитическое продолжение $h(t)$ в окрестности $W_0 = \{t: |t - 1/k| < \varepsilon\}$, такое что $\mathcal{H}(Y, t) = h(t)|_{t \in W \cap W_0}$ [2]. Тогда мы имеем разложение в ряд Тейлора:

$$h(t) = c_0 + c_1 \left(t - \frac{1}{k}\right) + c_2 \left(t - \frac{1}{k}\right)^2 + \dots, \quad t \in W_0. \quad (9)$$

Сопоставляя (8) и (9) при $t \rightarrow 1/k - 0$, получаем $c_0 = 1$. Сравниваем следующие коэффициенты:

$$c_1 = \lim_{t \rightarrow 1/k} \frac{h(t) - 1}{t - 1/k} = \lim_{t \rightarrow 1/k-0} \frac{\mathcal{H}(Y, t) - 1}{t - 1/k} = \lim_{t \rightarrow 1/k-0} k(1 - kt)^{1/|G|-1+o(1)} = +\infty,$$

и, так как $|G| > 1$, получаем противоречие. Это противоречие доказывает, что точка $t_0 = 1/k$ не является регулярной для $\mathcal{H}(Y, t)$ и радиус сходимости для $\mathcal{H}(Y, t)$ в нуле равен $1/k$ (см. [2]). Утверждение 3) доказано. Утверждение 2) следует из формулы Коши—Адамара [2]. $\square$

Замечание. Предположим, что мы можем доказать более сильный вариант теоремы 2. А именно, предположим, что существует число c , такое что $0 < c < 1$ и для любого достаточно большого j справедливо неравенство

$$\left| \frac{\dim L_{mj}^G}{\dim L_{mj}} - \frac{m}{|G|} \right| < c^{mj}.$$

Тогда аналогичные рассуждения приводят к соотношению

$$\mathcal{H}(L^G, t) = -\frac{1}{|G|} \ln(1 - k^m t^m) + f(t), \quad |t| < \frac{1}{k} + \varepsilon,$$

где функция $f(t)$ аналитическая в области $|t| < 1/k + \varepsilon$. Те же вычисления дают

$$\mathcal{H}(Y, t) = 1 - {}^{|G|}\sqrt{1 - k^m t^m} \bar{f}(t), \quad |t| < \frac{1}{k} + \varepsilon,$$

где $\bar{f}(t)$ аналитична в области $|t| < 1/k + \varepsilon$. Тогда мы можем получить асимптотики, как в [4]:

$$|Y_{mn}| \approx C \frac{k^{mn}}{n^{1+1/|G|}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где C — некоторая константа.

Авторы благодарны Роджеру Брайанту за обсуждения.

Литература

- [1] Бахтурин Ю. А. Тожества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.
- [2] Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. — М.: Просвещение, 1977.
- [3] Михалёв А. А. О неподвижных точках свободной цветной супералгебры Ли относительно действия конечной группы линейных автоморфизмов // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 47, № 4. — С. 205—206.
- [4] Петроградский В. М. Об инвариантах действия конечной группы на свободной алгебре Ли // Сиб. мат. журн. — 2000. — Т. 41, № 4. — С. 915—925.
- [5] Петроградский В. М. Характеры и инварианты свободных супералгебр Ли // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, № 1. — С. 158—181.

- [6] Bryant R. M. On the fixed points of a finite group acting on a free Lie algebra // J. London Math. Soc. (2). — 1991. — Vol. 43, no. 2. — P. 215–224.
- [7] Bryant R. M. Free Lie algebras and formal power series // J. Algebra. — 2002. — Vol. 253, no. 1. — P. 167–188.
- [8] Bryant R. M., Papistas A. I. On the fixed points of a finite group acting on a relatively free Lie algebra // Glasgow Math. J. — 2000. — Vol. 42. — P. 167–181.
- [9] Drensky V. Fixed algebras of residually nilpotent Lie algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 120, no. 4. — P. 1021–1028.
- [10] Petrogradsky V. M. Growth of finitely generated polynilpotent Lie algebras and groups, generalized partitions, and functions analytic in the unit circle // Internat. J. Algebra Comput. — 1999. — Vol. 9, no. 2. — P. 179–212.
- [11] Petrogradsky V. M. On Witt's formula and invariants for free Lie superalgebras // Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Proc. of the 12th Int. Conf. FPSAC '00, Moscow, Russia, June 26–30, 2000 / D. Krob, ed. — Berlin: Springer, 2000. — P. 543–551.
- [12] Reutenauer C. Free Lie Algebras. — Oxford: Clarendon Press, 1993.