Многообразия, бирационально изоморфные аффинным G-многообразиям

А. В. ПЕТУХОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Университет Якобса, Бремен, Германия
e-mail: a.petukhov@jacobs-university.de

УДК 512.745.2+512.816.4

Ключевые слова: квазиаффинное многообразие, квазипараболическая подгруппа.

Аннотация

Пусть линейная алгебраическая группа G действует на алгебраическом многообразии X. Весьма интересен вопрос о классификации всех таких действий, в частности о бирациональной классификации. Известна полная классификация, связанная с когомологиями Галуа группы G. Важен также вопрос о сводимости в том или ином смысле рассматриваемого действия к действию группы G на аффинном многообразии. Показано, что если стабилизатор типичной точки для действия редуктивной группы G на многообразии X редуктивен, то многообразие X бирационально изоморфно аффинному многообразию $\bar{X}$ со стабильным действием группы G. В работе показано, что если типичная орбита действия группы G квазиаффинна, то многообразие X бирационально изоморфно аффинному многообразию $\bar{X}$.

Abstract

A. V. Petukhov, Varieties birationally isomorphic to affine G-varieties, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 1, pp. 125—133.

Let a linear algebraic group G act on an algebraic variety X. Classification of all these actions, in particular birational classification, is of great interest. A complete classification related to Galois cohomologies of the group G was established. Another important question is reducibility, in some sense, of this action to an action of G on an affine variety. It has been shown that if the stabilizer of a typical point under the action of a reductive group G on a variety X is reductive, then X is birationally isomorphic to an affine variety $\bar{X}$ with stable action of G. In this paper, I show that if a typical orbit of the action of G is quasiaffine, then the variety X is birationally isomorphic to an affine variety $\bar{X}$.

1. Введение

Пусть линейная алгебраическая группа G действует на алгебраическом многообразии X. Весьма интересен вопрос о классификации всех таких действий, в частности о бирациональной классификации. Известна полная классификация, связанная с когомологиями Галуа группы G [2]. Важен также вопрос о сводимости в том или ином смысле этого действия к действию группы G на аффинном

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 1, с. 125—133.

многообразии. В [3] показано, что если стабилизатор типичной точки для действия редуктивной группы G на многообразии X редуктивен, то многообразие X бирационально изоморфно аффинному многообразию $\bar{X}$ со стабильным действием группы G. Мы показываем, что если типичная орбита действия группы G квазиаффинна, то многообразие X бирационально изоморфно аффинному многообразию $\bar{X}$.

По сути, классификация всех действий сводится к классификации семейств подгрупп — стабилизаторов точек вдоль квазисечения; в частности, мы будем исследовать семейства подгрупп, факторы по которым квазиаффинны, — семейства обозримых подгрупп. В [4] проведено обширное исследование семейств, пусть и в несколько другом ключе, чем необходимо нам: нас интересует подгруппа, содержащая в некотором смысле все подгруппы семейства, а в указанной работе изучаются подгруппы, содержащиеся во всех подгруппах семейства. В целом статья посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть имеются алгебраическая группа G и G-многообразие X, такие что орбита общего положения при действии на этом многообразии квазиаффинна. Тогда многообразие X бирационально изоморфно аффинному G-многообразию.*

2. Обозначения и соглашения

Для группы H, являющейся подгруппой группы G, введём следующие обозначения:

$\mathrm{R}(H)$ — радикал группы H;

$\mathrm{R_u}(H)$ — унипотентный радикал группы H;

H^0 — связная компонента единицы в H;

L_H — некоторая максимальная связная редуктивная подгруппа в H;

$\mathrm{Ob}(G)$ — множество обозримых подгрупп группы G: это те и только те подгруппы, для которых G/H квазиаффинна.

Определение 1. Подгруппа H группы G связана парой подгрупп (H_1, H_2), если $H_1 \subset H^0 \subset H_2$ и $\mathrm{R_u}(H) \subset \mathrm{R_u}(H_2)$.

Определение 2. Подгруппа H группы G правильно вложена в G, если $\mathrm{R_u}(H) \subset \mathrm{R_u}(G)$.

Определение 3. Семейством с базой S подгрупп алгебраической группы G называется замкнутое подмногообразие $Y \subset S \times G$, такое что образ $(\cdot,\cdot)\colon Y \times_S Y \to S \times G$ лежит в Y, как и образ $\sigma\colon Y \to S \times G$, где $(\cdot,\cdot)\colon G \times G \to G$ — групповая операция, а $\sigma\colon G \to G$ — обращение.

