О полупрямых произведениях и сплетениях частично упорядоченных групп

Е. Е. ШИРШОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: e.shir@relcom.ru

УДК 512.545

Ключевые слова: частично упорядоченная группа, декартово произведение, полупрямое произведение, сплетение групп, направленная группа.

Аннотация

Рассматриваются понятия декартова произведения и полупрямого произведения частично упорядоченных групп. Получен ряд результатов о таких произведениях для $\mathcal{AO}$-групп и групп с интерполяционным условием. Некоторые результаты касаются сплетений направленных групп.

Abstract

E. E. Shirshova, On semidirect products and wreath products of partially ordered groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 1, pp. 175—184.

The notions of Cartesian and semidirect products for partially ordered groups are considered. A series of results on those products of $\mathcal{AO}$-groups and interpolation groups is obtained. Some results concerning wreath products of directed groups are obtained.

1. Введение

Пусть G — частично упорядоченная группа (ро-группа), G^+ — положительный конус группы G, т. е. множество $\{x \in G \mid e \leqslant x\}$. Пусть a и b — произвольные элементы положительного конуса G^+ ро-группы G. Элементы a и b называются *почти ортогональными*, если для элементов $c \in G$ из неравенств $c \leqslant a$ и $c \leqslant b$ следует, что $c^n \leqslant a$ и $c^n \leqslant b$ для каждого целого положительного числа n. Понятие почти ортогональности было определено в [9]. Это один из способов распространения понятия ортогональности, используемого в решёточно упорядоченных группах, на другие классы частично упорядоченных групп.

Цель данной работы — обобщить некоторые результаты, известные для решёточно упорядоченных групп, на другие классы частично упорядоченных групп.

В работе используется обычная для частично упорядоченных групп терминология (см., например, [2, 4]).

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 1, с. 175—184.

Будем называть ро-группу G *группой с условием почти ортогональности* (*$\mathcal{AO}$-группой*), если любой элемент $g \in G$ представляется в виде $g = ab^{-1}$, где a и b — некоторые почти ортогональные элементы в G.

Пусть $\{G_i \mid i \in I\}$ — семейство ро-групп. Частично упорядоченная группа $\bar{G} = \prod\limits_{i\in I} G_i$ называется *декартовым произведением* частично упорядоченных групп G_i, если $\bar{G} = \Big\{f \colon I \to \bigcup\limits_{i\in I} G_i\Big\}$ является декартовым произведением групп G_i, где $f \leqslant g$, как только $f(i) \leqslant g(i)$ для всех $i \in I$ (см. [2]).

Рассмотрим некоторые свойства декартовых произведений $\mathcal{AO}$-групп (см. [7]). Для $\mathcal{AO}$-групп справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\{G_i \mid i \in I\}$ — семейство ро-групп, $\bar{G}$ — декартово произведение ро-групп G_i. Если G_i является $\mathcal{AO}$-группой для каждого $i \in I$, то $\bar{G}$ — $\mathcal{AO}$-группа.*

Подгруппа M ро-группы G называется *выпуклой*, если для всех $m, n \in M$ из неравенств $m \leqslant g \leqslant n$ для $g \in G$ следует, что $g \in M$.

Следующее утверждение будет доказано в разделе 2.

Теорема 2. *Пусть $\bar{G}$ — декартово произведение $\mathcal{AO}$-групп G_i для $i \in I$. Если*

$$M_i = \{f \in \bar{G} \mid f(j) = e \text{ для всех } j \neq i,\ j \in I\},$$

то M_i — выпуклая направленная нормальная подгруппа группы $\bar{G}$ и существует изоморфизм $\Phi_i \colon M_i \to G_i$. Более того, отображения Φ_i и Φ_i^{-1} сохраняют отношение почти ортогональности.

