Специальные классы l-колец

Н. Е. ШАВГУЛИДЗЕ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: nathalia_s@mail.ru

УДК 512.555.4

Ключевые слова: решёточно упорядоченное кольцо, l-первичный правый l-идеал, l-полупервичный правый l-идеал, радикал l-кольца, специальный класс l-колец, специальный радикал, первичный радикал l-кольца, класс l-колец без положительных делителей нуля, вполне l-первичный правый l-идеал.

Аннотация

В работе изучаются специальные классы решёточно упорядоченных колец и специальные радикалы. Специальный радикал представляется в виде пересечения правых l-первичных l-идеалов, таких что фактор-кольцо по наибольшему l-идеалу, содержащемуся в данном правом l-идеале, принадлежит специальному классу. Первичный радикал l-кольца представляется в виде пересечения всех правых l-полупервичных l-идеалов. Вводится понятие вполне l-первичного правого l-идеала и доказывается, что специальный радикал l-кольца $N_3(R)$, определяемый классом всех l-колец без положительных делителей нуля, представляется в виде пересечения всех правых вполне l-первичных l-идеалов l-кольца R.

Abstract

N. E. Shavgulidze, Special classes of l-rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 1, pp. 157—173.

We study a special class of lattice-ordered rings and a special radical. We prove that a special radical of an l-ring is equal to the intersection of the right l-prime l-ideals for each of which the following condition holds: the quotient l-ring by the maximal l-ideal contained in a given right l-ideal belongs to the special class. The prime radical of an l-ring is equal to the intersection of the right l-semiprime l-ideals. We introduce the notion of a completely l-prime l-ideal. We prove that $N_3(R)$ is equal to the intersection of the completely l-prime, right l-ideals of an l-ring R, where $N_3(R)$ is the special radical of the l-ring R defined by the class of l-rings without positive divisors of zero.

В [8] были введены понятия l-первичного l-идеала и l-полупервичного l-идеала и понятие радикала l-колец; в [9] были введены понятия специального класса l-колец и специального радикала. В [1] были введены понятия специального класса колец и специального радикала и было доказано, что класс колец, гомоморфно не отображающихся на кольца, принадлежащие специальному классу, является радикальным, специальный радикал представляется в виде пересечения идеалов, фактор-кольца по которым принадлежат специальному классу.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 1, с. 157—173.

В [9] было введено понятие первичного радикала $N_1(R)$ l-кольца R, равного пересечению всех l-первичных l-идеалов l-кольца R. Было доказано, что класс l-колец без положительных делителей нуля N_3 является специальным. В [4] изучался первичный радикал l-кольца, было дано определение строго l-нильпотентного элемента и было доказано, что первичный радикал $N_1(R)$ совпадает с множеством всех строго l-нильпотентных элементов l-кольца R.

В данной работе изучаются специальные классы l-колец и специальные радикалы. В разделе 2 доказывается, что класс l-колец, гомоморфно не отображающихся на l-кольца, принадлежащие специальному классу, является радикальным (теорема 2); специальный радикал является наследственным и представляется в виде пересечения l-идеалов, фактор-кольца по которым принадлежат специальному классу (теорема 3), а также представляется в виде пересечения правых l-первичных l-идеалов, таких что фактор-кольцо по наибольшему l-идеалу, содержащемуся в данном правом l-идеале, принадлежит специальному классу (теорема 5). Доказывается лемма Т. Андерсона, Н. Дивинского и А. Сулинского для специальных радикалов l-колец (о том, что специальный радикал l-идеала l-кольца R сам является l-идеалом l-кольца R).

В разделах 3, 4 рассматриваются примеры специальных классов l-колец: класс всех l-первичных l-колец и класс всех l-колец без положительных делителей нуля и соответствующие им специальные радикалы. В разделе 3 первичный радикал l-кольца представляется в виде пересечения всех правых l-полупервичных l-идеалов (теорема 8). В разделе 4 вводится определение вполне l-первичного l-идеала. Специальный радикал l-кольца $N_3(R)$, определяемый классом всех l-колец без положительных делителей нуля, представляется в виде пересечения всех правых вполне l-первичных l-идеалов l-кольца R (теорема 9).

1. Введение

В работе все кольца предполагаются ассоциативными, не обязательно с единицей. Терминология и обозначения аналогичны терминологии из [3,5]. Там же можно получить необходимые сведения об l-кольцах. Приведём здесь некоторые определения и факты.

Пусть R — ассоциативное решёточно упорядоченное кольцо (l-кольцо). Обозначим

$$R_+ = \{r \in R \mid r \geqslant 0\}, \quad |r| = r \vee 0 - r \wedge 0.$$

Для любых $a, b \in R$ выполняются неравенства

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|, \quad |ab| \leqslant |a|\,|b|.$$

(Правый) идеал I l-кольца R называется (правым) l-идеалом, если из $a \in I$, $x \in R$, $|x| \leqslant |a|$ следует, что $x \in I$. То, что I является (правым) l-идеалом l-кольца R, мы будем обозначать $I \lhd R$ ($I \lhd_{\mathrm{r}} R$).

Замечание 1. Если $a \in I_+$, то $|a| = a$. Если $x \in R$, $|x| \leqslant a = |a|$, то $x \in I$.

Сумма и пересечение l-идеалов являются l-идеалами.

Пусть R, S — l-кольца. Гомоморфизм колец

$$f\colon R \to S$$

называется l-гомоморфизмом, если для любых $a, b \in R$ выполняются равенства

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b), \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

Пусть R и S — l-кольца и существует l-изоморфизм $\psi\colon R \to S$. Тогда будет писать $R \cong S$.

Если $I \lhd R$, то фактор-кольцо R/I (с отношением порядка, заданным следующим правилом: $a + I \leqslant b + I$ тогда и только тогда, когда $a' \leqslant b'$ для некоторых $a' \in a + I$, $b' \in b + I$) является l-кольцом, а естественный гомоморфизм $\pi\colon R \to R/I$ является l-гомоморфизмом.

Существует естественное взаимно-однозначное соответствие между l-идеалами из R/I и l-идеалами в R, содержащими I.

Первая теорема об l-изоморфизме. *Если $f\colon R \to S$ — сюръективный l-гомоморфизм l-колец R и S, то l-кольца S и $R/\operatorname{Ker} f$ l-изоморфны.*

Вторая теорема об l-изоморфизме. *Если I и J — l-идеалы l-кольца R и $I \subset J$, то $R/J \cong (R/I)/(J/I)$.*

Третья теорема об l-изоморфизме. *Пусть R — l-кольцо, A, I — l-идеалы l-кольца R. Тогда $A + I$ — l-кольцо, $A \cap I$ — l-идеал l-кольца A, I — l-идеал l-кольца $A + I$ и $(A + I)/I \cong I/(A \cap I)$.*

Здесь и далее рассматриваются только l-гомоморфизмы и l-изоморфизмы.

