Нумерующие функции неотрицательных целочисленных координат L-мерных векторов

С. Л. ЧЕРНЫШЁВ
Российский государственный социальный университет
e-mail: nature@front.ru

УДК 512.8

Ключевые слова: канторовская нумерующая функция, взаимно-однозначное отображение, кортеж, фигурное число.

Аннотация

Нумерующая функция $C^L(X_1, \ldots, X_L)$, взаимно-однозначно отображающая кортеж длины L неотрицательных целых чисел в неотрицательное целое число $Z = C^L(X_1, \ldots, X_L)$, представлена в виде суммы L фигурных чисел.

Abstract

S. L. Chernyshev, Enumerating functions for nonnegative integer coordinates of L-dimensional vectors, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 1, pp. 147—155.

The enumerating function $C^L(X_1, \ldots, X_L)$, which bijectively maps tuples of length L of nonnegative integers to nonnegative integers $Z = C^L(X_1, \ldots, X_L)$, is represented as a sum of L figurate numbers.

1. Канторовская нумерующая функция

Взаимно-однозначное отображение вектора (x, y), где x, y — неотрицательные целые числа, в неотрицательное целое число Z задаётся канторовской нумерующей функцией [1]. При этом вектор $(0, 0)$ отображается в число 0, а вектор $(0, 1)$ — в число 1. Канторовскую нумерующую функцию с учётом переобозначения осей координат $x \to X_2$, $y \to X_1$ определим в виде

$$C^2(X_1, X_2) = \frac{(X_1 + X_2)^2 + X_1 + 3X_2}{2}. \tag{1}$$

Здесь вектор $(0, 0)$ отображается в число 0, а вектор $(1, 0)$ — в число 1. Согласно [1, 2], выражение (1) может быть обобщено на случай взаимно-однозначного отображения неотрицательных целых координат L-мерного вектора в неотрицательное целое число Z.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 1, с. 147—155.

В данной статье показано, что канторовская нумерующая функция может быть представлена с помощью фигурных чисел, первоначальные сведения о которых приведены в [3]. Обобщение выражения (1), представленного в виде суммы двух фигурных чисел, позволяет получить в явном виде выражения, которые тройке неотрицательных чисел, т. е. кортежу (X_1, X_2, X_3), ставят во взаимно-однозначное соответствие число $Z = C^3(X_1, X_2, X_3)$, четвёрке неотрицательных целых чисел, т. е. кортежу (X_1, X_2, X_3, X_4), — число $Z = C^4(X_1, X_2, X_3, X_4)$ и т. д. Таким образом, могут быть установлены взаимно-однозначные соответствия между определёнными $L1$-мерными и $L2$-мерными векторами с неотрицательными целыми координатами, где $L1$ и $L2$ — натуральные числа, $L1 > 1$, $L2 > L1$.

2. Нумерующие функции в виде сумм треугольных чисел

Определение 1. Фигурное число $\Phi_L^M(N)$ — целый неотрицательный образ трёхмерного неотрицательного целочисленного вектора (L, M, N) — задаётся соотношениями [5, 6]

$$\Phi_{L+1}^M(N) = \sum_{i=0}^{i=N} \Phi_L^M(i),$$

$$\Phi_L^M(0) = 0, \quad \Phi_L^M(1) = 1, \quad \Phi_0^M(N) = M + 1 \ \text{ при } \ N > 1.$$

Здесь $L = 0, 1, 2, \ldots$, $M = 0, 1, 2, \ldots$, $N = 0, 1, 2, \ldots$. Параметры L и M указаны в виде индексов в обозначении фигурного числа. Для неотрицательных целых значений L, N и M при тех же начальных и граничных условиях фигурное число может быть определено рекуррентным соотношением

$$\Phi_{L+1}^M(N+1) = \Phi_L^M(N+1) + \Phi_{L+1}^M(N). \qquad (2)$$

Фигурное число $\Phi_L^M(N)$ состоит из $\Phi_L^M(N)$ единиц (точек). Отметим, что значению $L = 1$ соответствуют фигурные числа на прямой (евклидово пространство размерности 1), значению $L = 2$ — фигурные числа на плоскости, значению $L = 3$ — фигурные числа в трёхмерном пространстве и т. д. Значение $M = 0$ соответствует треугольным числам, $M = 1$ — четырёхугольным, $M = 2$ — пятиугольным и т. д. Параметр N определяет номер этапа построения фигурного числа.