Определение 4. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — доминантный морфизм алгебраических многообразий. Тогда квазисечением S для этого действия называется замкнутое подмногообразие X, такое что $\varphi|_S\colon S \to Y$ — рациональное накрытие.

Общий план доказательства можно описать следующим образом.

Пусть группа G действует на многообразии X и все орбиты квазиаффинны. Тогда стабилизаторы точек общего положения «похожи» друг на друга: размерность унипотентного радикала у них одинакова и их редуктивные части сопряжены, а некоторые подгруппы, сопряжённые к стабилизаторам точек общего положения, связаны парой (L_H, H), где $H = H^0 \in \mathrm{Ob}(G)$. Это условие является необходимым и достаточным для квазиаффинности орбиты общего положения при действии G на многообразии X.

Каждому семейству $Y \subset S \times G$ подгрупп группы G соответствует G-многообразие K, в котором есть сечение для действия G на K, изоморфное S и такое, что семейство с базой S стабилизаторов точек вдоль S совпадает с Y. Этот факт доказан в [1]. Более того, любые два многообразия M и M' с указанными свойствами бирационально изоморфны. Мы будем говорить, что многообразие M порождено семейством $Y \subset S \times G$. При этом любое G-многообразие может быть получено как фактор по дискретной группе F некоторого F-многообразия M (действия F и G при этом коммутируют), порождённого семейством подгрупп $Y \subset S \times G$. Здесь мы следуем [2].

Теперь мы имеем два мощных факта: один утверждает, что любое действие описывается семейством своих стабилизаторов вдоль некоторого квазисечения [1], а другой описывает эти стабилизаторы в условиях теоремы 1. Мы можем считать, что выбрали квазисечение S для действия G на X так, что для любого $x \in S$ подгруппа St_x связана парой (L_H, H) для фиксированной связной обозримой подгруппы H. Семейством подгрупп $Y_{\mathrm{R_u}(H)} \subset S \times \mathrm{R_u}(H) \subset X \times G$ $(su = s)$ порождаем квазиаффинное многообразие $M_{\mathrm{R_u}(H)}$ и наделяем его структурой H-многообразия. Многообразие $M_G = G *_H M_H$ тоже является квазиаффинным и обладает сечением S, семейство стабилизаторов вдоль которого совпадает с $Y_G \subset S \times G \subset X \times G$ $(g \in H \cap \mathrm{St}_x = \mathrm{St}_x^0)$. Следовательно, существует конечное на открытом множестве отображение из M_G в X. Отсюда следует квазиаффинность этого открытого G-инвариантного подмножества в X.

Основным полем для всех рассматриваемых объектов является $\mathbb{C}$ (несчётное алгебраически замкнутое поле характеристики 0), все схемы отделимы.

3. Связывание стабилизаторов

Определение 5. Подмножество алгебраического многообразия называется А-измеримым, если оно есть объединение не более чем счётного числа конструктивных множеств.

Предложение 1. *Если неприводимое конструктивное множество X вложено в множество $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i \subset S$ (все V_i — конструктивные множества), где S — алгебраическое многообразие, то существует открытое подмножество X' в X, вложенное в V_i для некоторого i.*

Доказательство. Если ни для какого i $\overline{V_i \cap X}$ не совпадает с $\bar{X}$, то $\bar{X}$ есть объединение счётного числа своих подмногообразий меньшей размерности. Противоречие. Следовательно, одно из этих множеств плотно в X, откуда и следует доказываемое утверждение. $\square$

Лемма 1. *Некоторая подгруппа, сопряжённая с данной обозримой подгруппой H группы G, связана одной из пар вида $\{(\mathrm{L}_{H_i}, H_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, где H_i — обозримые подгруппы, а L_{H_i} — их подгруппы Леви.*

Доказательство. Подгруппа, сопряжённая с подгруппой H, правильно вложена в некоторую квазипараболическую подгруппу Q из множества $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (число доминантных весов счётно). В этой квазипараболической подгруппе Q существует лишь счётное число (с точностью до сопряжения) редуктивных подгрупп R, одна из которых совпадает с редуктивной частью подгруппы H. Множество пар $(R, R\cdot \mathrm{R_u}\, Q)$ задаёт искомое множество пар (L_{H_i}, H_i). $\square$