Определение 1 [6, определение 3]. Правый l-идеал P l-кольца R называется *l-первичным*, если $P \neq R$ и выполнено условие

$$\text{для любых } A \lhd_{\mathrm{r}} R,\ B \lhd_{\mathrm{r}} R, \text{ если } AB \subseteq P, \text{ то либо } A \subseteq P, \text{ либо } B \subseteq P,$$
$$\text{где } AB = \Big\{ z = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \;\Big|\; x_i \in A,\ y_i \in B \Big\}. \quad (1)$$

Лемма 1 [6, лемма 1]. *Правый l-идеал P l-кольца R является l-первичным в том и только в том случае, когда выполнено условие*

$$\text{для любых } a, b \in R_+, \text{ если } aRb \subseteq P, \text{ то либо } a \in P, \text{ либо } b \in P. \quad (2)$$

Лемма 2 [6, теорема 1]. *Если $P \lhd R$, то условие* (1) *может быть заменено более слабым*:

$$\text{для любых } A \lhd R,\ B \lhd R, \text{ если } AB \subseteq P, \text{ то либо } A \subseteq P, \text{ либо } B \subseteq P, \quad (1')$$

т. е. односторонние l-идеалы могут быть заменены двусторонними.

Определение 2 [6, определение 4]. l-кольцо R называется *l-первичным*, если $\{0\}$ — l-первичный l-идеал.

Определение 3 [6, определение 6]. Если $I \lhd_{\mathrm{r}} R$, то обозначим

$$I_g = \{x \in I \mid r|x| \in I \text{ для любого } r \in R_+\}.$$

Лемма 3 [6, лемма 5]. *I_g — наибольший двусторонний l-идеал l-кольца R, содержащийся в I.*

В [8] вводятся понятия правого и левого l-аннуляторов l-идеала l-кольца и доказывается, что они являются l-идеалами. Доказывается, что l-идеал l-первичного l-кольца является l-первичным l-кольцом.

Определение 4 [8, определение 2]. Правым (левым) l-аннулятором l-идеала A l-кольца R называется множество

$$A_{\mathrm{r}} = \{x \in R \mid a|x| = 0 \text{ для любого } a \in A\}$$
$$(A_{\mathrm{l}} = \{x \in R \mid |x|a = 0 \text{ для любого } a \in A\}).$$

l-аннулятором l-идеала A называется множество $A^* = A_{\mathrm{r}} \cap A_{\mathrm{l}}$.

Заметим, что для любых $a \in A$ и $x \in A_{\mathrm{r}}$ выполняется $ax = 0$, так как $|ax| \leqslant |a|\,|x| = 0$. Поэтому $AA_{\mathrm{r}} = 0$. Аналогично $A_{\mathrm{l}}A = 0$.

Лемма 4 [8, лемма 1]. *A^*, A_{r} и A_{l} являются l-идеалами l-кольца R.*

Доказательство. Докажем, что A_{r} — l-идеал. Пусть $b, c \in A_{\mathrm{r}}$, $a \in A_+$. Тогда

$$0 \leqslant a|b+c| \leqslant a|b| + a|c| = 0 + 0 = 0,$$

т. е. $a|b+c| = 0$. Любой элемент $a \in A$ можно представить в виде $a = a_+ - a_-$, где $a_+, a_- \in A_+$. Следовательно, $a|b+c| = a_+|b+c| - a_-|b+c| = 0$, и $b+c \in A_{\mathrm{r}}$.

Для любых $b \in A_{\mathrm{r}}$, $x \in R$, $a \in A_+$ имеем $0 \leqslant a|xb| \leqslant a|x|\,|b| = 0$, так как $a|x| \in A$, и $0 \leqslant a|bx| \leqslant a|b|\,|x| = 0$, так как $a|b| = 0$. Следовательно, для любого $a \in A$ выполнено $a|xb| = 0$ и $a|bx| = 0$, т. е. $xb \in A_{\mathrm{r}}$ и $bx \in A_{\mathrm{r}}$.

Если $x \in R$, $b \in A_{\mathrm{r}}$, $|x| \leqslant |b|$, то для любого $a \in A_+$ выполнено $a|x| \leqslant a|b| = 0$. Следовательно, для любого $a \in A$ имеем $a|x| = 0$, т. е. $x \in A_{\mathrm{r}}$.

Мы доказали, что A_{r} — l-идеал l-кольца R. Рассуждения для A_{l} аналогичные. Пересечение l-идеалов — l-идеал. □

Следствие. *Если R — l-первичное l-кольцо и $A \neq 0$ — l-идеал R, то*

$$A_{\mathrm{l}} = A_{\mathrm{r}} = A^* = 0.$$

Доказательство. A и A_{l} — l-идеалы R, $AA_{\mathrm{l}} = 0$, $A \neq 0$. Следовательно, $A_{\mathrm{l}} = 0$. Аналогично $A_{\mathrm{r}} = 0$. □

Лемма 5 [8, лемма 4]. *Если R — l-первичное l-кольцо и $A \neq 0$ — l-идеал R, то A — l-первичное l-кольцо.*

Доказательство. Пусть B и C — ненулевые l-идеалы A. Из предыдущего следствия мы знаем, что $A_{\mathrm{l}} = A_{\mathrm{r}} = A^* = 0$. Следовательно, $BA \neq 0$, поэтому $ABA \neq 0$.

Рассмотрим множество

$$\langle ABA \rangle = \{x \in R \mid |x| \leqslant aba',\ a, a' \in A_+,\ b \in B_+\}.$$

Докажем, что это l-идеал R.

Пусть $x, y \in \langle ABA \rangle$, $|x| \leqslant a_1 b_1 a_1'$, $|y| \leqslant a_2 b_2 a_2'$, $a_1, a_2, a_1', a_2' \in A_+$, $b_1, b_2 \in \in B_+$. Тогда

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \leqslant a_1 b_1 a_1' + a_2 b_2 a_2' \leqslant (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(a_1' + a_2'),$$

т. е. $x + y \in \langle ABA \rangle$.

Так как $|x \vee y| \leqslant |x| + |y|$, то $x \vee y \in \langle ABA \rangle$.

Для любого $r \in R$ выполняется $|rx| \leqslant |r|\,|x| \leqslant |r| a_1 b_1 a_1'$. Следовательно, $rx \in \langle ABA \rangle$, так как $|r| a_1 \in A_+$. Аналогично $xr \in \langle ABA \rangle$.

Для любого $r \in R$, если $|r| \leqslant |x|$, то $|r| \leqslant a_1 b_1 a_1'$. Поэтому $r \in \langle ABA \rangle$. Следовательно, $\langle ABA \rangle \lhd R$.

Аналогично можно доказать, что

$$\langle ACA \rangle = \{x \in R \mid |x| \leqslant aca',\ a, a' \in A_+,\ c \in C_+\}$$

является ненулевым l-идеалом l-кольца R.

Итак, $\langle ABA \rangle$ и $\langle ACA \rangle$ — ненулевые l-идеалы в R. Тогда $\langle ABA \rangle \langle ACA \rangle \neq 0$, так как R — l-первичное кольцо. Значит, существуют $x \in \langle ABA \rangle$ и $y \in \langle ACA \rangle$, такие что $xy \neq 0$.