Определение 2. Фигурное число $\Phi_{L-1}^M(N)$, где $L > 1$, будем называть N-м слоем фигурного числа $\Phi_L^M(N)$. Согласно определению 1 нулевой слой фигурного числа не содержит ни одной точки. Фигурное число $\Phi_{L-2}^M(N)$, где $L > 2$, будем называть N-м слоем фигурного числа $\Phi_{L-1}^M(N)$ или подслоем фигурного числа $\Phi_L^M(N)$.

Таким образом, фигурное число $\Phi_L^M(N)$ состоит из N слоёв. Например, фигурное число $\Phi_2^0(4)$ состоит из четырёх слоёв: $\Phi_1^0(1)$, $\Phi_1^0(2)$, $\Phi_1^0(3)$ и $\Phi_1^0(4)$. На

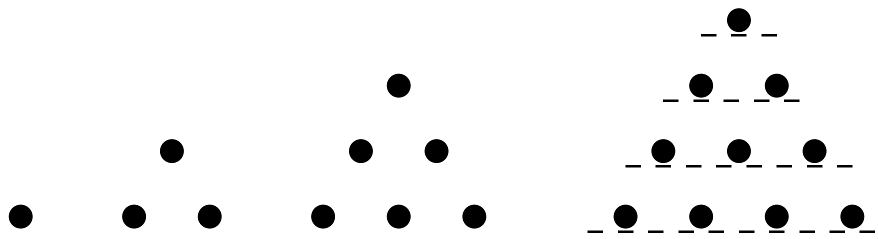

Рис. 1

рис. 1 показаны примеры треугольных чисел на плоскости ($L = 2$). Слои фигурного числа $\Phi_2^0(4)$ показаны пунктиром.

Из определения фигурного числа и рекуррентного соотношения (2) следует, что справедлива формула

$$\Phi_L^0(N) = C_{L+N-1}^{N-1}, \tag{3}$$

где C_{L+N-1}^{N-1} — биномиальный коэффициент, или число сочетаний из $L + N - 1$ элементов по $N - 1$ элементам без повторений.

Лемма 1. *Канторовская нумерующая функция $C^2(X_1, X_2)$ представляет собой сумму двух треугольных чисел*:

$$C^2(X_1, X_2) = \Phi_2^0(X_1 + X_2) + \Phi_1^0(X_2). \tag{4}$$

Доказательство. Подставляя явное выражение для треугольного числа (3) в правую часть равенства (4), для соответствующих значений L и N получаем

$$\Phi_2^0(X_1 + X_2) + \Phi_1^0(X_2) = C_{X_1+X_2+1}^{X_1+X_2-1} + C_{X_2}^{X_2-1}.$$

Учитывая, что $C_{X_1+X_2+1}^{X_1+X_2-1} = (X_1+X_2+1)(X_1+X_2)/2$ и $C_{X_2}^{X_2-1} = X_2$, убеждаемся в тождественности выражений $\big((X_1 + X_2)^2 + X_1 + 3X_2\big)/2$ и $\Phi_2^0(X_1 + X_2) + \Phi_1^0(X_2)$. □

Лемма 2. *Каждой единице* (*точке*) *слоя N фигурного числа $\Phi_L^0(N)$ соответствует один и только один набор* (*кортеж*) *значений неотрицательных целых координат $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_L)$, удовлетворяющий условию*

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_L = N - 1.$$

Доказательство. Фигурное число $\Phi_L^0(N)$ согласно (3) равно числу $V_{L+1}(N-1)$ сочетаний из $N - 1$ элементов по $L + 1$ элементам с повторениями. Значение $V_{L+1}(N - 1)$ — это число решений в неотрицательных целых числах уравнения $X_1 + X_2 + \ldots + X_L + X_{L+1} = N - 1$, где $X_i \geqslant 0$, т. е. оно равно числу разбиений $N-1$ на $L+1$ слагаемых [4]. Следовательно, слой N фигурного числа $\Phi_L^0(N)$ представляет собой число точек, равное числу разбиений $N - 1$ на L слагаемых.

