О шкале потенциалов локальной вычислимости алгебр*

А. Г. ПИНУС
Новосибирский государственный технический университет
e-mail: algebra@nstu.ru

УДК 512.56

Ключевые слова: условно термальные функции, потенциал вычислимости конечной алгебры, потенциал локальной вычислимости алгебры.

Аннотация

Вводится понятие шкалы потенциалов локальной вычислимости (локальных программно-вычислительных возможностей) всех универсальных алгебр. Изучаются свойства этой шкалы.

Abstract

A. G. Pinus, On the scale of local computability potentials of algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 1, pp. 135—145.

The concept of the scale of local computability (local program-computability possibilities) of all universal algebras is introduced. Properties of this scale are studied.

Понятие потенциала вычислимости конечной алгебры (основанное на понятии условно термальной функции) как совокупности программно-вычислимых функций этой алгебры и понятие шкалы этих потенциалов, основанное на сравнении этих совокупностей, были введены в [4,7]. Понятие потенциала локальной вычислимости сводится к программной вычислимости в этой алгебре на конечных подмножествах её основного множества.

Напомним необходимые определения и обозначения. Через $\mathrm{CT}(\mathcal{A})$ для алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ обозначим совокупность всех условно термальных (программно-вычислимых) функций этой алгебры (определение последних см., например, в [2, 8]). Обозначаемая далее как $\bar{\mathcal{A}}$ совокупность $\mathrm{CT}(\mathcal{A})$ для алгебры $\mathcal{A}$ рассматривается как *потенциал вычислимости* этой алгебры.

Если $\mathcal{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ и $\mathcal{B} = \langle B; \sigma_2 \rangle$ — две равномощные алгебры, считаем, что $\bar{\mathcal{A}} \leqslant \bar{\mathcal{B}}$ ($\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{B}}$) тогда и только тогда, когда существует биекция φ множества A на B, такая что $\mathrm{CT}(\mathcal{A}) \subseteq \varphi^{-1}\mathrm{CT}(\mathcal{B})\varphi$ ($\mathrm{CT}(\mathcal{A}) = \varphi^{-1}\mathrm{CT}(\mathcal{B})\varphi$). При этом, как доказано в [1], для конечных n-элементных алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ $\bar{\mathcal{A}} \leqslant \bar{\mathcal{B}}$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00159-а.

($\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{B}}$) тогда и только тогда, когда $\varphi^{-1}\operatorname{Iso}\mathcal{B}\varphi \subseteq \operatorname{Iso}\mathcal{A}$ ($\varphi^{-1}\operatorname{Iso}\mathcal{B}_\varphi = \operatorname{Iso}\mathcal{A}$), где $\operatorname{Iso}\mathcal{A}$ — полугруппа внутренних изоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ (изоморфизмов между подалгебрами алгебры $\mathcal{A}$). Через CT_n обозначается конечная совокупность потенциалов вычислимости всех n-элементных алгебр (через CT — всех конечных алгебр), частично упорядоченное множество $\langle \mathrm{CT}_n; \leqslant\rangle$ называется *шкалой потенциалов вычислимости n-элементных алгебр*. В [4] предложен принцип сравнения потенциалов вычислимости для алгебр различной мощности. Для $\mathcal{A} = \langle A; \sigma_1\rangle$ и $\mathcal{B} = \langle B; \sigma_2\rangle$ отношение $\bar{\mathcal{A}} \leqslant \bar{\mathcal{B}}$ имеет место, если существует такая биекция φ множества A на $C \subseteq B$, что $\varphi\mathrm{CT}(\mathcal{A})\varphi^{-1} \subseteq \mathrm{CT}_C(\mathcal{B}) \restriction C$; здесь и далее $\mathrm{CT}_C(\mathcal{B})$ — совокупность $\mathrm{CT}(\mathcal{B})$-функций, относительно которых множество C замкнуто, а $\mathrm{CT}_C(\mathcal{B}) \restriction C$ — C-ограничения этих функций. В [4] также найден критерий в терминах полугрупп $\operatorname{Iso}\mathcal{A}$, $\operatorname{Iso}\mathcal{B}$ и подмножеств множества B для отношения $\bar{\mathcal{A}} \leqslant \bar{\mathcal{B}}$ в случае конечности алгебры $\mathcal{A}$. Под *шкалой потенциалов вычислимости всех конечных алгебр* имеется в виду частично упорядоченное множество $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$. Различным аспектам строения этой шкалы посвящены работы [3—5].

Характеризацией программно-вычислительных возможностей бесконечных алгебр на конечных подмножествах их основных множеств служит понятие *следа $\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{CT}}$ алгебры $\mathcal{A}$ в шкале* $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$:

$$\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{CT}} = \{\bar{\mathcal{B}} \in \mathrm{CT} \mid \bar{\mathcal{B}} \leqslant \bar{\mathcal{A}}\}.$$

След $\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{CT}}$ алгебры $\mathcal{A}$ в шкале $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$ естественно рассматривать как потенциал $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ локальной вычислимости алгебры $\mathcal{A}$, и сравнение этих потенциалов $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}} \leqslant \bar{\mathcal{B}}^{\mathrm{loc}}$ сводится к теоретико-множественному включению $\mathcal{A}_{\mathrm{CT}} \subseteq \mathcal{B}_{\mathrm{CT}}$. При этом, по аналогии с определением условной рациональной эквивалентности алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ как равенства $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{B}}$, в случае $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}} = \bar{\mathcal{B}}^{\mathrm{loc}}$ будем говорить о *локальной условной рациональной эквивалентности алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$*.