Пусть G — ро-группа и M — выпуклая подгруппа в G. Положим $M \leqslant Ma$, если $e \leqslant a'$ для некоторого $a' \in Ma$. Мы получили отношение частичного порядка на множестве всех правых смежных классов группы G по подгруппе M. Если M — выпуклая направленная нормальная подгруппа $\mathcal{AO}$-группы G, то фактор-группа G/M также является $\mathcal{AO}$-группой (см. [5, теорема 2]). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть G — $\mathcal{AO}$-группа и $\{M_i \mid i \in I\}$ — семейство выпуклых направленных нормальных подгрупп группы G. Если пересечение подгрупп M_i равно $\{e\}$, то существует инъективный гомоморфизм Φ из G в декартово произведение $\mathcal{AO}$-групп G/M_i, где Φ сохраняет отношение почти ортогональности.*

Говорят, что ро-группа G является *группой с интерполяционным условием*, если для любых элементов a_1, a_2, b_1, b_2 группы G справедливость неравенств $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$ влечёт существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$.

Используя данное определение, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $\{G_i \mid i \in I\}$ — семейство ро-групп и $\bar{G}$ — декартово произведение ро-групп G_i. Если для каждого $i \in I$ G_i — группа с интерполяционным условием, то $\bar{G}$ является группой с интерполяционным условием.*

Направленную группу с интерполяционным условием называют *группой Рисса* (см. [4]). Если группа Рисса G является $\mathcal{AO}$-группой, то говорят, что G является *pl-группой* (см. [9]).

Следующее утверждение является следствием теорем 2 и 4.

Следствие 5. *Пусть $\{G_i \mid i \in I\}$ — семейство ро-групп, $\bar{G}$ — декартово произведение ро-групп G_i. Если G_i является pl-группой для каждого $i \in I$, то $\bar{G}$ — pl-группа.*

Обозначим через GA полупрямое произведение подгруппы A и дополнительной подгруппы G. В разделе 3 исследуются свойства полупрямых произведений ро-групп. Там будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 6. *Если GA — полупрямое произведение A и G, A и G являются группами Рисса и $g^{-1}A^+g \subseteq A^+$ для всех $g \in G^+$, то GA — группа Рисса.*

Теорема 7. *Если GA — полупрямое произведение A и G, A и G — $\mathcal{AO}$-группы и $g^{-1}A^+g \subseteq A^+$ для всех $g \in G^+$, то GA — $\mathcal{AO}$-группа.*

Основываясь на теоремах 6 и 7, можно получить следующий результат.

Следствие 8. *Если GA — полупрямое произведение A и G, A и G — pl-группы и $g^{-1}A^+g \subseteq A^+$ для всех $g \in G^+$, то и GA является pl-группой.*

Пусть A и B — произвольные группы, $\bar{A} = \overline{\prod_{b \in B}} A^b$ — декартово произведение групп A^b, где $A^b \cong A$ для каждого $b \in B$. Полупрямое произведение $B\bar{A}$ называется *декартовым сплетением* ($A \operatorname{Wr} B$) групп A и B (см., например, [1]).

Пользуясь теоремами 1 и 7, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть A и B — $\mathcal{AO}$-группы. Если $b^{-1}A^+b \subseteq A^+$ для каждого $b \in B^+$, то декартово сплетение $A \operatorname{Wr} B$ является $\mathcal{AO}$-группой.*

Из теорем 4 и 6 можно вывести следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть A и B — группы Рисса. Если $b^{-1}A^+b \subseteq A^+$ для каждого $b \in B^+$, то декартово сплетение $A \operatorname{Wr} B$ является группой с интерполяционным условием.*

Следующее утверждение выводится из следствий 5 и 8.

Теорема 11. *Пусть A и B — pl-группы. Если $b^{-1}A^+b \subseteq A^+$ для каждого $b \in B^+$, то декартово сплетение $A \operatorname{Wr} B$ является pl-группой.*

2. Декартовы произведения ро-групп

В этом разделе содержатся доказательства теорем 1—3.

Для того чтобы доказать теорему 1, докажем следующую лемму.