Таким образом, каждой точке фигурного числа Φ^0_{L-1} взаимно-однозначно соответствует кортеж $(X_1, X_2, \ldots, X_L)$, такой что $X_1+X_2+\ldots+X_L = N-1$. $\square$

Лемма 3. *Неотрицательному целому числу Z взаимно-однозначно соответствует кортеж (X_1, X_2), где X_1, X_2 — неотрицательные целые числа, если выполнено условие $Z = \Phi^0_2(X_1 + X_2) + \Phi^0_1(X_2)$. При этом числу 0 соответствует кортеж $(0,0)$, а числу 1 — кортеж $(1,0)$.*

Доказательство. Предположим, что заданному кортежу (X_1, X_2) соответствуют два различных числа Z_1 и Z_2. Поскольку

$$\Phi^0_2(X_1 + X_2) + \Phi^0_1(X_2) - \big(\Phi^0_2(X_1 + X_2) + \Phi^0_1(X_2)\big) = 0,$$

то данное предположение противоречит условию $Z_1 \neq Z_2$.

Предположим также, что заданному числу Z соответствуют два различных кортежа (X_{11}, X_{21}) и (X_{12}, X_{22}). По заданному Z найдём кортеж, удовлетворяющий условию леммы, и покажем, что этот кортеж единственный, т. е. $X_{11} = X_{12}$ и $X_{21} = X_{22}$.

Из определения фигурного числа следует, что $\Phi^0_2(X_1 + X_2)$ — монотонно возрастающая функция аргумента $X_1 + X_2$. Следовательно, единственное значение суммы $S_2 = X_{10} + X_{20}$ определяем из неравенств

$$\Phi^0_2(S_2) \leqslant Z < \Phi^0_2(S_2 + 1).$$

Если $\Phi^0_2(S_2) = Z$, то $S_2 = X_{10}$. При этом искомый кортеж $(S_2, 0)$ — это единственный кортеж, удовлетворяющий условию $Z = \Phi^0_2(S_2) + \Phi^0_1(X_{20})$. Действительно, равенство $\Phi^0_1(X_{20}) = 0$ означает, что $X_{20} = X_{21} = X_{22} = 0$, а уравнение $\Phi^0_2(X_{10}) = X_{10}(X_{10} + 1)/2 = Z$ имеет единственное неотрицательное целое решение $S_2 = X_{10} = X_{11} = X_{21}$.

Рассмотрим неравенства

$$\Phi^0_1(X_2) \leqslant Z - \Phi^0_2(S_2) < \Phi^0_1(X_2 + 1).$$

С учётом того что $\Phi^0_1(X_2) = X_2$, находим единственное число $X_{20} = X_{21} = X_{22}$, удовлетворяющее равенству $X_{20} = Z - \Phi^0_2(S_2)$. Тогда искомый кортеж (X_{10}, X_{20}) удовлетворяет условию леммы 3. Этот кортеж единственный, поскольку при единственных значениях S_2 и X_{20} искомое значение X_1 также единственно: $X_{10} = S_2 - X_{20} = X_{11} = X_{12}$. $\square$

Неотрицательное целое Z будем называть номером кортежа (X_{10}, X_{20}). При этом число 1 взаимно-однозначно соответствует кортежу $(1,0)$.