Подмножество B частично упорядоченного множества $\langle A; \leqslant\rangle$ называется *слабым идеалом*, если для любых $a \in A$, $b \in B$, таких что $a \leqslant b$, имеет место включение $a \in B$. Слабый идеал, являющийся направленным вверх частично упорядоченным множеством, называется *идеалом*. Через $I_\infty(\langle A; \leqslant\rangle)$ обозначим совокупность бесконечных слабых идеалов частично упорядоченного множества $\langle A; \leqslant\rangle$, а для $a \in A$ через I_a обозначим идеал $\{b \in A \mid b \leqslant a\}$ частично упорядоченного множества $\langle A; \leqslant\rangle$. Совокупность $I_\infty(\langle A; \leqslant\rangle) \cup \{I_a \mid a \in A\}$, частично упорядоченную отношением теоретико-множественного включения, обозначим $J_\infty(\langle A; \leqslant\rangle)$ и назовём *∞-идеализацией частично упорядоченного множества* $\langle A; \leqslant\rangle$. При этом естественно отождествить элементы a ($a \in A$) с идеалами I_a и само частично упорядоченное множество $\langle A; \leqslant\rangle$ с подмножеством частично упорядоченного множества $J_\infty(\langle A; \leqslant\rangle)$.

Для любой бесконечной алгебры $\mathcal{A}$ совокупность $\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{CT}}$ является бесконечным слабым идеалом шкалы $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$, а в случае локальной конечности $\mathcal{A}$ — идеалом этой шкалы. В [3] показано обратное: для любого $I \in I_\infty(\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle)$ существует алгебра $\mathcal{A}$, такая что $\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{CT}} = I$, причём если I — идеал, то алгебра $\mathcal{A}$ может быть выбрана локально конечной. *Шкалой потенциалов локальной вычислимости всех алгебр* $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$ естественно считать, в силу сказанного выше, частично упорядоченное множество $J_\infty(\langle \mathrm{CT}; \leqslant \rangle)$, при этом шкала $\langle \mathrm{CT}; \leqslant \rangle$ является идеалом шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$, состоящим из таких точек $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ последней, что совокупность $\{\bar{\mathcal{B}}^{\mathrm{loc}} \in \mathrm{CT}_\infty \mid \bar{\mathcal{B}}^{\mathrm{loc}} \leqslant \bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}\}$ конечна.

Отметим также, что для алгебр $\mathcal{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ и $\mathcal{B} = \langle B; \sigma_2 \rangle$ отношение $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}} \leqslant \bar{\mathcal{B}}^{\mathrm{loc}}$ равносильно существованию для любого конечного $C \subseteq A$ такой биекции φ множества C во множество B, что

$$\varphi(\mathrm{CT}_C(\mathcal{A}) \upharpoonright C)\varphi^{-1} \subseteq \mathrm{CT}_{\varphi(C)}(\mathcal{B}) \upharpoonright \varphi(C).$$

Очевидно, что из равенства (отношения) $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{B}}$ ($\bar{\mathcal{A}} \leqslant \bar{\mathcal{B}}$) для конечных алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ вытекает очевидным образом равенство $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}} = \bar{\mathcal{B}}^{\mathrm{loc}}$ ($\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}} \leqslant \bar{\mathcal{B}}^{\mathrm{loc}}$). В [3] приведён пример двух локально условно рационально эквивалентных алгебр, не являющихся условно рационально эквивалентными. Покажем, что подобная ситуация регулярна, а именно докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любой бесконечной алгебры* $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$

1) *существует континуум локально условно рационально эквивалентных ей счётных алгебр, попарно не являющихся условно рационально эквивалентными друг другу*;
2) *для любого бесконечного кардинала* $\aleph$ *существует алгебра* $\mathcal{A}_\aleph$ *мощности* $\aleph$, *локально условно рационально эквивалентная алгебре* $\mathcal{A}$.

Доказательство. 1. Для любого натурального n обозначим $\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{CT}} \cap \mathrm{CT}_n$ через $\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{CT}_n}$. Пусть $\mathrm{Max}\,\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{CT}_n}$ — совокупность максимальных элементов конечного частично упорядоченного множества $\langle \bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{CT}_n}; \leqslant \rangle$ с порядком, индуцированным из $\langle \mathrm{CT}_n; \leqslant \rangle$. Пусть конечные универсальные алгебры $\mathcal{A}_i^n = \langle A_i^n; \sigma_i^n \rangle$ таковы, что $\mathrm{Max}\,\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{CT}_n} = \{\bar{\mathcal{A}}_1^n, \ldots, \bar{\mathcal{A}}_{k_n}^n\}$. Далее считаем все множества A_j^n ($n \in \omega$, $j \leqslant k_n$) попарно дизъюнктными. Пусть алгебры $\mathcal{D}_j^n = \langle D_j^n; \sigma_j^n \rangle$ изоморфны алгебрам $\mathcal{A}_j^n$ и множества $\mathcal{D}_j^n$ дизъюнктны между собой.

Пусть B — произвольное подмножество множества ω. Для каждой функции f из

$$\bigcup_{\substack{n \in \omega \\ j \leqslant k_n}} \mathrm{CT}(\mathcal{A}_j^n) \cup \bigcup_{\substack{m \in B \\ l \leqslant k_m}} \mathrm{CT}(\mathcal{D}_i^m)$$

через g_f обозначим функциональный символ той же арности, что и функция f. Через σ_B обозначим сигнатуру

$$\Bigl\langle g_f \mid f \in \bigcup_{\substack{n \in \omega \\ j \leqslant k_n}} \mathrm{CT}(\mathcal{A}_j^n) \cup \bigcup_{\substack{m \in B \\ l \leqslant k_m}} \mathrm{CT}(\mathcal{D}_i^m) \Bigr\rangle,$$

а через A_B — множество

$$\bigcup_{\substack{n \in \omega \\ j \leqslant k_n}} A_j^n \cup \bigcup_{\substack{m \in B \\ i \leqslant k_n}} D_i^m.$$

Пусть a_i^n — некоторый фиксированный элемент множества A_i^n для любых $n \in \omega$, $i \leqslant k_n$.