Теорема 2. *Множество подалгебр m алгебры Ли $\mathfrak{g}$ заданной размерности n есть замкнутое подмногообразие в $\mathrm{Gr}(n,\mathfrak{g})$ (грассманиан, многообразие n-мерных подпространств в $\mathfrak{g}$). Далее это множество обозначается $\mathrm{Lie}(n,\mathfrak{g})$.*

Доказательство. Пусть v — разложимый элемент из $\Lambda^n\mathfrak{g}$, соответствующий точке из $\mathrm{Gr}(n,\mathfrak{g})$. Тогда подпространство, ему соответствующее, есть алгебра Ли, если и только если $[\langle v,x\rangle,\langle v,y\rangle]\wedge v = 0$ для любых $x,y\in (V^*)^{\otimes(n-1)}$ ($\langle u,w\rangle$ — полная покомпонентная свёртка тензора $u\otimes w$). $\square$

Замечание 1. Пусть G — унипотентная группа. Тогда каждой подалгебре её алгебры Ли соответствует её алгебраическая подгруппа.

Замечание 2. Подалгебры Ли всех подгрупп, сопряжённых данной, образуют алгебраическое подмногообразие в грассманиане.

Доказательство. Рассматриваемые подалгебры — это те и только те подпространства заданной размерности в алгебре Ли, которые лежат в одной орбите с вектором, соответствующим данной алгебре. $\square$

Определение 6. Семейством с базой S подалгебр размерности n алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется отображение $S\to \mathrm{Lie}(n,\mathfrak{g})$.

Лемма 2. *Каждому семейству подгрупп фиксированной размерности $Y\subset$ $\subset X\times G$ соответствует семейство подалгебр Ли.*

Доказательство. Касательное расслоение к семейству подгрупп Y вложено в касательное расслоение $\mathrm{T}(G\times X)$ как замкнутое подмногообразие. В касательное расслоение $\mathrm{T}(G\times X)$ также отображается $X\times \mathrm{lie}\, G$ (редукция действия группы к действию её алгебры). Прообраз касательного расслоения к семейству даёт многообразие N. Рассмотрим многообразие

$$P\subset X\times \mathfrak{g}\times \mathrm{Gr}(n,\mathfrak{g}) = \{(s,g,\bar{\mathfrak{g}})\mid g\in\bar{\mathfrak{g}}\}$$

и пересечение $U = N\times \mathrm{Lie}(n,\mathfrak{g})\cap P$, а также образ при проекции $U\to X\times \mathrm{Lie}(n,\mathfrak{g})$ — некоторое многообразие A. Заметим, что отображение проекции $A\to X$ есть поточечный изоморфизм, следовательно, имеется бирациональное отображение $X\to \mathrm{Lie}(n,\mathfrak{g})$. $\square$

Теорема 3. *Множество подгрупп размерности n группы G, связанных парой (L_H, H), где L_H — подгруппа Леви подгруппы H, задаёт своими алгебрами Ли замкнутое подмножество в $\mathrm{Lie}(n, \mathrm{lie}\, G)$.*

Доказательство. Редуктивная связная группа L_H и унипотентная группа U являются подгруппой Леви и радикалом одной и той же группы, если и только если L_H сохраняет U при действии на неё сопряжением. Иначе говоря, $[\mathrm{lie}\, \mathrm{L}_H, \mathrm{lie}\, U] \subset \mathrm{lie}\, U$, что в терминах соответствующих разложимых векторов записывается как

$$\forall\, x \in \Lambda^{\dim \mathrm{L}_H - 1}[\mathrm{lie}\, H]^* \ \forall\, y \in \Lambda^{\dim U - 1}[\mathrm{lie}\, \mathrm{R_u}\, H]^* \ \big([\langle v_L, x\rangle, \langle v_U, y\rangle] \wedge v_U = 0\big).$$

Это условие выделяет замкнутое множество v_U в $\mathrm{Gr}(\dim U, \mathrm{lie}\, \mathrm{R_u}\, H)$. Следовательно, образ отображения $(v_L, v_U) \to v_L \wedge v_U$, являющийся искомым множеством касательных алгебр, замкнут. □

Следствие 1. *Множество алгебр Ли всех подгрупп группы G, сопряжённые которым правильно вложены в указанную подгруппу H, образует A-измеримое множество.*