Существуют такие $a_1, a_2, a_1', a_2' \in A_+$, $b \in B_+$ и $c \in C_+$, что $|x| \leqslant a_1 b a_1'$, $|y| \leqslant a_2 c a_2'$. Следовательно,

$$0 < |xy| \leqslant |x|\,|y| \leqslant a_1 b a_1' a_2 c a_2' \in BC,$$

т. е. $BC \neq 0$, что и требовалось доказать. □

Лемма 6. *Если P — l-идеал l-кольца R, то P — l-первичный l-идеал тогда и только тогда, когда R/P — l-первичное l-кольцо.*

Доказательство. Пусть P — l-первичный l-идеал l-кольца R. Любой l-идеал l-кольца R/P имеет вид I/P, где I — некоторый l-идеал l-кольца R, содержащий P. Пусть A/P, B/P — l-идеалы l-кольца R/P, такие что $(A/P)(B/P) = 0$, $A/P \neq 0$. Это означает, что $AB \subseteq P$ и $A \not\subseteq P$. Следовательно, $B \subseteq P$ и $B/P = 0$. Так как $P \neq R$, то $R/P \neq 0$. Таким образом, R/P — l-первичное l-кольцо.

Обратно, пусть R/P — l-первичное l-кольцо. Так как $R/P \neq 0$, то $P \neq R$. Пусть A, B — l-идеалы R, такие что $AB \subseteq P$, $A \not\subseteq P$. Тогда

$$\big((A+P)/P\big)\big((B+P)/P\big) = 0, \quad (A+P)/P \neq 0.$$

Следовательно, $(B+P)/P = 0$ и $B \subseteq P$. Таким образом, P — l-первичный l-идеал. □

2. Специальный класс l-колец

Определение 5. Класс $\mathcal{K}$ ассоциативных l-первичных l-колец называется *специальным*, если выполнены следующие условия:

$$\text{если } R \in \mathcal{K} \text{ и } 0 \neq B \lhd R, \text{ то } B \in \mathcal{K}, \tag{A}$$

$$\text{если } 0 \neq B \in \mathcal{K},\ B \lhd R \text{ и } R - l\text{-первичное } l\text{-кольцо, то } R \in \mathcal{K}. \tag{B}$$

Из леммы 5 следует, что определение корректно.

Всякий специальный класс $\mathcal{K}$ l-колец определяет радикал, называемый $\mathcal{K}$-специальным, аналог верхнего радикала Куроша, определяемого классом $\mathcal{R}$ радикальных l-колец. Радикальными при этом являются l-кольца, не отображающиеся гомоморфно на l-кольца из $\mathcal{K}$ (под гомоморфизмом l-колец понимается l-гомоморфизм).

Аналогичные определения специального класса l-колец и специального радикала даются в [9].

Докажем, что заданный таким образом класс действительно является радикальным, причём в любом l-кольце R, не являющемся радикальным, специальный радикал, определяемый $\mathcal{K}$, можно представить в виде

$$\rho(R,\mathcal{K}) = \bigcap\{P_\alpha \mid P_\alpha \lhd R,\ R/P_\alpha \in \mathcal{K}\}. \tag{3}$$

Напомним, что класс l-колец $\mathcal{R}$ называется радикальным (см. [6, 8]), если выполнены следующие условия:

1) гомоморфный образ l-кольца, принадлежащего классу $\mathcal{R}$, является l-кольцом, принадлежащим классу $\mathcal{R}$;
2) всякое l-кольцо R содержит радикал $\rho(R)$ (l-идеал, принадлежащий классу $\mathcal{R}$ и содержащий все l-идеалы l-кольца R, принадлежащие $\mathcal{R}$);
3) фактор-кольцо любого l-кольца R по его радикалу $\rho(R)$ ρ-полупросто, т. е. не содержит ненулевых l-идеалов, принадлежащих $\mathcal{R}$.

Кольца, принадлежащие классу $\mathcal{R}$, называются радикальными.

Чтобы доказать, что наш класс является радикальным, нам потребуется теорема, аналогичная теореме 1 из § 1 главы 2 из [2] для колец. Доказательство того, что специальный класс l-колец является радикальным, проводится так же, как для колец.

Теорема 1. *Класс l-колец $\mathcal{R}$ радикален, если выполнены следующие условия*:

1) *гомоморфный образ l-кольца из класса $\mathcal{R}$ сам будет l-кольцом из класса $\mathcal{R}$*;
2) *в любом l-кольце R сумма любого множества l-идеалов, являющихся l-кольцами из класса $\mathcal{R}$, сама будет являться l-кольцом из класса $\mathcal{R}$*;
3) *если I — l-идеал l-кольца R, причём I и R/I — l-кольца из класса $\mathcal{R}$, то $R \in \mathcal{R}$.*

Доказательство. Для любого l-кольца R положим по определению

$$\rho(R) = \sum\{T \mid T \lhd R,\ T \in \mathcal{R}\}.$$

Из условия 2) следует, что $\rho(R) \in \mathcal{R}$. Ясно, что это наибольший радикальный l-идеал.

Пусть $\bar{I}$ — радикальный l-идеал l-кольца $R/\rho(R)$. Существует l-идеал I l-кольца R, такой что $\bar{I} = I/\rho(R)$. Но тогда из условия 3) получаем, что $I \in \mathcal{R}$. Следовательно, $I \subseteq \rho(R)$, т. е. $I = \rho(R)$ и $I = 0$. Таким образом, мы доказали, что $\rho\bigl(R/\rho(R)\bigr) = 0$. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Если $\mathcal{K}$ — специальный класс l-колец, то класс l-колец, гомоморфно не отображающихся на кольца из $\mathcal{K}$, является радикальным.*

Доказательство. 1. Пусть R — радикальное кольцо, $S = \varphi(R)$ — его ненулевой гомоморфный образ. Предположим, что S не является радикальным. Тогда существует l-гомоморфизм ψ, такой что $\psi(S) \in \mathcal{K}$, т. е. $\psi\bigl(\varphi(R)\bigr) \in \mathcal{K}$, и R не является радикальным. Следовательно, S — радикальное кольцо.

2. Пусть S — сумма некоторого множества радикальных l-идеалов l-кольца R. Предположим, что S не является радикальным l-идеалом. Тогда существует (ненулевой) l-гомоморфизм ψ, такой что $\psi(S) \in \mathcal{K}$. Существует радикальный l-идеал I, входящий в сумму S, такой что $\psi(I) \neq 0$. Так как $\psi(I) \lhd \psi(S)$, то $\psi(I) \in \mathcal{K}$. Но это противоречит тому, что I — радикальный l-идеал.

3. Пусть I — радикальный l-идеал l-кольца R и R/I — радикальное l-кольцо. Предположим, что R не является радикальным, т. е. существует l-гомоморфизм ψ, такой что $\psi(R) \in \mathcal{K}$. Тогда $\psi(I) \lhd \psi(R)$, следовательно, $\psi(I) = 0$ (иначе $\psi(I)$ тоже принадлежит $\mathcal{K}$, но I — радикальное кольцо). Следовательно, $I \lhd \operatorname{Ker}\psi$. По первой теореме об l-изоморфизме $R/\operatorname{Ker}\psi \cong \psi(R)$, т. е. $R/\operatorname{Ker}\psi \in \mathcal{K}$. По второй теореме об l-изоморфизме $(R/I)/(\operatorname{Ker}\psi/I) \cong R/\operatorname{Ker}\psi$, т. е. $(R/I)/(\operatorname{Ker}\psi/I) \in \mathcal{K}$. Существует естественный l-гомоморфизм из R/I в $(R/I)/(\operatorname{Ker}\psi/I)$, поэтому R/I не является радикальным. Противоречие.