Пример. Найдём кортеж (X_1, X_2), где X_1, X_2 — неотрицательные целые числа, взаимно-однозначно соответствующие натуральному числу $Z = 24$. Рассматривая неравенства

$$\Phi^0_2(X_1 + X_2) \leqslant 24 < \Phi^0_2(X_1 + X_2 + 1),$$

находим единственное решение в виде $S_2 = X_{10} + X_{20} = 6$. С учётом того что $\Phi^0_2(6) = 21$ и $Z - 21 = 3$, рассматривая неравенства

$$\Phi^0_1(X_2) \leqslant 3 < \Phi^0_1(X_2 + 1),$$

находим единственное значение $X_{20} = 3$, удовлетворяющее этим неравенствам. Таким образом, искомый кортеж — $(3,3)$. Подставляя значения $X_1 = 3$ и $X_2 = 3$ в выражение (1), получаем число $Z = 24$, представляющее собой номер кортежа $(3,3)$.

Теорема 1. *Неотрицательному целому числу Z взаимно-однозначно соответствует кортеж $(X_1, X_2, \ldots, X_L)$, где $X_1, X_2, \ldots, X_L$ — неотрицательные целые числа, при выполнении условия*

$$Z = C^L(X_1, X_2, \ldots, X_L) = \\ = \Phi_L^0(X_1 + X_2 + \ldots + X_L) + \Phi_{L-1}^0(X_2 + \ldots + X_L) + \ldots + \Phi_1^0(X_L). \quad (5)$$

При этом числу 0 соответствует кортеж $(0,0,\ldots,0)$, а натуральные числа от 1 до L взаимно-однозначно соответствуют L кортежам длины L $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1)$.

Доказательство. Предположим, что заданному кортежу $(X_1, X_2, \ldots, X_L)$ соответствуют два различных числа Z_1 и Z_2. Поскольку

$$\Phi_L^0(X_1 + X_2 + \ldots + X_L) + \Phi_{L-1}^0(X_2 + \ldots + X_L) + \ldots + \Phi_1^0(X_L) - \\ - \big(\Phi_L^0(X_1 + X_2 + \ldots + X_L) + \Phi_{L-1}^0(X_2 + \ldots + X_L) + \ldots + \Phi_1^0(X_L)\big) = 0,$$

то данное предположение противоречит условию $Z_1 \neq Z_2$.

Предположим также, что заданному числу Z соответствуют два различных кортежа $(X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{L1})$ и $(X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{L2})$. По заданному Z найдём кортеж, удовлетворяющий условию теоремы, и покажем, что этот кортеж единственный, т. е. $X_{11} = X_{12}, X_{21} = X_{22}, \ldots, X_{L1} = X_{L2}$.

Расположим кортежи $(X_1, X_2, \ldots, X_L)$ длины L по столбцам таким образом, чтобы в столбец под номером S_L попали все кортежи, у которых $S_L = X_1 + X_2 + \ldots + X_L$, где $S_L = 0, 1, 2, \ldots$, и только такие кортежи. В столбце под номером S_L число кортежей равно $\Phi_{L-1}^0(S_L + 1)$, а номер первого кортежа равен $\Phi_L^0(S_L)$. S_L-й столбец кортежей соответствует слою $S_L + 1$ фигурного числа $\Phi_L^0(S_L + 1)$. Согласно лемме 2 в данном случае в столбце с номером S_L собраны все кортежи, для которых $S_L = X_1 + X_2 + \ldots + X_L$, и только такие кортежи. Поэтому если в определённом столбце будет установлен номер кортежа Z, удовлетворяющий условию теоремы, то по построению это единственный кортеж с заданной суммой S_L. Данное построение для случая $L = 3$ иллюстрирует рис. 2.

Поскольку функция $\Phi_L^0(S_L)$ монотонно возрастает по аргументу S_L, рассмотрим неравенства

$$\Phi_L^0(S_L) < Z < \Phi_L^0(S_L + 1)$$

и найдём единственное значение

$$S_{L0} = X_{10} + X_{20} + \ldots + X_{L0},$$

которое им удовлетворяет. Если $\Phi_L^0(S_{L0}) = Z$, то $X_{10} = S_{10}$, $X_{20} = \ldots = X_{L0} = 0$. Тогда $(S_{L0}, 0, \ldots, 0)$ — кортеж с номером $\Phi_L^0(S_{L0})$, расположенный