На множестве A_B определим алгебру $\mathcal{A}_B$ сигнатуры σ_B следующим образом. Индексом элемента a из A_B назовём число n, если $a \in A_i^n$ либо $a \in D_i^n$. Индексом кортежа $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ элементов из A_B назовём максимальный из индексов элементов, входящих в $\bar{a}$, и обозначим индекс кортежа $\bar{a}$ как $m(\bar{a})$. Пусть $g_f(x_1, \ldots, x_m) \in \sigma_B$ и $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ — кортеж элементов из A_B. Значение $g_f(a_1, \ldots, a_m)$ определим следующим образом:

$$
\begin{aligned}
& g_f(a_1,\ldots,a_m) = f(a_1,\ldots,a_m), \quad \text{если } f \in \mathrm{CT}(\mathcal{A}_j^n) \text{ и } \{a_1,\ldots,a_m\} \subseteq A_j^n, \\
& \quad \text{либо } f \in \mathrm{CT}(\mathcal{D}_j^n) \text{ и } \{a_1,\ldots,a_m\} \subseteq D_j^n \text{ для некоторых } n \in \omega \text{ и } j \leqslant k_n; \\
& g_f(a_1,\ldots,a_m) = a_1, \quad \text{если } f \in \mathrm{CT}(\mathcal{A}_j^n),\ \{a_1,\ldots,a_m\} \subseteq A_{j_1}^{n_1} \text{ и } \langle n,j\rangle \neq \langle n_1,j_1\rangle, \\
& \quad \text{либо } f \in \mathrm{CT}(D_j^n),\ \{a_1,\ldots,a_m\} \subseteq D_{j_1}^{n_1} \text{ и } \langle n,j\rangle \neq \langle n_1,j_1\rangle, \\
& \quad \text{либо } f \in \mathrm{CT}(\mathcal{A}_j^n),\ \{a_1,\ldots,a_m\} \subseteq D_{j_1}^{n_1}, \\
& \quad \text{либо } f \in \mathrm{CT}(D_j^n),\ \{a_1,\ldots,a_m\} \subseteq A_{j_1}^{n_1}; \\
& g_f(a_1,\ldots,a_m) = a_\circ^{m(\langle a_1,\ldots,a_m\rangle)+1}, \quad \text{если } \{a_1,\ldots,a_m\} \nsubseteq A_j^n(D_j^n) \\
& \quad \text{для любых } n \in \omega,\ j \leqslant k_n.
\end{aligned}
$$

В силу последнего равенства никакое конечное множество C, не входящее целиком в одно из множеств вида A_j^n или D_j^n, не является замкнутым относительно любой из функций $g_f \in \sigma_B$. Таким образом, в определении следа $(\mathcal{A}_B)_{\mathrm{CT}}$ алгебры $\mathcal{A}_B$ для истинности неравенств $\bar{\mathcal{B}} \leqslant \bar{A}_B$ (т. е. включений $\pi\mathrm{CT}(\mathcal{B})\pi^{-1} \subseteq \subseteq \mathrm{CT}_{\pi(\mathcal{B})}(\mathcal{A}_B) \restriction \pi(\mathcal{B})$) для потенциалов $\bar{\mathcal{B}}$, отличных от наименьших потенциалов $\bar{0}_n$ шкал $\langle \mathrm{CT}_n; \leqslant \rangle$, достаточно рассматривать лишь такие вложения $\pi(\mathcal{B})$ в A_B, что $\pi(\mathcal{B}) \subseteq A_j^n$ либо $\pi(\mathcal{B}) \subseteq D_j^n$ для некоторых $n \in \omega$, $j \leqslant k_n$. А так как для любых $n \in \omega$, $j \leqslant k_n$ выполнено $\mathrm{CT}_{A_j^n}(\mathcal{A}_B) \restriction A_j^n = \mathrm{CT}(\mathcal{A}_j^n)$, $\mathrm{CT}_{D_j^n}(\bar{A}_B) \restriction D_j^n = \mathrm{CT}(\mathcal{D}_j^n)$ и $\mathcal{A}_j^n \cong \mathcal{D}_j^n$, то след $(\mathcal{A}_B)_{\mathrm{CT}}$ для любого $B \subseteq \omega$ совпадает со следом $\mathcal{A}_{\mathrm{CT}}$ алгебры $\mathcal{A}$. Таким образом, для доказательства утверждения 1) теоремы достаточно заметить, что алгебры $\mathcal{A}_{B_1}$ и $\mathcal{A}_{B_2}$ не являются условно рационально эквивалентными при $B_1 \neq B_2$. Подалгебры алгебр $\mathcal{A}_B$ с основными множествами вида A_j^n и D_j^m — это максимальные по включению конечные подалгебры этих алгебр. При этом если $n \in B_1$ и $n \notin B_2$, то число максимальных n-элементных подалгебр в алгебре $\mathcal{A}_{B_1}$, за счёт подалгебр на подмножествах D_i^n, в два раза больше, чем в алгебре $\mathcal{A}_{B_2}$, что и влечёт отсутствие условной рациональной эквивалентности этих алгебр.

2. Выбирая, в обозначениях предыдущего доказательства, для любого множества I мощности $\aleph$ алгебры $\mathcal{D}_{1,i}^2 = \langle D_{1,i}^2; \sigma_{1,i}^2 \rangle$ $(i \in I)$ попарно дизъюнктными, дизъюнктными с множествами A_j^n и изоморфными алгебре $\mathcal{A}_1^2$ и определяя на множестве

$$A_\aleph = \bigcup_{\substack{n\in\omega \\ j\leqslant k_n}} A_j^n \cup \bigcup_{i\in I} D_{1,i}^2$$

алгебру сигнатуры

$$\sigma = \left\langle g_f \mid f \in \bigcup_{\substack{n\in\omega\\ j\leqslant k_n}} \mathrm{CT}(\mathcal{A}_j^n) \cup \bigcup_{i\in I} \mathrm{CT}(D_{1,i}^2) \right\rangle,$$

подобно определению алгебр $\mathcal{A}_B$ на множестве A_B в доказательстве утверждения 1), получаем алгебру $\mathcal{A}_\aleph = \langle A_\aleph; \sigma\rangle$ мощности $\aleph$, локально условно рационально эквивалентную алгебре $\mathcal{A}$ (по тем же резонам, что и в доказательстве утверждения 1) для алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_B$). Теорема доказана. $\square$

Докажем следующее утверждение, связанное с вопросами строения шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$.