Выполняются условия теоремы 1. Теорема доказана. □

Итак, мы доказали, что класс l-колец, гомоморфно не отображающихся на l-кольца из $\mathcal{K}$, является радикальным. Радикал l-кольца — сумма всех его радикальных l-идеалов. Докажем, что его можно представить в виде (3). Доказательство проводится с использованием утверждений из [9] и методов из [1], используемых для доказательства аналогичного утверждения для колец. Докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 7. *Если A, B — l-идеалы l-кольца R, то наименьший l-идеал, содержащий множество AB имеет вид*

$$\langle AB\rangle = \{t \in A \cap B \mid |t| \leqslant ab,\ a \in A_+,\ b \in B_+\}.$$

Доказательство. Пусть $r \in R$, $t, s \in \langle AB\rangle$, $|t| \leqslant ab$, $a \in A_+$, $b \in B_+$, $|s| \leqslant \tilde{a}\tilde{b}$, $\tilde{a} \in A_+$, $\tilde{b} \in B_+$.

Заметим, что $A \cap B$ является l-идеалом как пересечение l-идеалов. Так как

$$|t+s| \leqslant |t| + |s| \leqslant ab + \tilde{a}\tilde{b} \leqslant (a+\tilde{a})(b+\tilde{b}),$$

то $t + s \in \langle AB\rangle$.

Заметим, что $|rt| \leqslant |r|\,|t| \leqslant |r|ab$, причём $|r|ab \in A \cap B$, так как A, B — l-идеалы, и $|r|a \in A_+$. Поэтому $rt \in A \cap B$, и следовательно, $rt \in \langle AB\rangle$.

Аналогично, так как $|tr| \leqslant ab|r|$, $ab|r| \in A \cap B$, то $tr \in A \cap B$, причём $b|r| \in B_+$. Поэтому $tr \in \langle AB\rangle$.

Если $|r| \leqslant |t|$, то $r \in A \cap B$ и $|r| \leqslant ab$, поэтому $r \in \langle AB\rangle$.

Следовательно, $\langle AB\rangle$ является l-идеалом. Пусть I — l-идеал, содержащий AB, и $t \in A \cap B$, $|t| \leqslant ab$, $a \in A_+$, $b \in B_+$. Тогда $ab \in I$ и $t \in I$, так как I — l-идеал. Следовательно, $\langle AB\rangle \subseteq I$. Лемма доказана. □

Лемма 8 [9, лемма 2]. *Если в l-кольце A нет ненулевых нильпотентных l-идеалов и $A \lhd R$, то $A^* = A_{\mathrm{l}} = A_{\mathrm{r}}$ и $A \cap A^* = 0$.*

Доказательство. По лемме 4 A_{r} — l-идеал l-кольца R. Заметим, что $(A_{\mathrm{r}}A)^2 = A_{\mathrm{r}}AA_{\mathrm{r}}A = 0$.

По лемме 7 l-идеал, порождённый множеством $A_{\mathrm{r}}A$, имеет вид

$$\langle A_{\mathrm{r}}A\rangle = \{t \in A \mid |t| \leqslant ba,\ a \in A_+,\ b \in (A_{\mathrm{r}})_+\}.$$

Пусть $t, s \in \langle AB\rangle$, $|t| \leqslant ab$, $a \in A_+$, $b \in B_+$, $|s| \leqslant \tilde{a}\tilde{b}$, $\tilde{a} \in A_+$, $\tilde{b} \in B_+$. Так как $|ts| \leqslant |t|\,|s| \leqslant ba\tilde{b}\tilde{a} = 0$, то $ts = 0$, и $(\langle A_{\mathrm{r}}A\rangle)^2 = 0$, т. е. $\langle A^{\mathrm{r}}A\rangle$ — нильпотентный l-идеал l-кольца A. Следовательно, $\langle A_{\mathrm{r}}A\rangle = 0$ и $A_{\mathrm{r}}A = 0$. Таким образом, $A_{\mathrm{r}} \subseteq A_{\mathrm{l}}$. Аналогично доказывается, что $A_{\mathrm{l}} \subseteq A_{\mathrm{r}}$. Значит, $A_{\mathrm{r}} = A_{\mathrm{l}} = A^*$.

Так как пересечение l-идеалов является l-идеалом и $(A^* \cap A)^2 \subseteq A^*A = 0$, то $(A^* \cap A)^2 = 0$, и $A^* \cap A = 0$. Лемма доказана. □

Лемма 9. *Пусть B — l-идеал l-кольца A, A — l-идеал l-кольца R и $(A/B)_{\mathrm{l}} = (A/B)_{\mathrm{r}} = 0$. Тогда $B \lhd R$.*

Доказательство. Так как $BR \subseteq AR \subseteq A$, $BRA \subseteq BA \subseteq B$, то, перейдя к фактор-кольцу A/B, получим $(BR/B)(A/B) = (BRA)/B = 0$. Но $(A/B)_{\mathrm{l}} = 0$, следовательно, $(BR)/B = 0$, т. е. $BR \subseteq B$. Аналогично $RB \subseteq B$.

Пусть $r \in R$, $|r| \leqslant |b|$, $b \in B$. Тогда $r \in A$, так как $b \in A$. Поэтому $r \in B$. Следовательно, $B \lhd R$. □

Лемма 10. *Если R — l-первичное l-кольцо, то в нём нет нильпотентных l-идеалов.*

Доказательство. Предположим, что A — ненулевой нильпотентный l-идеал. Пусть n — самое маленькое натуральное число, такое что $A^n = 0$. Тогда существуют такие $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in A_+$, что $a_1a_2\cdots a_{n-1} \neq 0$. Пусть $a \in A_+$, $a \neq 0$. Тогда $aRa_1a_2\cdots a_{n-1} = 0$, так как $aR \subseteq A$. По лемме 1 это противоречит l-первичности l-кольца R. Лемма доказана. □

Лемма 11 [9, лемма 3]. *Если A — l-первичное l-кольцо и $A \lhd R$, то R/A^* — l-первичное l-кольцо.*

Доказательство. Из леммы 6 следует, что достаточно доказать, что A^* — l-первичный l-идеал. Из леммы 10 следует, что в A нет нильпотентных l-идеалов. Поэтому из леммы 8 следует, что $A^* = A_{\mathrm{l}} = A_{\mathrm{r}}$.