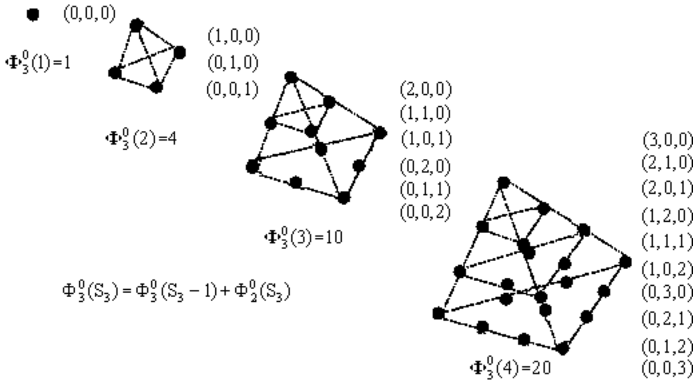

Рис. 2

в столбце с номером S_{L0}. Это единственный кортеж, удовлетворяющий условию

$$Z = \Phi_L^0(X_{10} + X_{20} + \ldots + X_{L0}) + \Phi_{L-1}^0(X_{20} + \ldots + X_{L0}) + \ldots + \Phi_1^0(X_{L0}) = 0,$$

так как только при $X_{20} = 0, \ldots, X_{L0} = 0$ справедливы равенства

$$\Phi_{L-1}^0(X_{20} + \ldots + X_{L0}) = 0, \ldots, \ \Phi_1^0(X_{L0}) = 0.$$

Если выполнены неравенства

$$\Phi_L^0(S_{L0}) < Z < \Phi_L^0(S_{L0} + 1),$$

то поиск требуемого кортежа продолжим в столбце кортежей с номером S_{L0}, т. е. в слое с номером $S_{L0} + 1$ фигурного числа. Рассмотрим неравенства

$$\Phi_{L-1}^0(S_L - X_1) \leqslant Z - \Phi_L^0(S_{L0}) < \Phi_{L-1}^0(S_L - X_1 + 1).$$

Если выполнено равенство

$$\Phi_{L-1}^0(S_L - X_1) = Z - \Phi_L^0(S_{L0}),$$

то находим единственное значение

$$S_{L-1} = S_{L0} - X_{10} = X_{20} + \ldots + X_{L0}.$$

В этом случае искомый кортеж имеет вид $(S_{L0} - S_{L-1}, S_{L-1}, 0, \ldots, 0)$. Это единственный кортеж, удовлетворяющий условию

$$Z = \Phi_L^0(X_{10} + X_{20} + \ldots + X_{L0}) + \Phi_{L-1}^0(X_{20} + \ldots + X_{L0}) + \ldots + \Phi_1^0(X_{L0}),$$

так как только при $X_{30} = 0, \ldots, X_{L0} = 0$ справедливы равенства

$$\Phi_{L-2}^0(X_{30} + \ldots + X_{L0}) = 0, \ldots, \ \Phi_1^0(X_{L0}) = 0.$$

Если справедливы неравенства

$$\Phi_{L-1}^0(S_L - X_1) < Z - \Phi_L^0(S_L) < \Phi_{L-1}^0(S_L - X_1 + 1),$$

то находим единственное значение $S_{L-1} = S_{L0} - X_{10}$, определяющее подслой фигурного числа. Теперь можно отыскать единственное значение X_{10} по известным значениям S_{L0} и S_{L-1}.

Далее продолжаем движение по столбцу, переходя к подслою фигурного числа. Рассмотрим неравенства

$$\Phi^0_{L-i}(S_L - X_1 - \ldots - X_i) \leqslant Z - \Phi^0_L(S_{L0}) - \Phi^0_{L-1}(S_{L-1}) - \ldots - \Phi_{L-i+1}(S_{L-i+1}) < \\ < \Phi^0_{L-i}(S_L - X_1 - \ldots - X_i + 1).$$

Если выполнено равенство

$$\Phi^0_{L-i}(S_L - X_1 - \ldots - X_i) = Z - \Phi^0_L(S_{L0} - \Phi^0_{L-1}(S_{L-1}) - \ldots - \Phi^0_{L-i+1}(S_{L-i+1}),$$

то находим единственное значение

$$S_{L-i} = S_{L0} - X_{10} - \ldots - X_{i0} = X_{i+10} + \ldots + X_{L0}.$$

Искомый кортеж имеет вид $(S_{L0} - S_{L-1}, \ldots, S_{L-i+1} - S_{L-i}, S_{L-i}, 0, \ldots, 0)$.