Теорема 2.

1. *Существует континуум попарно несравнимых потенциалов локальной вычислимости алгебр.*
2. *В шкале $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$ существуют неуплотняемые цепи порядковых типов ω и порядка действительных чисел.*
3. *Любой отличный от наибольшего элемент шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$ имеет покрытие в этой шкале.*

Доказательство. В [4] построено счётное множество $\{\bar{\mathcal{A}}_n \mid n \in \omega\}$ попарно несравнимых элементов шкалы $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$, при этом $\bar{\mathcal{A}}_n$ являются атомами шкал $\langle \mathrm{CT}_n; \leqslant\rangle$ с наименьшими элементами $\bar{O}_n$ и наибольшими элементами $\bar{\mathcal{E}}_n$. Кроме того, для любых $n \in \omega$, $\bar{\mathcal{B}} \in \mathrm{CT}$ имеем, что $\bar{\mathcal{B}} < \bar{\mathcal{A}}_n$ тогда и только тогда, когда $\bar{\mathcal{B}} = \bar{O}_r$ для некоторого $r \leqslant n$. Для любого бесконечного $B \subseteq \omega$ через $\mathcal{A}_B$ обозначим алгебру, след которой в шкале $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$ имеет вид $I_B = \{\bar{\mathcal{A}}_m, \bar{O}_n \mid m \in B,\ n \in \omega\}$. Тогда очевидно, что для любых бесконечных $B, C \subseteq \omega$ неравенство $\bar{\mathcal{A}}_B^{\mathrm{loc}} \leqslant \bar{\mathcal{A}}_C^{\mathrm{loc}}$ имеет место тогда и только тогда, когда $B \subseteq C$. Отсюда в силу существования континуума попарно несравнимых по отношению $\subseteq$ бесконечных подмножеств в ω и неуплотняемой по включению цепи подмножеств ω, имеющей порядковый тип действительных чисел, и вытекают утверждения 1 и 2 (о цепях порядкового типа действительных чисел). Иллюстрацией к остатку утверждения 2 из формулировки теоремы служит цепь

$$\bar{O}_1 < \bar{O}_2 < \ldots < \bar{O}_n < \ldots .$$

Пусть теперь $\bar{\mathcal{A}} \in \mathrm{CT}$. Если $\bar{\mathcal{A}} \in \mathrm{CT}_n$ для некоторого n, то любое покрытие точки $\bar{\mathcal{A}}$ в конечном частично упорядоченном множестве $\langle \mathrm{CT}_n; \leqslant\rangle$ будет покрытием $\bar{\mathcal{A}}$ и в $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$. Если $\bar{\mathcal{A}} \notin \mathrm{CT}_n$ для всех n, то $\mathcal{A}$ — бесконечная алгебра. Если $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ не является наибольшим элементом шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$, то найдётся такое $n \in \omega$, что $\bar{\mathcal{E}}_n \nleqslant \bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$. Пусть m — наименьшее подобное n и $\bar{\mathcal{B}}$ — некоторый минимальный элемент частично упорядоченного множества $\{\bar{\mathcal{B}} \in \mathrm{CT}_m \mid \bar{\mathcal{B}} \nleqslant \bar{\mathcal{A}}\}$. Тогда потенциал локальной вычислимости алгебры $\mathcal{A}'$, след которой в шкале $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$ совпадает со слабым идеалом $\mathcal{A}_{\mathrm{CT}} \cup \{\bar{\mathcal{B}}'\}$, и является, очевидным образом, покрытием точки $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ в шкале $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$. Теорема доказана. $\square$

Как уже отмечалось выше, совокупность CT является слабым идеалом в шкале $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$, при этом элементы из CT_∞, входящие в CT, — это такие точки $\bar{\mathcal{A}}$ из CT_∞, что слабый идеал $\{\bar{\mathcal{B}} \in \mathrm{CT}_\infty \mid \bar{\mathcal{B}} \leqslant \bar{\mathcal{A}}\}$ конечен. Тем самым при любом автоморфизме φ шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$ имеет место равенство $\varphi(\mathrm{CT}) = \mathrm{CT}$, и автоморфизмы шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$ индуцируются автоморфизмами шкалы $\langle \mathrm{CT}; \leqslant \rangle$. В частности, $\mathrm{Aut}\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle \cong \mathrm{Aut}\langle \mathrm{CT}; \leqslant \rangle$.

Теорема 3. *Совокупность* CT *является формульным подмножеством шкалы* $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$.

Доказательство. Как отмечено в [4], совокупность $\{\bar{O}_n \mid n \in \omega\}$ выделяется в шкале $\langle \mathrm{CT}; \leqslant \rangle$ формулой

$$\Phi(x) = \forall y \ \Big(x < y \ \& \ \forall z \ \big(x \leqslant z \leqslant y \longrightarrow (z = x \vee z = y)\big) \longrightarrow \\ \longrightarrow \forall u_1, u_2 \ \big(u_1 \leqslant y \ \& \ u_2 \leqslant y \longrightarrow (u_1 \leqslant u_2 \vee u_2 \leqslant u_1)\big)\Big).$$

Очевидно, что эта же формула в шкале $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$ выделяет совокупность $\{\bar{O}_n, I \mid n \in \omega\}$, где $I = \{\bar{O}_n \mid n \in \omega\}$, при этом $\bar{O}_n \leqslant I$ для любого n. Тем самым формула

$$\Phi'(x) = \Phi(x) \ \& \ \exists y \ (\Phi(y) \ \& \ x \leqslant y \ \& \ x \neq y)$$

выделяет в $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$ множество $\{\bar{O}_n \mid n \in \omega\}$. Но тогда формула

$$F(x) = \exists y \ (\Phi'(y) \ \& \ y \nleqslant x)$$

и будет искомой формулой, выделяющей в шкале $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$ совокупность CT. Теорема доказана. □

Из утверждения этой теоремы и доказанной в [4] неразрешимости элементарной теории шкалы $\langle \mathrm{CT}; \leqslant \rangle$ вытекает неразрешимость элементарной теории шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$. На самом деле имеет место более сильное утверждение.