Пусть B, C — l-идеалы l-кольца R, $BC \subseteq A^*$ и $B \not\subseteq A^*$. Докажем, что $C \subseteq A^*$. Для начала заметим, что $ABCA = 0$. Из леммы 7 следует, что l-идеал, порождённый множеством AB в l-кольце A, имеет вид

$$\langle AB\rangle = \{t \in A \mid |t| \leqslant ab,\ a \in A_+,\ b \in B_+\}.$$

Аналогично
$$\langle CA\rangle = \{t \in A \mid |t| \leqslant ca,\ a \in A_+,\ c \in C_+\}.$$

Докажем, что $\langle AB\rangle\langle CA\rangle = 0$. Пусть $t \in \langle AB\rangle$, $s \in \langle CA\rangle$, $|t| \leqslant ab$, $a \in A_+$, $b \in B_+$, $|s| \leqslant c\tilde{a}$, $\tilde{a} \in A_+$, $c \in C_+$. Тогда, так как $ABCA = 0$,
$$0 \leqslant |st| \leqslant |s|\,|t| \leqslant abc\tilde{a} = 0.$$
Следовательно, $st = 0$.

Итак, мы доказали, что $\langle AB\rangle$, $\langle CA\rangle$ — l-идеалы l-кольца A, такие что $\langle AB\rangle\langle CA\rangle = 0$. Так как $B \not\subseteq A^* = A_{\mathrm{r}}$, т. е. $AB \neq 0$, то $\langle AB\rangle \neq 0$. Из того что A — l-первичное l-кольцо, следует, что $\langle CA\rangle = 0$, т. е. $CA = 0$. По лемме 8 $A^{\mathrm{l}} = A^*$. Поэтому $C \subseteq A^*$, что и требовалось доказать. □

Предложение 1. *Условие* (B) *в определении специального класса эквивалентно следующему*:
$$\text{если } A \in \mathcal{K},\ A \lhd R, \text{ то } R/A^* \in \mathcal{K}. \tag{C}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}$ — специальный класс. Докажем, что в нём выполняется условие (C). Пусть $A \in \mathcal{K}$, $A \lhd R$. Так как A — l-первичное кольцо, то по лемме 10 в нём нет нильпотентных l-идеалов. Следовательно, по лемме 8 $A^* \cap A = 0$. По третьей теореме об l-изоморфизме $(A + A^*)/A^* \cong A/A \cap A^*$. Так как $A^* \cap A = 0$, то $A/A \cap A^* \cong A$. Следовательно, $(A + A^*)/A^* \cong A$, и из условия (A) следует, что $(A + A^*)/A^* \in \mathcal{K}$.

Так как R/A^* — l-первичное l-кольцо по лемме 11 и $(A + A^*)/A^* \lhd R/A^*$, то $R/A^* \in \mathcal{K}$.

Теперь докажем, что если выполнены условия (A) и (C), то выполнено условие (B). Пусть $A \in \mathcal{K}$, $A \lhd R$ и R — l-первичное l-кольцо. Тогда $A^* = 0$ (следствие из леммы 4) и $R \in \mathcal{K}$. Утверждение доказано. □

Определение 6. Если $P \lhd A \lhd R$, то
$$P : A = \{x \in R \mid |x|A \subseteq P,\ A|x| \subseteq P\}.$$

Замечание 2. Так как любой элемент a l-кольца A можно представить в виде $a = a_+ - a_-$, $a_+, a_- \in A_+$, и $P \lhd A$, то
$$P : A = \{x \in R \mid |x|A_+ \subseteq P,\ A_+|x| \subseteq P\}.$$

Лемма 12. *Пусть $\mathcal{K}$ — специальный класс. Тогда если $P \lhd A \lhd R$ и $A/P \in \mathcal{K}$, то $P : A \lhd R$, $R/(P : A) \in \mathcal{K}$ и $P = (P : A) \cap A$.*

Доказательство. Пусть $P \lhd A \lhd R$ и $A/P \in \mathcal{K}$. Докажем, что $P : A \lhd R$.

Пусть $x, y \in P : A$, $a \in A_+$. Тогда $|x+y|a \leqslant |x|a + |y|a$. Так как $|x|a, |y|a \in P$ и $P \lhd A$, то $|x+y|a \in P$. Аналогично $a|x+y| \in P$. Следовательно, $x + y \in P : A$.

Пусть $x \in P : A$, $y \in R$, $a \in A_+$ и $|y| \leqslant |x|$. Тогда $|y|a \leqslant |x|a \in P$, т. е. $|y|a \in P$, так как $|y|a \in A$. Аналогично $a|y| \in P$. Следовательно, $y \in P : A$.

Пусть $x \in P : A$, $y \in R$. Тогда $xyA \subseteq xA \subseteq P$. Так как $A/P \in \mathcal{K}$, то A/P — l-первичное кольцо, и по следствию из леммы 4 $(A/P)_{\mathrm{l}} = (A/P)_{\mathrm{r}} = 0$.

Из леммы 9 следует, что $P \lhd R$. Поэтому $Axy \subseteq Py \subseteq P$. Аналогично $yx \in P : A$. Следовательно, $P : A \lhd R$.

Заметим, что $R/(P : A) \cong (R/P)/(A/P)^*$. Действительно, рассмотрим отображение

$$\varphi\colon R/(P : A) \to (R/P)/(A/P)^*, \quad \varphi(r + P : A) = (r + P) + (A/P)^*.$$

Легко убедиться, что это сюръективный l-гомоморфизм. Докажем, что он инъективный.

Нам надо доказать, что $r \in P : A$ эквивалентно тому, что $r + P \in (A/P)^*$. Пусть $r \in P : A$. Тогда $|r|A \subseteq P$ и $A|r| \subseteq P$. Следовательно,

$$|r + P|(A/P) = (|r| + P)(A/P) = (|r|A + PA)/P = P/P = 0.$$

Аналогично $(A/P)|r + P| = 0$. Таким образом, $r + P \in (A/P)^*$.

Пусть $r + P \in (A/P)^*$. Тогда

$$|r + P|(A/P) = (A/P)|r + P| = 0,$$

т. е. $|r|A \subseteq P$ и $A|r| \subseteq P$. Поэтому $r \in P : A$.

Итак, мы доказали, что $R/(P : A) \cong (R/P)/(A/P)^*$. Так как $A/P \in \mathcal{K}$ и $A/P \lhd R/P$, то из предложения 1 следует, что $(R/P)/(A/P)^* \in \mathcal{K}$. Поэтому $R/(P : A) \in \mathcal{K}$.

Осталось доказать, что

$$(P : A) \cap A = \{a \in A \mid |a|A \subseteq P,\ A|a| \subseteq P\} = P.$$

Так как $P \lhd A$, то $P \subseteq (P : A) \cap A$. С другой стороны, заметим, что $\big((P : A) \cap A\big)/P$ — l-идеал l-первичного l-кольца A/P, причём для любого $a \in \big((P : A) \cap A\big)$ имеем

$$|a + P|(A/P) = (|a| + P)(A/P) = 0, \quad (A/P)|a + P| = (A/P)(|a| + P) = 0.$$

Таким образом, $a + P \in (A/P)^*$. Но l-аннулятор l-первичного l-кольца равен нулю, следовательно, $a \in P$, и $(P : A) \cap A \subseteq P$. Лемма доказана. □

Лемма 13. *Пусть $\mathcal{K}$ — специальный класс. Тогда если B — собственный l-идеал l-кольца R и ненулевой гомоморфный образ l-кольца B принадлежит $\mathcal{K}$, то существует l-идеал T l-кольца R, не содержащий B, для которого $R/T \in \mathcal{K}$.*

Доказательство. Пусть B — собственный l-идеал l-кольца R, $\varphi(B) \in \mathcal{K}$ — ненулевой гомоморфный образ l-кольца B. Тогда $\operatorname{Ker}\varphi \neq B$ — l-идеал l-кольца B. По первой теореме об l-изоморфизме $B/\operatorname{Ker}\varphi \cong \varphi(B)$, поэтому $B/\operatorname{Ker}\varphi \in \mathcal{K}$. Обозначим $P = \operatorname{Ker}\varphi$.