Лемма 12. *Пусть G_i для каждого $i \in I$ — ро-группа, $\bar{G}$ — декартово произведение ро-групп G_i и a_i и b_i для каждого $i \in I$ — некоторые почти ортогональные* *элементы группы G_i. Пусть $f, g \in \bar{G}$ — функции, определённые по следующему правилу: $f(i) = a_i$ и $g(i) = b_i$ для каждого $i \in I$. Тогда f и g — почти ортогональные элементы группы $\bar{G}$.*

Доказательство. Из определения функций f и g следует, что $f, g \in \bar{G}^+$. Возьмём $h \in \bar{G}$, для которого справедливы неравенства $h \leqslant f$ и $h \leqslant g$. Тогда $h(i) \leqslant f(i)$ и $h(i) \leqslant g(i)$ для каждого $i \in I$. Это означает, что $h(i) \leqslant a_i$ и $h(i) \leqslant b_i$ для всех $i \in I$. Так как a_i и b_i — почти ортогональные элементы группы G_i, то $\bigl(h(i)\bigr)^n \leqslant a_i$ и $\bigl(h(i)\bigr)^n \leqslant b_i$ для каждого целого положительного числа n. Таким образом, $h^n(i) \leqslant f(i)$ и $h^n(i) \leqslant g(i)$ для каждого $i \in I$. Следовательно, $h^n \leqslant f$ и $h^n \leqslant g$ для каждого целого положительного числа n в группе $\bar{G}$, что завершает доказательство. □

Доказательство теоремы 1. Предположим, что $h \in \bar{G}$. Из условия теоремы следует, что каждый элемент $h(i) \in G_i$ можно представить в виде $h(i) = a_i b_i^{-1}$, где a_i и b_i для каждого $i \in I$ — почти ортогональные элементы группы G_i.

Рассмотрим функции $f, g \in \bar{G}$, для которых $f(i) = a_i$ и $g(i) = b_i$ для всех $i \in I$. Имеем $h(i) = f(i)\bigl(g(i)\bigr)^{-1} = fg^{-1}(i)$ для каждого $i \in I$. Таким образом, $h = fg^{-1}$, где согласно лемме 12 функции f и g — почти ортогональные элементы в группе $\bar{G}$, что и требовалось доказать. □

Допустим теперь, что $\bar{G}$ является декартовым произведением ро-групп G_i для $i \in I$. Подгруппа H группы $\bar{G}$ называется *прямым произведением* ро-групп G_i, если $f \in H$ означает, что $f(i) \neq e$ только для конечного множества индексов.

Следующее утверждение является следствием теоремы 1.

Следствие 13. *Если G_i для каждого $i \in I$ — $\mathcal{AO}$-группа, то прямое произведение групп G_i также является $\mathcal{AO}$-группой.*

Доказательство теоремы 2. Известно, что M_i для каждого $i \in I$ — нормальная подгруппа группы $\bar{G}$.

Если $f_1, f_2 \in M_i$, $g \in \bar{G}$ и $f_1 \leqslant g$ и $g \leqslant f_2$, то $f_1(j) \leqslant g(j)$ и $g(j) \leqslant f_2(j)$ для каждого $j \in I$. Из этого следует, что $e \leqslant g(j)$ и $g(j) \leqslant e$ для всех $j \neq i$ ($j \in I$). Значит, $g(j) = e$ для всех $j \neq i$ ($j \in I$). Таким образом, $g \in M_i$, и M_i — выпуклая подгруппа группы $\bar{G}$.

Допустим, что $f, g \in M_i$. Так как G_i — направленная группа, то существует элемент $u_i \in G_i$, для которого $f(i) \leqslant u_i$ и $g(i) \leqslant u_i$. Рассмотрим функцию $h \in \bar{G}$, для которой $h(i) = u_i$ и $h(j) = e$ для всех $j \neq i$ ($j \in I$). Последнее влечёт верность соотношений $h \in M_i$, $f \leqslant h$ и $g \leqslant h$. Таким образом, M_i — направленная подгруппа группы $\bar{G}$. Следовательно, M_i — выпуклая направленная нормальная подгруппа группы $\bar{G}$.