Следствие 1. *В элементарной теории шкалы* $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$ *интерпретируется арифметика второго порядка.*

Доказательство. Напомним, что под арифметикой второго порядка понимается теория модели $\langle N; +, \cdot \rangle$ в исчислении с кванторами по произвольным предикатам. Гёделева нумерация n-ок натуральных чисел позволяет заменить интерпретацию арифметики второго порядка на элементарную интерпретацию модели $\langle N \cup P(N); +, \cdot, P, \in \rangle$. Здесь $P(N)$ — совокупность всех подмножеств множества N, предикат P выделяет в этой модели совокупность $P(N)$ и $\in$ — предикат теоретико-множественного вхождения элемента из N в подмножество из $P(N)$. Согласно теореме 3 и [6, теорема 1] для доказательства утверждения следствия достаточно в рамках элементарной теории шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$ построить элементарную формулу $P'(x)$, чтобы удовлетворяющие ей элементы из CT_∞ интерпретировали подмножества множества $\{\bar{\mathcal{E}}_n \mid n \in \omega\}$ (которое, согласно [6, теорема 1], интерпретирует натуральные числа), и элементарную формулу

$\Phi_\in(x,y)$, такую что $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle \models \Phi(\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{B}})$ тогда и только тогда, когда $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{E}}_n$, где $\bar{\mathcal{B}}$ P'-интерпретирует некоторое подмножество $B \subseteq N$ и $n \in B$.

Для интерпретации подмножества $B \subseteq N$ будем использовать слабые идеалы I_B шкалы $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$ из доказательства первого утверждения теоремы 2. Формула $P'(x)$ выписывается очевидным образом. Пусть формула $E(x)$ выделяет в шкале $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$ множество $\{\bar{\mathcal{E}}_n \mid n \in \omega\}$ и формулы $\Psi(x,y)$ и $R(x,y)$ таковы, что $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle \models \Psi(\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{B}})$ тогда и только тогда, когда $\bar{\mathcal{A}} = \bar{O}_n$ и $\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{E}}_n$ для некоторого $n \in \omega$, $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle \models R(\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{B}})$ тогда и только тогда, когда $\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{B}} \in \mathrm{CT}$ и $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$. Тогда в качестве искомой формулы $\Phi_\in(x,y)$ годится формула

$$E(x) \mathbin{\&} P'(y) \mathbin{\&} \exists\, z,\, u\ \big(\Psi(x,z) \mathbin{\&} u \leqslant y \mathbin{\&} R(u,z) \mathbin{\&} \neg\Phi'(x)\big).$$

Здесь $\Phi'(x)$ — формула из доказательства теоремы 3. Следствие доказано. □

Из утверждения теоремы 3 вытекает также целый ряд утверждений о формульности тех или иных совокупностей точек шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$, соответствующих алгебрам, определяемым своими локальными свойствами. Так, к примеру, как и в случае конечных алгебр, алгебру $\mathcal{A}$ (точку $\bar{\mathcal{A}}$ шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$) назовём *сверхжёсткой*, если $\mathcal{A}$ не имеет нетривиальных внутренних изоморфизмов. В [5] указана формула $\Psi(x)$, выделяющая в шкале $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$ сверхжёсткие точки.

Следствие 2. *Совокупность сверхжёстких точек шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$ формульна.*

Доказательство. Очевидно, что формула

$$F(x) \mathbin{\&} \Psi(x) \vee \forall\, y\ \big(F(y) \mathbin{\&} y \leqslant x \longrightarrow \Psi(y)\big)$$

и будет искомой. □

Выше уже отмечалось, что след $\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{CT}}$ локально конечной алгебры $\mathcal{A}$ в шкале $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$ является идеалом, а в [3] показано, что для любого идеала I шкалы $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$ существует локально конечная алгебра $\mathcal{A}$, такая что $\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{CT}} = I$. В то же время, как это следует из доказательства утверждения 1) теоремы 1, существует и не локально конечная алгебра $\mathcal{A}'$, такая что $\bar{\mathcal{A}}'_{\mathrm{CT}} = I$. Точку $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$ назовём *локально конечной*, если существует такая локально конечная алгебра $\mathcal{B}$, что $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}} = \bar{\mathcal{B}}^{\mathrm{loc}}$. В силу отмеченной выше связи идеалов шкалы $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$ с локально конечными точками шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$ справедливо следствие 3.

Следствие 3. *Совокупность локально конечных точек шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$ формульна.*

Остановимся, наконец, на вопросе о месте потенциалов вычислимости классических алгебр в шкале $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$. В связи с этим введём следующие определения. Для любого натурального n через $\bar{\mathcal{E}}_n$ обозначим наибольший элемент шкалы $\langle \mathrm{CT}_n; \leqslant\rangle$. Если при этом $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$ такова, что $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{E}}_n$, то $|A| = n$ и $\mathrm{CT}(\mathcal{A}) = F(A)$, $\mathrm{Sub}\,\mathcal{A} = A$, $\mathrm{Iso}\,\mathcal{A} = \mathrm{id}_A$. Здесь $F(A)$ — совокупность всех функций на множестве A, а id_A — тождественное отображение A на A. Алгебру $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$ назовём *n-условно полной*, если $\bar{\mathcal{E}}_n \leqslant \bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$. Подмножество $B \subseteq A$