Доказательство. Каждая правильно вложенная в H подгруппа S с точностью до сопряжения связана одной из пар (L_{H_i}, H_i), где $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — множество таких подгрупп G, что $\mathrm{R_u}\, H = \mathrm{R_u}\, H_i$. Таким образом, множество этих алгебр Ли есть разнесение действием группы множества алгебр Ли подгрупп, связанных парами $\{(\mathrm{L}_{H_i}, H_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$. □

Теорема 4. *Пусть G — алгебраическая группа, и пусть имеется неприводимое равноразмерное семейство её алгебраических подгрупп $Y \subset X \times G$, причём каждая подгруппа семейства обозрима в G. Тогда существуют открытое подмножество X' в X и связная обозримая подгруппа H в G, такая что пара (L_H, H) связывает некоторые сопряжённые подгруппы всех подгрупп семейства $Y \cap (X' \times G)$.*

Доказательство. Семейству подгрупп соответствует семейство подалгебр с той же базой. Множество алгебр Ли подгрупп, сопряжённые к которым связаны парой (L_{H_i}, H_i) для некоторой обозримой подгруппы $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, есть A-измеримое множество S. Семейство алгебр Ли $\varphi\colon X' \to \mathrm{Lie}(n, \mathfrak{g})$, где n — размерность подалгебр общего положения в семействе, а X' — открытое множество в X, лежит в S. Тогда по предложению 1 имеется открытое множество X' в X, такое что

$$\exists\, i \in \mathbb{N}\colon \forall\, x \in X'' \ \exists\, g \in G \ \big(\mathrm{St}_{gx} \text{ связана парой } (\mathrm{L}_{H_i}, H_i)\big). \qquad \square$$

Теорема 5. *Пусть алгебраическая группа G действует на многообразии X и типичная орбита квазиаффинна. Тогда существует связная обозримая подгруппа $H \subset G$, такая что для всех точек x из открытого множества $X' \subset X$ некоторая подгруппа, сопряжённая St_x, связана парой (L_H, H).*

Доказательство. При отображении $\varphi\colon X\times G\to X\times X$ вида $(x,g)\mapsto(gx,x)$ прообраз диагонали в $X\times X$ есть семейство стабилизаторов точек. По теореме 4 существует обозримая подгруппа H и, соответственно, пара (L_H, H) со свойством, что существует открытое множество X' в X, такое что

$$\forall\, x\in X'\ \exists\, g\in G\ \big(\mathrm{St}_{gx}\ \text{связана парой}\ (\mathrm{L}_H,H)\big). \qquad \square$$

4. Несколько вспомогательных фактов

Теорема 6. *Пусть G, $H\subset G$ — алгебраические группы. Если G/H квазиаффинна, то для любого квазиаффинного H-многообразия X многообразие $G*_H X$ квазиаффинно.*

Доказательство. Схема X есть подмногообразие некоторого H-модуля V_H, который в силу квазиаффинности G/H является подмодулем некоторого G-модуля V_G. Следовательно, многообразие $G*_H X$ вложено в $G*_H V_G$, причём $G*_H V_G\cong G/H\times V_G$, где изоморфизм осуществляется отображением $(g,v)\mapsto(gH,gv)$. Многообразие $G/H\times V_G$ квазиаффинно, поэтому и $G*_H X$ квазиаффинно. $\square$

Замечание 3. Похожие рассуждения можно найти в [2].

Лемма 3. *Пусть конечная группа G действует на квазиаффинном многообразии X. Тогда существует квазиаффинный геометрический фактор $X\to Y$.*

Доказательство. Многообразие X есть открытое подмногообразие в аффинном G-многообразии $\tilde X$, для которого геометрический фактор существует и аффинен. $\square$

Лемма 4. *Пусть $\varphi\colon X\to Y$ — конечное сюръективное отображение нормальных многообразий. Тогда если многообразие X аффинно (квазиаффинно), то многообразие Y тоже аффинно (квазиаффинно).*

Доказательство. Пусть n — степень φ. Тогда

$$\varphi_n\colon \underbrace{X\times_Y X\times_Y\ldots\times_Y X}_{n\ \text{копий}}\cong X_\varphi^{(n)}\to Y\ —$$

конечное отображение. В $X_\varphi^{(n)}$ имеется подмногообразие $\tilde X$, являющееся замыканием множества упорядоченных n-наборов попарно различных элементов из X, переходящих в один элемент из Y. Тогда $\tilde X$ аффинно (квазиаффинно). Но $\tilde X/S_n\cong Y$ поточечно на открытом множестве, и, поскольку отображение $\tilde X/S_n\to Y$ конечно, оно изоморфизм. Следовательно, Y тоже аффинно (квазиаффинно). $\square$