Если справедливы неравенства

$$\Phi^0_{L-i}(S_L - X_1 - \ldots - X_i) < Z - \Phi^0_L(S_{L0}) - \Phi^0_{L-1}(S_{L-1}) - \ldots - \Phi^0_{L-i+1}(S_{L-i+1}) < \\ < \Phi^0_{L-i}(S_L - X_1 - \ldots - X_i + 1),$$

то находим единственное значение $S_{L-i} = S_{L0} - X_{10} - \ldots - X_{i0}$, определяющее подслой фигурного числа и позволяющее отыскать значение X_{i0} по известным значениям S_{L-i+1} и S_{L-i}.

На заключительном этапе поиска приходим к неравенству

$$\Phi^0_1(S_L - X_1 - X_2 - \ldots - X_{L-1}) \leqslant Z - \Phi^0_L(S_{L0}) - \Phi^0_{L-1}(S_{L-1}) - \ldots - \Phi^0_2(S_2) < \\ < \Phi^0_1(S_L - X_1 - X_2 - \ldots - X_{L-1} + 1).$$

Это неравенство имеет единственное решение, удовлетворяющее условию теоремы,

$$Z = \Phi^0_L(X_{10} + X_{20} + \ldots + X_{L_0}) + \Phi^0_{L-1}(X_{20} + \ldots + X_{L0}) + \ldots + \Phi^0_1(X_{L0}),$$

поскольку

$$\Phi^0_1(S_{L0} - X_{10} - X_{20} - \ldots - X_{(L-1)0}) = \Phi^0_1(X_{L0}) = X_{L0}.$$

Таким образом, на заключительном этапе поиска находим единственное значение X_{L0}. Нумерующая функция $C^L(X_1, X_2, \ldots, X_L)$ с учётом выражения (3) определяется следующим образом:

$$C^L(X_1, X_2, \ldots, X_L) = C^{X_1+X_2+\ldots+X_i-1}_{X_1+X_2+\ldots+X_i+L-1} + C^{X_2+\ldots+X_L-1}_{X_2+\ldots+X_L+L-2} + \ldots + C^{X_L-1}_{X_L}.$$

Теорема доказана. □

3. Явные выражения для нумерующих функций

Следствие 1. *Кортеж* $(X_{10}, X_{20}, \ldots, X_{L0})$*, удовлетворяющий условию* (5) *теоремы, имеет вид*

$$(S_{L0} - S_{L-1}, S_{L-1} - S_{L-2}, \ldots, S_{L-i+1} - S_{L-i}, \ldots, S_2 - S_{10}, S_{10}),$$

где

$$S_{L0} = X_{10} + X_{20} + \ldots + X_{L0}, \quad S_{Li} = X_{i+10} + \ldots + X_{L0}, \quad S_{10} = X_{L0}.$$

Следствие 2. *Нумерующая функция* $C^3(X_1, X_2, X_3)$*, определяющая взаимно-однозначное отображение тройки неотрицательных целых чисел, т. е. кортежа* (X_1, X_2, X_3)*, в неотрицательное целое число* Z*, представляет собой сумму трёх фигурных чисел*:

$$C^3(X_1, X_2, X_3) = \Phi_3^0(X_1 + X_2 + X_3) + \Phi_2^0(X_2 + X_3) + \Phi_1^0(X_3). \qquad (6)$$