По лемме 12 $P : B \lhd R$, $R/(P : B) \in \mathcal{K}$ и $P = (P : B) \cap B$.

$T = P : B$ — искомый l-идеал. Если бы он содержал B, то мы бы имели $B = (P : B) \cap B = P = \operatorname{Ker}\varphi$. Но l-гомоморфизм по условию ненулевой, и T не содержит B. Лемма доказана. □

Определение 7. Радикал называется *наследственным*, если любой l-идеал радикального l-кольца является радикальным l-кольцом.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{K}$ — специальный класс l-колец. Тогда специальный радикал, определяемый этим классом, является наследственным и выполняется равенство* (3).

Доказательство. Пусть R — радикальное l-кольцо. Предположим, что его l-идеал B не является радикальным. Тогда он собственный и отображается гомоморфно на ненулевое l-кольцо из $\mathcal{K}$. Тогда по лемме 13 существует l-идеал T l-кольца R, не содержащий B, для которого $R/T \in \mathcal{K}$. Но R отображается гомоморфно на R/T. Противоречие. Следовательно, специальный радикал является наследственным.

Из [6, предложение 1] следует, что

$$\rho(R, \mathcal{K}) = \bigcap \{Q \mid Q \lhd R,\ R/Q \in \mathcal{P}(\rho)\},$$

где $\mathcal{P}(\rho)$ — класс всех ρ-полупростых l-колец. Докажем теперь, что

$$\rho(R, \mathcal{K}) = \bigcap \{P_\alpha \mid P_\alpha \lhd R,\ R/P_\alpha \in \mathcal{K}\}.$$

Ясно, что радикал содержится в этом пересечении (обозначим пересечение через I), так как все l-кольца из $\mathcal{K}$ являются полупростыми. Действительно, все ненулевые l-идеалы l-кольца из $\mathcal{K}$ по свойству (A) принадлежат $\mathcal{K}$. Следовательно, они не могут быть радикальными, и все l-кольца из $\mathcal{K}$ являются полупростыми. Поэтому если $I = 0$, то равенство (3) выполняется.

Пусть $I \neq 0$. Заметим, что I — собственный l-идеал. Действительно, кольцо R не является радикальным по условию, поэтому существует l-гомоморфизм φ, такой что $0 \neq \varphi(R) \in \mathcal{K}$. По первой теореме об l-изоморфизме $R/\operatorname{Ker}\varphi \cong \varphi(R) \in \mathcal{K}$. Следовательно, $\operatorname{Ker}\varphi$ входит в пересечение (3), и $\operatorname{Ker}\varphi \neq R$.

Докажем, что I является радикальным l-идеалом. Действительно, если это не так, то I — собственный l-идеал l-кольца R, отображающийся гомоморфно на ненулевое l-кольцо из $\mathcal{K}$. Тогда по лемме 13 существует l-идеал T l-кольца R, не содержащий I, для которого $R/T \in \mathcal{K}$. Но это противоречит определению l-идеала I. Отсюда следует справедливость равенства (3). □

Замечание 3. Из леммы 6 следует, что все l-идеалы, входящие в пересечение (3), являются l-первичными.

Для колец справедлива лемма Т. Андерсона, Н. Дивинского и А. Сулинского, заключающаяся в том, что радикал идеала кольца является идеалом (см. [1, гл. 2, § 4; 10]). Следующая теорема показывает, что это утверждение остаётся верным для специального радикала l-колец. Далее будем иногда обозначать $\rho(R, \mathcal{K})$ через $\rho(R)$.

Теорема 4 [7, теорема 1]. *Пусть $\mathcal{K}$ — специальный класс l-колец, I — l-идеал l-кольца R. Тогда $\rho(I, \mathcal{K})$ — l-идеал l-кольца R, причём выполняется равенство $\rho(I) = I \cap \rho(R)$.*

Доказательство. Так как специальный радикал является наследственным (теорема 3), то $I \cap \rho(R)$ — радикальный l-идеал l-кольца R. Поэтому он содержится в $\rho(I)$.

Мы знаем, что
$$\rho(R) = \bigcap \{P \mid P \lhd R,\ R/P \in \mathcal{K}\}$$
и
$$\rho(I) = \bigcap \{Q \mid Q \lhd I,\ I/Q \in \mathcal{K}\}. \tag{4}$$
Следовательно,
$$\rho(R) \cap I = \bigcap \{P \cap I \mid P \lhd R,\ R/P \in \mathcal{K}\}.$$
Пусть $P \lhd R$. По третьей теореме об l-изоморфизме $I/(P \cap I) \cong (P + I)/P$. Так как $R/P \in \mathcal{K}$ и $(P+I)/P \lhd R/P$, то по свойству (A) определения специального класса справедливо $(P + I)/P \in \mathcal{K}$, т. е. $I/(P \cap I) \in \mathcal{K}$. Поэтому $P \cap I$ входит в пересечение (4).

Следовательно, $\rho(I) \subseteq \rho(R) \cap I$. Таким образом, $\rho(I) = \rho(R) \cap I$.

Пересечение l-идеалов является l-идеалом. Теорема доказана. □

Теорема 5. *Для всякого специального радикала $\rho(R, \mathcal{K})$ l-кольца R* (где R — *l-кольцо и $\mathcal{K}$ — специальный класс l-колец*) *выполняется равенство*
$$\rho(R, \mathcal{K}) = \bigcap \{P^{\mathrm{r}} \mid P^{\mathrm{r}} \text{ — правый } l\text{-первичный } l\text{-идеал},\ R/(P^{\mathrm{r}})_g \in \mathcal{K}\}. \tag{5}$$

Доказательство. Так как все l-кольца из $\mathcal{K}$ l-первичные, то по лемме 6 все l-идеалы в (3) l-первичные. Следовательно, пересечение (3) содержит пересечение (5). Пусть P^{r} входит в пересечение (5). В лемме 10 из [6] доказывается, что если P^{r} — правый l-первичный l-идеал, то $(P^{\mathrm{r}})_g$ — l-первичный l-идеал. Поэтому $(P^{\mathrm{r}})_g$ входит в пересечения (3) и (5). Следовательно, они совпадают. Теорема доказана. □

3. Класс l-первичных l-колец

Рассмотрим некоторые конкретные специальные классы l-колец, например класс всех l-первичных l-колец N_1 и класс l-колец без положительных делителей нуля N_3.