Лемма 5. *Пусть $\varphi\colon X\to Y$ — морфизм G-многообразий и существует открытое множество $Y'\subset Y$, такое что для каждого $y\in Y'$ справедливо, что $|\{\varphi^{-1}(y)\}|<\infty$. Тогда существует G-инвариантное открытое множество $Y''\subset Y$, такое что отображение $\varphi|_{\varphi^{-1}(Y'')}\colon\varphi^{-1}(Y'')\to Y''$ конечно.*

Доказательство. Хорошо известно, что существует такое открытое аффинное множество $\tilde{Y}$, что отображение

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(\tilde{Y})}\colon \varphi^{-1}(\tilde{Y}) \to \tilde{Y}$$

конечно. Тогда отображение

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(G\tilde{Y})}\colon \varphi^{-1}(G\tilde{Y}) \to G\tilde{Y}$$

тоже конечно; здесь $G\tilde{Y}$ — минимальное G-инвариантное открытое множество, содержащее $\tilde{Y}$. В самом деле, оно конечно на атласе из аффинных открытых множеств $\{g\tilde{Y}\}_{g\in G}$. □

Лемма 6. *Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — доминантный морфизм двух алгебраических многообразий, причём многообразие Y неприводимо. Тогда существуют подмногообразие $S_X \subset X$ и открытое подмножество $S_Y \subset Y$, такие что отображение $\varphi\colon S_X \to S_Y \subset Y$ конечно.*

Доказательство. Можно считать, что многообразие X аффинно. Пусть $k[X]$ — его алгебра регулярных функций, а $k(Y)$ — поле рациональных функций многообразия Y. Тогда по теореме о продолжении гомоморфизма существует гомоморфизм $\psi\colon k[X] \to k(\bar{Y})$, где $k(\bar{Y})$ — конечное расширение поля $k(Y)$. Ему соответствует единственное с точностью до бирациональной эквивалентности многообразие $\bar{Y}$. Замыкание образа соответствующего ψ бирационального морфизма $\bar{\psi}\colon \bar{Y} \to X$ обозначим S'_X. Очевидно, что морфизм $\varphi|_{S'_X}\colon S'_X \to Y$ имеет конечное число прообразов в общей точке. Следовательно, существует открытое множество $S_Y \subset Y$, такое что морфизм

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(S_Y)\cap S'_X}\colon \varphi^{-1}(S_Y)\cap S'_X \to S_Y$$

конечен. □

Замечание 4. Этот результат в терминах квазисечений доказан в [2].

5. Основной результат

Теорема 7. *Для любого семейства $Y \subset U \times S$ подгрупп унипотентной группы U существуют аффинное U-многообразие X, открытое подмножество $S' \subset S$ и сечение действия на нём U, такие что семейство стабилизаторов точек вдоль этого сечения совпадает с семейством $Y \cap U \times S'$.*

Доказательство. Рассмотрим такую возрастающую фильтрацию $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ группы U нормальными подгруппами, что $U_0 = \{e\}$, $U_\infty = U$, $U_{i+1}/U_i \cong (\mathbb{C}^{k_i}, +)$. Пусть U' — подгруппа группы U. Тогда образ множества $U'\cap U_{i+1}$ при отображении $\{U'\cap U_{i+1} \to U_{i+1}/U_i\}$ есть подпространство, и дополнительное к нему подпространство имеет сечение в U_{i+1}, изоморфное $\mathbb{C}^{k_i-\dim((U'\cap U_{i+1})/(U'\cap U_i))} = K_i$. Очевидно, что всевозможные поэлементные произведения $K = K_\infty \cdot \ldots \cdot K_1 \cdot K_0$ образуют сечение действия U' на U слева. Из конструкции очевидно, что если

U' — часть семейства, то K является сечением для открытого аффинного множества S' на семействе. И наоборот, используя формулу Кэмпбелла—Хаусдорфа, можно построить действие U для открытой части S' семейства S, содержащего U', на $S' \times K$, семейство стабилизаторов которого вдоль S' совпадает с (Y, S'). □

Следствие 2. *Пусть H — связная аффинная алгебраическая группа с подгруппой Леви L, и пусть $Y \subset S \times G$ — семейство подгрупп, связанных парой (L, H). Тогда существуют открытое множество S' в S и квазиаффинное H-многообразие X с сечением действия H на нём $t\colon X/H \to X$, такие что семейство стабилизаторов вдоль этого сечения совпадает с $Y \cap (S' \times G)$.*