Подставляя явное выражение для треугольного числа (3) в правую часть равенства (6), для соответствующих значений L и N получаем

$$C^3(X_1, X_2, X_3) = C_{X_1+X_2+X_3+2}^{X_1+X_2+X_3-1} + C_{X_2+X_3+1}^{X_2+X_3-1} + C_{X_3}^{X_3-1}.$$

Выписывая выражения для сочетаний в явном виде, получаем формулу

$$C^3(X_1, X_2, X_3) = \\ = \frac{(X_1 + X_2 + X_3)^3 + 3(X_1 + X_2 + X_3)^2 + 3(X_2 + X_3)^2 + 2X_1 + 5X_2 + 11X_3}{6}. \qquad (7)$$

Следствие 3. *Нумерующая функция* $C^4(X_1, X_2, X_3, X_4)$*, определяющая взаимно-однозначное отображение четвёрки неотрицательных целых чисел, т. е. кортежа* (X_1, X_2, X_3, X_4)*, в неотрицательное целое число* Z*, представляет собой сумму четырёх фигурных чисел*:

$$C^4(X_1, X_2, X_3, X_4) = \\ = \Phi_4^0(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + \Phi_3^0(X_2 + X_3 + X_4) + \Phi_2^0(X_3 + X_4) + \Phi_1^0(X_4). \qquad (8)$$

Функцию $C^4(X_1, X_2, X_3, X_4)$ *с учётом* (3) *можно определить следующим образом*:

$$C^4(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{1}{24}\big((X_1 + X_2 + X_3 + X_4)^4 + \\ + 6(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)^3 + 4(X_2 + X_3 + X_4)^3 + 11(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)^2 + \\ + 12(X_2 + X_3 + X_4)^2 + 12(X_3 + X_4)^2 + 6X_1 + 14X_2 + 26X_3 + 50X_4\big). \qquad (9)$$

Результаты взаимно-однозначного отображения координат вершин трёхмерного куба в одном, двух и четырёх измерениях представлены в табл. 1.

Буквами A, B, C, D в таблице отмечены вершины трёхмерного куба, суммы координат которых соответственно равны 0, 1, 2, 3.

Таблица 1

Обозначение вершин	Виды пространств			
	X_1	(X_1, X_2)	(X_1, X_2, X_3)	(X_1, X_2, X_3, X_4)
A1	0	(0,0)	(0,0,0)	(0,0,0,0)
B1	1	(1,0)	(1,0,0)	(1,0,0,0)
B2	2	(0,1)	(0,1,0)	(0,1,0,0)
B3	3	(2,0)	(0,0,1)	(0,0,1,0)
C1	5	(0,2)	(1,1,0)	(2,0,0,0)
C2	6	(3,0)	(1,0,1)	(1,1,0,0)
C3	8	(1,2)	(0,1,1)	(1,0,0,1)
D1	14	(0,4)	(1,1,1)	(0,0,0,2)

Отметим, что выражения (1), (7) и (9) позволяют представить единственное взаимно-однозначное отображение только в том случае, когда все оси координат жёстко закреплены.

С учётом переобозначения осей координат получаем $L!$ различных нумерующих функций $C^L(X_1, \ldots, X_L)$. Для закрепления осей координат и получения единственного взаимно-однозначного отображения потребуется $L + 1$ точка, включая начало координат, т. е. первые два столбца кортежей с суммой координат, равной нулю и равной единице, соответствующие неотрицательным целым числам $0, 1, 2, \ldots, L$.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность В. Н. Латышеву и Ю. В. Попову за обсуждение результатов работы.

Литература

[1] Ершов Ю. Л. Теория нумераций. — М.: Наука, 1977.

[2] Ершов Ю. Л., Гончаров С. С. Конструктивные модели. — Новосибирск, 1999.

[3] Математический энциклопедический словарь / Под ред. Ю. В. Прохорова. — М.: Советская энциклопедия, 1988.

[4] Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1982.

[5] Чернышёв С. Л. Описание последовательной процедуры принятия решений с помощью комбинаторных чисел // Надёжность и качество: Труды международного симпозиума / Под ред. Н. К. Юркова. — Пенза: Изд-во Пензенского гос. ун.-та, 2004.

[6] Чернышёв С. Л., Чернышёв Л. С. Квантовый анализ результатов измерений // Измерительная техника. — 2006. — № 12. — С. 3.