Предложение 2. *Класс всех l-первичных l-колец является специальным, и специальный радикал N_1, определяемый этим классом, имеет вид*
$$N_1(R) = \bigcap \{P \mid P \text{ — } l\text{-первичный } l\text{-идеал } l\text{-кольца } R\} = \\ = \bigcap \{P^{\mathrm{r}} \mid P^{\mathrm{r}} \text{ — } l\text{-первичный правый } l\text{-идеал } l\text{-кольца } R\}.$$

Справедливость утверждений предложения 2 следует из леммы 5 и теоремы 5.

Определение 8. Правый l-идеал S l-кольца R называется *l-полупервичным*, если для любого $A \lhd_{\mathrm{r}} R$ из $A^2 \subseteq S$ вытекает $A \subseteq S$.

Из определения следует (см. [6]), что любой l-первичный правый l-идеал является l-полупервичным.

В [6, лемма 8] доказывается, что если S — двусторонний l-идеал, то для его l-полупервичности в предыдущем определении достаточно A тоже предполагать двусторонним.

Лемма 14 [6, лемма 10]. *Если I — l-первичный (или l-полупервичный) правый l-идеал, то и I_g — l-первичный (l-полупервичный) правый l-идеал.*

Лемма 15 [6, лемма 9]. *Правый l-идеал P l-кольца R является l-полупервичным в том и только том случае, когда выполнено следующее условие*:

$$\text{для любого } a \in R_+, \text{ если } aRa \subseteq P, \text{ то } a \in P. \tag{6}$$

Определение 9. Радикал ρ, определённый в классе l-колец, будем называть *наднильпотентным*, если для любого l-кольца R $\rho(R)$ содержит все нильпотентные l-идеалы l-кольца R.

Теорема 6 [6, теорема 4]. *Если ρ — наднильпотентный радикал, то*

$$\rho(R) = \bigcap_{Q^{\mathrm{r}} \in \Lambda} Q^{\mathrm{r}},$$

где Λ — множество всех l-полупервичных правых l-идеалов, для которых $R/(Q^{\mathrm{r}})_g$ — ρ-полупростое l-кольцо.

Напомним, что $a \in R$ называется строго нильпотентным, если в цепочке элементов $a_0 = a$, $a_{n+1} \in a_n R a_n$ начиная с некоторого номера все элементы равны нулю.

Определение 10 [4, п. 1.6]. Элемент $a \in R$ называется строго l-нильпотентным, если его модуль строго нильпотентен.

Замечание 4. Элемент $a \in R$ является строго l-нильпотентным тогда и только тогда, когда в цепочке элементов $b_0 = |a|$, $b_{n+1} \in |b_n| R_+ |b_n| = b_n R_+ b_n$ начиная с некоторого номера все элементы равны нулю.

Действительно, пусть это условие выполняется и a_n — цепочка элементов из определения строго l-нильпотентного элемента. Каждый элемент a_n имеет вид

$$a_n = |a| r_{n1} |a| r_{n2} |a| \cdots r_{nk_n} |a|, \quad r_{ni} \in R.$$

Рассмотрим цепочку

$$b_1 = |a|\,|r_{11}|\,|a| \in |a| R_+ |a|, \quad b_n = |a|\,|r_{n1}|\,|a|\,|r_{n2}|\,|a| \cdots |r_{nk_n}|\,|a| \in b_{n-1} R_+ b_{n-1}.$$

Существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $b_m = 0$. Тогда

$$|a_m| = \big||a| r_{n1} |a| r_{n2} |a| \cdots r_{mk_m} |a|\big| \leqslant b_m = 0,$$

т. е. $a_m = 0$ и a — строго l-нильпотентный элемент.

Таким же образом можно доказать, что строго l-нильпотентный элемент является строго нильпотентным. Обратное не верно (см. [9, пример 1; 6, пример 1, рассмотреть элемент $(1,-1)$]).

Также можно показать, что все строго l-нильпотентные элементы l-кольца R образуют l-идеал. В [4, п. 1.14] доказывается, что этот l-идеал совпадает с первичным радикалом $N_1(R)$.

Лемма 16. *Любой l-полупервичный правый l-идеал $P \lhd_{\mathrm{r}} R$ содержит все строго l-нильпотентные элементы l-кольца.*

Доказательство. Пусть $a \in R$ — строго l-нильпотентный элемент. Предположим, что $a \notin P$. Тогда $|a| \notin P$ (по определению правого l-первичного l-идеала), и по лемме 15 $|a|R|a| \not\subseteq P$. Следовательно, существует $r \in R$, такой что $|a|r|a| \notin P$. Тогда $a_1 = |a|\,|r|\,|a| \notin P$, так как $\big||a|r|a|\big| \leqslant |a|\,|r|\,|a|$. Аналогично $a_1Ra_1 \not\subseteq P$. Находим $a_2 \in a_1R_+a_1$, такой что $a_2 \notin P$. Так мы построим бесконечную цепочку $a_0 = |a|, a_1, a_2, \ldots$. В цепочке $a_n \neq 0$, так как $a_n \notin P$, $n \in \mathbb{N}$. Но это противоречит тому, что a — строго l-нильпотентный элемент. □

Лемма 17. *Любой l-полупервичный правый l-идеал $P \lhd_{\mathrm{r}} R$ содержит все нильпотентные l-идеалы l-кольца R.*

Доказательство. Пусть I — нильпотентный l-идеал l-кольца R, $I^n = 0$. Тогда любой его элемент является строго нильпотентным. Действительно, пусть $a \in I$, $a_n \in aRaRa \cdots aRaRa \subseteq aAA \cdots AA$. В этом произведении элементов A больше n, следовательно, оно равно нулю, т. е. $a_n = 0$. Но тогда любой элемент $a \in I$ является строго l-нильпотентным, так как $|a|$ — строго нильпотентный. Следовательно, $a \in P$ по лемме 16, и $I \subseteq P$. □

Следствие. *Любой l-первичный правый l-идеал $P \lhd_{\mathrm{r}} R$ содержит все нильпотентные l-идеалы l-кольца R.*

Теорема 7. *Любой специальный радикал является наднильпотентным.*

Доказательство. Из теоремы 5 следует, что радикал равен пересечению некоторых l-первичных правых l-идеалов. Из следствия 3 получаем, что любой l-первичный правый l-идеал содержит все нильпотентные l-идеалы. Следовательно, и радикал содержит все нильпотентные l-идеалы. □

Теорема 8. *Специальный радикал $N_1(R)$ равен пересечению всех правых l-полупервичных l-идеалов l-кольца R.*

Доказательство. По теореме 7 радикал N_1 является наднильпотентным. По теореме 6 имеем, что $N_1(R) = \bigcap\{Q^{\mathrm{r}}\}$, где $\{Q^{\mathrm{r}}\}$ — множество всех правых l-полупервичных l-идеалов l-кольца R, для которых $R/(Q^{\mathrm{r}})_g$ — N_1-полупростое l-кольцо. Из [4, теорема 1.14] следует, что l-кольцо является N_1-полупростым тогда и только тогда, когда в нём нет ненулевых строго l-нильпотентных элементов.