Доказательство. Семейство можно считать равноразмерным. Каждый элемент семейства H_x представи́м в виде $L \leftthreetimes \mathrm{R_u}\, H_x$. Рассмотрим соответствующее многообразие X для семейства $x \to \mathrm{R_u}\, H_x$. Осталось только заметить, что можно канонически установить действие H на X. □

Теорема 8. *Пусть есть алгебраическая группа G и неприводимое G-многообразие X, такие что орбита общего положения при действии на этом многообразии квазиаффинна. Тогда X бирационально изоморфно аффинному G-многообразию.*

Доказательство. По теореме 5 существуют связная обозримая подгруппа H группы G, открытое инвариантное множество $X' \subset X$, такое что для каждого $x \in X'$ найдётся элемент $g \in G$, для которого St_{gx} связана парой (L_H, H), где L_H — подгруппа Леви H, и для любых $x, y \in X'$ выполнено $\dim \mathrm{St}_x = \dim \mathrm{St}_y$, и геометрический фактор X'/G (теорема Розенлихта). В последнем существует замкнутое подмножество точек, в которых размерность орбиты H минимальна, или, что эквивалентно, множество точек $x \in X$, таких что $\mathrm{St}_x^0 \subset H$. Среди них имеется множество точек X'', неподвижных относительно фиксированной подгруппы Леви L группы H. Замкнутое многообразие X'' пересекается с каждой орбитой действия G на X, следовательно, образ отображения $\varphi\colon X'' \to X/G$ плотен. Значит, существует такое квазисечение $S \subset X''$, что $\varphi|_S$ конечно над открытым множеством $X_g/G \subset X/G$, где X_g — G-инвариантное открытое подмножество в X. Тогда многообразие $M = X_g \times_{X_g/G} S$ является G-многообразием, и отображение проекции $\mathrm{pr}\colon M \to X_g$ конечно. При этом отображение проекции $M \to S$ есть фактор по действию группы G, а диагональное отображение $S \to S \times_{X_g/G} S \subset X_g \times_{X_g/G} S$ является сечением. Стабилизаторы точек этого сечения связаны парой (L, H).

Вдоль сечения S образуется семейство $Y \subset G \times S$ подгрупп группы G с базой S: $(g, s) \in Y$ тогда и только тогда, когда $gs = s$ и $g \in H$, $x \to \mathrm{St}_x \cap H = \mathrm{St}_x^0$. Для этого семейства подгрупп H существует квазиаффинное (более того, аффинное) H-многообразие M_H, обладающее сечением $S_H \cong S$, семейство $Y_H \subset G \times S_H \to S_H$ подгрупп вдоль которого совпадает с нашим семейством подгрупп группы H. Многообразие $M_G \cong G *_H M_H$ квазиаффинно, и сечение

$\{e\} * S_H$ задаёт семейство $Y_G \subset G \times S \to S$ подгрупп группы G, совпадающее с исходным. Имеются два естественных отображения: $\phi\colon S \times G \to M$ вида $(s, g) \mapsto gs$ и $\psi\colon S \times G \to M_G$ вида $(s, g) \mapsto gs$, причём если $\psi(x) = \psi(y)$, то $\phi(x) = \phi(y)$. Поэтому существует G-эквивариантный бирациональный морфизм p из квазиаффинного многообразия M_G в многообразие M, который имеет конечное число прообразов в общей точке. Следовательно, это конечное отображение на инвариантном открытом множестве $M'_G \subset M_G$. Значит, многообразие M'_G квазиаффинно, как и $p(M'_G)$, но последнее является открытым G-инвариантным подмножеством в X. □

Теорема 1 является очевидным следствием теоремы 8.

Автор благодарит Ивана Владимировича Аржанцева за постановку задачи.

Литература

[1] Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Т. 55. — М.: ВИНИТИ, 1989. — С. 137—290.

[2] Popov V. Sections in invariant theory // The Sophus Lie Memorial Conference. Proceedings. — Oslo, 1992.

[3] Reichstein Z., Vonessen N. Stable affine models for algebraic group actions // J. Lie Theory. — 2004. — Vol. 14, no. 2. — P. 563—568.

[4] Richardson R. W. Jr. Deformations of Lie subgroups and the variation of isotropy subgroups // Acta Math. — 1972. — Vol. 129. — P. 35—73.