назовём *n-блоком*, если для любого $D \in \mathrm{Sub}\,\mathcal{A}$ либо $D \cap B = \varnothing$, либо $B \subseteq D$ (равносильное требование: для любого $b \in B$ справедливо $B \subseteq \langle b \rangle_{\mathcal{A}}$, где $\langle b \rangle_{\mathcal{A}}$ — подалгебра алгебры $\mathcal{A}$, порождённая элементом b) и для любого $\varphi \in \mathrm{Iso}\,\mathcal{A}$ и любого $b \in B \cap \mathrm{Dom}\,\varphi$, такого что $\varphi(b) \in B$, имеет место равенство $\varphi(b) = b$. Очевидно, в силу отмеченного выше критерия неравенств $\bar{\mathcal{A}} \leqslant \bar{\mathcal{B}}$ для конечных алгебр $\bar{\mathcal{A}}$ неравенство $\bar{\mathcal{E}}_n \leqslant \bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ равносильно существованию n-блока в алгебре $\mathcal{A}$. *Рангом условной полноты* алгебры $\mathcal{A}$ назовём максимальное n (если таковое существует), такое что $\mathcal{A}$ n-условно полна; обозначим этот ранг $\mathrm{r}_{\mathrm{CT}\infty}(\mathcal{A})$. Алгебру $\mathcal{A}$ назовём локально условно полной, если $\mathcal{A}$ n-условно полна для любого натурального n. Очевидно, что $\mathcal{A}$ локально условно полна тогда и только тогда, когда $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ — наибольший элемент шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$. Также ясно, что $\mathrm{r}_{\mathrm{CT}\infty}(\mathcal{A}) = n$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{A}$ существует n-элементный блок и не существует $(n+1)$-элементных блоков. Рассмотрим ранги условной полноты для классических алгебр.

Прежде всего отметим, что в силу идемпотентности решёток ранг условной полноты любой решётки равен единице.

Для любой булевой алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ подмножество $\{0,1\}$ является 2-блоком. Отметим, что 3-блоков для булевой алгебры $\mathcal{A}$ не существует. Допустим противное: $\{a,b,c\} \subseteq A$ является 3-блоком для $\mathcal{A}$. Тогда пусть $\{a,b,c\} \subseteq \langle a \rangle_{\mathcal{A}}$. Это означает, что либо $\{0,1\} \subseteq \{a,b,c\}$, что противоречит определению 3-блока, либо $a \neq 0,1$ и $\neg a \in \{a,b,c\}$, но тогда существует φ — автоморфизм алгебры $\langle a \rangle_{\mathcal{A}}$, такой что $\varphi(a) = \neg a$, что опять же невозможно для 3-блока. Таким образом, ранг условной полноты любой булевой алгебры равен 2.

Нетрудно заметить, что ранг условной полноты любой группы $\mathcal{A} = \langle A; \cdot, {}^{-1}, e \rangle$ равен единице. Действительно, допустим, что $a, b \subseteq A$ и $\{a,b\}$ — 2-блок в группе $\mathcal{A}$. Тогда $\{a,b\} \subseteq \langle a \rangle_{\mathcal{A}}$, $\{a,b\} \subseteq \langle b \rangle_{\mathcal{A}}$ и, в частности, $\langle a \rangle_{\mathcal{A}} = \langle b \rangle_{\mathcal{A}}$. Если при этом $\langle a \rangle_{\mathcal{A}}$ конечна, то существует автоморфизм φ группы $\langle a \rangle_{\mathcal{A}}$, такой что $\varphi(a) = b$, что противоречит определению 2-блока. Если же группа $\langle a \rangle_{\mathcal{A}}$ бесконечная циклическая, то равенство $\langle a \rangle_{\mathcal{A}} = \langle b \rangle_{\mathcal{A}}$ влечёт равенство $b = a^{-1}$, и тогда существует автоморфизм φ группы $\langle a \rangle_{\mathcal{A}}$, такой что $\varphi(a) = a^{-1}$, что опять же противоречит определению 2-блока. Таким образом, действительно, ранг условной полноты любой группы равен единице.

Для любого поля $\mathcal{A} = \langle A; +, \cdot \rangle$ характеристики p множество $\{1, \ldots, p-1\}$ является p-блоком, т. е. любое поле характеристики p $(p-1)$-условно полно.

Покажем, что в случае когда $\mathcal{A} = \langle A; +, \cdot \rangle$ — поле характеристики p, ранг условной полноты алгебры $\mathcal{A}$ равен $p-1$.

Действительно, пусть $F_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ — простое подполе поля $\mathcal{A}$ и $B \subseteq A$ таково, что $|B| \geqslant p$ и B — $|B|$-блок в $\mathcal{A}$. Тогда, так как $O \notin B$ и $|B| \geqslant p$, то либо $B \supseteq \{1, \ldots, p-1, a\}$, где $a \notin F_p$, либо существуют $a, b \in B$, $a \neq b$, такие что $a, b \notin F_p$. В первом случае $\langle 1 \rangle_{\mathcal{A}} \neq \langle a \rangle_{\mathcal{A}}$, что противоречит определению блока. Во втором же случае равенство $\langle a \rangle_{\mathcal{A}} = \langle b \rangle_{\mathcal{A}}$ влечёт алгебраичность элементов a и b над F_p, и тем самым алгебра $\langle a \rangle_{\mathcal{A}}$ является полем. Но тогда поля $\langle a \rangle_{\mathcal{A}}$ и $\langle b \rangle_{\mathcal{A}}$ являются простыми расширениями $F_p(a)$ и $F_p(b)$ поля F_p и их совпадение влечёт существование изоморфизма φ поля $\langle a\rangle_{\mathcal{A}} = F_p(a)$ на поле $\langle b\rangle_{\mathcal{A}} = F_p(b)$ над полем F_p, т. е. автоморфизма φ подалгебры $\langle a\rangle_{\mathcal{A}} = \langle b\rangle_{\mathcal{A}}$, такого что $\varphi(a) = b$.

Если $\mathcal{A} = \langle A; +, \cdot\rangle$ — поле характеристики 0, то пусть F_0 — его простое подполе. Легко заметить, что F_0 не содержит 2-блоков. Используя рассуждения, аналогичные приведённым выше, можно убедиться, что $\mathcal{A}$ не содержит 2-блоков. Таким образом, ранг условной полноты для полей характеристики 0 равен единице.