Пусть Q^{r} — правый l-полупервичный l-идеал l-кольца R. Тогда $(Q^{\mathrm{r}})_g$ — l-полупервичный l-идеал (лемма 14).

Докажем, что 0 — l-полупервичный l-идеал l-кольца $R/(Q^{\mathrm{r}})_g$. Пусть $A/(Q^{\mathrm{r}})_g$ — l-идеал $R/(Q^{\mathrm{r}})_g$ ($A \lhd R$, $(Q^{\mathrm{r}})_g \subseteq A$), такой что $(A/(Q^{\mathrm{r}})_g)^2 = 0$, т. е. $A^2 \subseteq (Q^{\mathrm{r}})_g$. Тогда $A \subseteq (Q^{\mathrm{r}})_g$, так как $(Q^{\mathrm{r}})_g$ — l-полупервичный идеал и $A/(Q^{\mathrm{r}})_g = 0$.

Из леммы 16 следует, что 0 содержит все строго l-нильпотентные элементы l-кольца $R/(Q^{\mathrm{r}})_g$, т. е. в $R/(Q^{\mathrm{r}})_g$ нет ненулевых строго l-нильпотентных элементов, оно является N_1-полупростым. Теорема доказана. □

4. Класс l-колец без положительных делителей нуля

Определение 11. Элемент a l-кольца R назовём *положительным*, если $a > 0$.

Определение 12. l-кольцо R является l-кольцом без положительных делителей нуля, если для любых положительных $a, b \in R$ имеем $ab \neq 0$.

Предложение 3. *Класс $\mathcal{K}$ всех l-колец без положительных делителей нуля является специальным.*

Доказательство. Если $0 \neq R \in \mathcal{K}$, то для любых положительных $a, b \in R$ справедливо $aab \neq 0$. Следовательно, $aRb \neq 0$, и R — l-первичное l-кольцо по лемме 1.

Если $0 \neq I \lhd R$, то в I, очевидно, тоже нет положительных делителей нуля, т. е. $I \in \mathcal{K}$.

Если $R \lhd S$ и S — l-первичное l-кольцо, то $R^{\mathrm{r}} = R^{\mathrm{l}} = 0$ (так как $RR^{\mathrm{r}} = R^{\mathrm{l}}R = 0$ и S — l-первичное кольцо).

Пусть $a, b \in S$, $a > 0$, $b > 0$. Так как $a \notin R^{\mathrm{r}}$ и $b \notin R^{\mathrm{l}}$, то существуют $x, y \in R$, такие что $xa \neq 0$ и $by \neq 0$. Следовательно, $0 < |xa| \leqslant |x|\,|a| = |x|a$, т. е. $|x|a > 0$ и $b|y| > 0$. Так как $R \lhd S$, то $|x|a$ и $b|y|$ — положительные элементы l-кольца R. Поэтому $|x|ab|y| \neq 0$. Следовательно, $ab \neq 0$ и $S \in \mathcal{K}$. Утверждение доказано. □

Далее $\mathcal{K}$ — класс l-колец без положительных делителей нуля.

Определение 13. Правый l-идеал T l-кольца R назовём *вполне l-первичным*, если из $ab \in T$, где $a > 0$, $b > 0$, $a, b \in R$, $a \notin T$, следует, что $b \in T_g$.

Лемма 18. *Если T — вполне l-первичный правый l-идеал l-кольца R, то l-идеал T_g тоже является вполне l-первичным.*

Доказательство. Пусть T — вполне l-первичный правый l-идеал и $a > 0$, $b > 0$, $ab \in T_g$, $a \notin T_g$. Если при этом $a \notin T$, то по определению $b \in T_g$. Если же $a \in T$, то, так как $a \notin T_g$, из определения T_g вытекает, что существует такое $r \in R_+$, что $r|a| = ra \notin T$. Но так как $ab \in T_g$, для этого r имеем $r(ab) = (ra)b \in T$. Ещё раз пользуясь определением вполне l-первичного правого l-идеала, получаем, что $b \in T_g$. □

Лемма 19. *Если $T \lhd R$, то $R/T \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда l-идеал T вполне l-первичный.*

Доказательство. Пусть $R/T \in \mathcal{K}$, $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$, $ab \in T$, $a \notin T$. Тогда в l-кольце R/T $a + T > \bar{0}$, $b + T \geqslant \bar{0}$,

$$(a+T)(b+T) = ab + T = T = \bar{0}.$$

Следовательно, $b + T = \bar{0}$, т. е. $b \in T$, и l-идеал T вполне l-первичный.

Пусть T вполне l-первичный, $x, y \in R$, $x, y \notin T$, $x > 0$, $y > 0$. Тогда $xy \notin T$, так как T вполне l-первичный и

$$(x+T)(y+T) = xy + T \neq \bar{0}.$$

Таким образом, $R/T \in \mathcal{K}$. Лемма доказана. □

Теорема 9. *Для любого l-кольца R, если $N_3(R)$ — специальный радикал, определяемый классом l-колец без положительных делителей нуля, то выполняется равенство*

$$N_3(R) = \bigcap\{T^{\mathrm{r}} \mid T^{\mathrm{r}} \lhd_{\mathrm{r}} R,\ T^{\mathrm{r}} \text{ — вполне } l\text{-первичный } l\text{-идеал}\}. \tag{7}$$

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что

$$N_3(R) = \bigcap\{T \mid T \lhd R,\ R/T \in \mathcal{K}\}.$$

Из леммы 19 получаем

$$N_3(R) = \bigcap\{T \mid T \lhd R,\ T \text{ — вполне } l\text{-первичный } l\text{-идеал}\}. \tag{8}$$

Все l-идеалы из пересечения (8) входят в пересечение (7). При этом если правый l-идеал T^{r} вполне l-первичный, то T^{r}_g тоже является вполне l-первичным l-идеалом (лемма 18), поэтому любой правый l-идеал из пересечения (7) содержит l-идеал из пересечения (8). Следовательно, они совпадают. Теорема доказана. □

Литература

[1] Андрунакиевич В. А. Радикалы ассоциативных колец. I // Мат. сб. — 1958. — Т. 44, № 2. — С. 179—212.

[2] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[3] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Мир, 1984.

[4] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных колец // Сб. работ по алгебре. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — С. 178—184.

[5] Фукс Л. Упорядоченные алгебраические системы. — М.: Наука, 1965.

[6] Шавгулидзе Н. Е. Радикалы l-колец и односторонние l-идеалы // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 8. — С. 169—181.

[7] Шавгулидзе Н. Е. Специальные классы l-колец и лемма Андерсона—Дивинского—Сулинского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2009.

[8] Шаталова М. А. l_A- и l_I-кольца // Сиб. мат. журн. — 1966. — Т. 7, № 6. — С. 1383—1389.

[9] Шаталова М. А. К теории радикалов в структурно упорядоченных кольцах // Мат. заметки. — 1968. — Т. 4, № 6. — С. 639—648.

[10] Anderson T., Divinsky N., Sulinski A. Hereditary radicals in associative and alternative rings // Can. J. Math. — 1965. — Vol. 17. — P. 594—603.