Аналогичным образом можно убедиться, что ранг условной полноты любого моноунара равен единице.

Наконец, пусть линейное пространство $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$ над полем F рассматривается как универсальная алгебра сигнатуры $\sigma = \langle +, \lambda\cdot \mid \lambda \in F\rangle$, где $\lambda\cdot$ — одноместные функции умножения на числа $\lambda \in F$. Легко убедиться, что ранг условной полноты $\mathcal{A}$ равен единице. Действительно, если $\{a, b\}$ — 2-блок в $\mathcal{A}$, то $\{a, b\} \subseteq \langle a\rangle_{\mathcal{A}}$, $\{a, b\} \subseteq \langle b\rangle_{\mathcal{A}}$ и, в частности, $\langle a\rangle_{\mathcal{A}} = \langle b\rangle_{\mathcal{A}}$, т. е. $b = \lambda a$ для некоторого $\lambda \in F$. Но тогда существует автоморфизм φ алгебры $\langle a\rangle_{\mathcal{A}}$, определённый как $\varphi(x) = \lambda x$, что противоречит предположению о том, что $\{a, b\}$ — 2-блок в $\mathcal{A}$.

В качестве примера локально условно полной алгебры укажем алгебру $\mathcal{A} = \langle Q; +, -, \cdot, ^{-1}\rangle$, где Q — совокупность рациональных чисел и $0^{-1} = 0$. Тем самым локально условно полным будет любое поле характеристики 0 в сигнатуре $\langle +, -, \cdot, ^{-1}\rangle$.

В заключение остановимся на вопросе взаимосвязи некоторых конструкций внутри шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$ с известными конструкциями на универсальных алгебрах.

Прежде всего напомним, что, как доказано в [7], шкалы $\langle \mathrm{CT}_n; \leqslant\rangle$ при $n \geqslant 3$ и шкала $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$ не являются ни верхними, ни нижними полурешётками. Шкала $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$ также не является ни нижней, ни верхней полурешёткой. В то же время объединение любых двух слабых идеалов любого частично упорядоченного множества $\langle A; \leqslant\rangle$, хотя бы один из которых бесконечен, является бесконечным слабым идеалом этого частично упорядоченного множества. Тем самым для любых $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}} \in \mathrm{CT}_\infty$, $\bar{\mathcal{B}}^{\mathrm{loc}} \in \mathrm{CT}_\infty \setminus \mathrm{CT}$ в шкале $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$ существует $\sup(\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}, \bar{\mathcal{B}}^{\mathrm{loc}})$.

Несколько иная ситуация имеет место для инфимумов. Если $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}, \bar{\mathcal{B}}^{\mathrm{loc}} \in \mathrm{CT}_\infty \setminus \mathrm{CT}$, то точка шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$, соответствующая слабому идеалу $\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{CT}} \cap \bar{\mathcal{B}}_{\mathrm{CT}}$ шкалы $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$, будет, очевидным образом, инфимумом точек $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ и $\bar{\mathcal{B}}^{\mathrm{loc}}$ в шкале $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$. Покажем, что существуют точки $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}} \in \mathrm{CT}_\infty \setminus \mathrm{CT}$ и $\bar{\mathcal{B}} \in \mathrm{CT}$, не имеющие инфимума в шкале $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant\rangle$. Пусть $\mathcal{A}' = \langle n; \sigma_1\rangle$ и $\mathcal{A}'' = \langle n; \sigma_2\rangle$ — пара n-элементных алгебр, таких что точки $\bar{\mathcal{A}}'$ и $\bar{\mathcal{A}}''$ несравнимы в шкале $\langle \mathrm{CT}_n; \leqslant\rangle$, а алгебра $\mathcal{A}''' = \langle n, \sigma\rangle$ такова, что $\mathrm{CT}(\mathcal{A}''') = \mathrm{CT}(\mathcal{A}') \cup \mathrm{CT}(\mathcal{A}'')$. Совокупность

$$I = \{\bar{\mathcal{B}} \in \mathrm{CT} \mid \bar{\mathcal{B}} \leqslant \bar{\mathcal{A}}',\ \text{либо } \bar{\mathcal{B}} \leqslant \bar{\mathcal{A}}'',\ \text{либо } \bar{\mathcal{B}} = \bar{O}_m,\ \text{где } m > n\}$$

является бесконечным слабым идеалом шкалы $\langle \mathrm{CT}; \leqslant\rangle$, и пусть алгебра $\mathcal{B}$ такова, что $\bar{\mathcal{B}}_{\mathrm{CT}} = I$. Тогда легко убедиться, что несравнимые точки $\bar{\mathcal{A}}'$ и $\bar{\mathcal{A}}''$

шкалы $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$ являются максимальными среди нижних граней точек $\bar{\mathcal{A}}'''$ и $\bar{\mathcal{B}}^{\mathrm{loc}}$ в шкале $\langle \mathrm{CT}_\infty; \leqslant \rangle$, т. е. точки $\bar{\mathcal{A}}'''$ и $\bar{\mathcal{B}}^{\mathrm{loc}}$ не имеют инфимума в этой шкале.

Для любой совокупности A_i $(i \in I)$ подмножеств множества A и любого ультрафильтра $\mathcal{D}$ на множестве I через $\bigcap\limits_{\mathcal{D}} A_i$ будем обозначать множество

$$\{a \in A \mid \{i \in I \mid a \in A_i\} \in \mathcal{D}\}$$

(*пересечение* A_i $(i \in I)$ *по ультрафильтру* $\mathcal{D}$).

Для любой совокупности алгебр $\mathcal{A}_i = \langle A_i; \sigma_i \rangle$ через $\prod\limits_{i \in I}^{*} \mathcal{A}_i$ обозначим далее алгебру $\Big\langle \prod\limits_{i \in I} A_i; \sigma \Big\rangle$, где сигнатура σ состоит из всех возможных последовательностей $\langle t_i(x_1, \ldots, x_1) \mid i \in I \rangle$ условных термов $t_i(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатур σ_i соответственно. Если $t(x_1, \ldots, x_n) = \langle t_i(x_1, \ldots, x_n) \mid i \in I \rangle \in \sigma$ и $b_1, \ldots, b_n \in \prod\limits_{i \in I} A_i$, то

$$t_{\prod^*_{i \in I} \mathcal{A}_i}(b_1, \ldots, b_n)(i) = t_{i \mathcal{A}_i}\big(b_1(i), \ldots, b_n(i)\big)$$

для любого $i \in I$. Здесь $t_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_n)$ — значение соответствующей термальной (условно термальной) функции в алгебре $\mathcal{B}$ на элементах $c_1, \ldots, c_n$ последней. Алгебру $\prod\limits_{i \in I}^{*} \mathcal{A}_i$ будем называть CT-*неиндексным произведением алгебр* $\mathcal{A}_i$ (по аналогии с известным понятием неиндексного произведения алгебр).

Традиционным образом определяется множество $\prod\limits_{i \in I} A_i / \mathcal{D}$ для любого ультрафильтра $\mathcal{D}$ на I. На этом множестве с помощью естественного отображения φ множества $\prod\limits_{i \in I} A_i$ на $\prod\limits_{i \in I} A_i / \mathcal{D}$ определяются σ-функции так, что φ становится гомоморфизмом алгебры $\prod\limits_{i \in I}^{*} \mathcal{A}_i$ на алгебру $\prod\limits_{i \in I}^{*} \mathcal{A}_i / \mathcal{D} = \Big\langle \prod\limits_{i \in I} A_i / \mathcal{D}; \sigma \Big\rangle$. Эту последнюю алгебру будем называть далее CT-*неиндексным ультрапроизведением алгебр* $\mathcal{A}_i$ $(i \in I)$ *по ультрафильтру* $\mathcal{D}$.

Покажем теперь, что для любых алгебр $\mathcal{A}_i = \langle A_i; \sigma_i \rangle$ $(i \in I)$ и любого ультрафильтра $\mathcal{D}$ на I имеет место следующий результат.

Теорема 4. $\Big(\prod\limits_{i \in I}^{*} \mathcal{A}_i / \mathcal{D} \Big)_{\mathrm{CT}} = \bigcap\limits_{\mathcal{D}} (\bar{\mathcal{A}}_i)_{\mathrm{CT}}$.

Доказательство. Индукцией по определению условного терма можно показать, что условно термальные функции алгебры $\prod\limits_{i \in I}^{*} \mathcal{A}_i / \mathcal{D}$ — это сигнатурные функции этой алгебры.

Таким образом, если $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$ — m-элементное подмножество в $\prod\limits_{i \in I} A_i / \mathcal{D}$, то найдётся $D(G) \subseteq I$, входящее в $\mathcal{D}$, такое что для любого $i \in D(G)$ множества $G(i) = \{g_1(i), \ldots, g_m(i)\}$ m-элементны. Если $h(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая условно термальная функция алгебры $\prod\limits_{i \in I}^{*} \mathcal{A}_i / \mathcal{D}$, такая что для $b_1, \ldots, b_n \in G$ выполняется $h(b_1, \ldots, b_n) \in G$, то существуют (поскольку условно термальные функции алгебры $\prod\limits_{i \in I}^{*} \mathcal{A}_i / \mathcal{D}$ — это сигнатурные функции этой алгебры) условно термальные функции $h_i(x_1, \ldots, x_n)$ алгебр $\mathcal{A}_i$, такие что для $b_1, \ldots, b_n \in G$ и $i \in D(G)$ справедливо равенство $h(b_1, \ldots, b_n)(i) = h_i\bigl(b_1(i), \ldots, b_n(i)\bigr)$.

Таким образом, если π_i $(i \in D(G))$ — биекции множества G на множества $G(i)$ соответствующие проекциям множества $\prod\limits_{i\in I} A_i/\mathcal{D}$ на A_i, то

$$\pi_i h\bigl(\pi^{-1}(x_1), \ldots, \pi^{-1}(x_n)\bigr) = h_i(x_1, \ldots, x_n),$$

т. е. для $i \in D(G)$

$$\pi_i \mathrm{CT}_G\biggl(\prod_{i\in I}{}^{*} \mathcal{A}_i/\mathcal{D}) \restriction G\biggr)\pi_i^{-1} \subseteq \bigcap_{i\in D(G)} \mathrm{CT}_{G(i)}(\mathcal{A}_i) \restriction G(i).$$

Обратное включение очевидно по определению функций сигнатуры σ на алгебре $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}\mathcal{A}_i/\mathcal{D}$, что и доказывает теорему. □

Литература

[1] Пинус А. Г. Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность // Алгебра и логика. — 1998. — Т. 37, № 4. — С. 432—459.

[2] Пинус А. Г. Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 4. — С. 35—72.

[3] Пинус А. Г. Универсальные алгебры и идеалы шкалы потенциалов вычислимости всех конечных алгебр // Вестн. НГУ. — 2007. — Т. 7, № 2. — С. 93—99.

[4] Пинус А. Г. Шкала потенциалов вычислимости всех конечных алгебр // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 3. — С. 668—673.

[5] Пинус А. Г. Автоморфизмы, формульные отношения и покрытия элементов шкалы потенциалов вычислимости всех конечных алгебр // Алгебра и логика. — 2008. — Т. 47, № 4. — С. 464—474.

[6] Пинус А. Г. Об элементарной теории шкалы потенциалов вычислимости всех конечных алгебр. — В печати.

[7] Пинус А. Г., Журков С. В. О шкалах потенциалов вычислимости универсальных алгебр // Вычислительные системы. — 2002. — Т. 169. — С. 26—38.

[8] Пинус А. Г., Журков С. В. Шкалы потенциалов вычислимости конечных алгебр: результаты и проблемы // Фундамент. и прикл. мат. — 2003. — Т. 9, № 3. — С. 145—164.