Согласно [8, следствие 3.5] группа M_i является $\mathcal{AO}$-группой для каждого $i \in I$.

Известно, что существует изоморфизм групп $\Phi_i \colon M_i \to G_i$, определённый по следующему правилу: $\Phi_i(f) = f(i)$ для каждого $i \in I$.

Допустим, что функции f и g являются почти ортогональными элементами группы M_i для некоторого $i \in I$. Рассмотрим элементы $a = \Phi_i(f)$, $b = \Phi_i(g)$ и элемент $c \in G_i$, такой что $c \leqslant a$ и $c \leqslant b$. Это влечёт существование функции $h \in M_i$, для которой $h(i) = c$ и $h(j) = e$ для всех $j \neq i$ ($j \in I$). Последнее влечёт справедливость неравенств $c \leqslant \Phi_i(f)$ и $c \leqslant \Phi_i(g)$. Тогда $h(j) \leqslant f(j)$ и $h(j) \leqslant g(j)$ для каждого $j \in I$. Значит, $h \leqslant f$ и $h \leqslant g$ в группе M_i. Однако элементы f и g почти ортогональны в группе M_i. Из этого следует, что $h^n \leqslant f$ и $h^n \leqslant g$ для каждого целого положительного числа n. Поэтому $h^n(i) \leqslant f(i)$ и $h^n(i) \leqslant g(i)$ для каждого целого положительного числа n. Таким образом, $c^n \leqslant a$ и $c^n \leqslant b$ для каждого целого положительного числа n. Значит, элементы $\Phi_i(f)$ и $\Phi_i(g)$ являются почти ортогональными элементами группы G_i. Следовательно, отображение Φ_i сохраняет отношение почти ортогональности.

Теперь рассмотрим элементы $a, b \in G_i$, образующие пару почти ортогональных элементов группы G_i для некоторого $i \in I$. В группе M_i существуют функции f и g, для которых $\Phi_i(f) = a$ и $\Phi_i(g) = b$. Допустим, что $h \in M_i$, $h \leqslant f$ и $h \leqslant g$ в группе M_i. Тогда $h(i) \leqslant f(i)$ и $h(i) \leqslant g(i)$ в группе G_i. Так как $f(i) = a$ и $g(i) = b$, получаем, что $\big(h(i)\big)^n \leqslant a$ и $\big(h(i)\big)^n \leqslant b$ для каждого целого положительного числа n. Это означает, что $h^n(j) \leqslant f(j)$ и $h^n(j) \leqslant g(j)$ для всех $j \in I$. Значит, $h^n \leqslant f$ и $h^n \leqslant g$ для каждого целого положительного числа n в группе M_i. Таким образом, отображение Φ_i^{-1} сохраняет отношение почти ортогональности. $\square$

Доказательство теоремы 3. Для всех $i \in I$ обозначим через G_i фактор-группу G/M_i. Так как M_i — выпуклая направленная нормальная подгруппа $\mathcal{AO}$-группы G, то G_i для каждого $i \in I$ — $\mathcal{AO}$-группа.

Если $a \in G$, то существует функция $f_a \in \bar{G} = \overline{\prod\limits_{i\in I}} G_i$, определённая по следующему правилу: $f_a(i) = aM_i$ для каждого $i \in I$. Согласно теореме 1 группа $\bar{G}$ — $\mathcal{AO}$-группа.

Рассмотрим отображение $\Phi\colon G \to \bar{G}$, определённое по следующему правилу: $\Phi(a) = f_a$ для каждого элемента $a \in G$. Для произвольных элементов $a, b \in G$ и каждого $i \in I$ справедливы следующие равенства:

$$\Phi(ab)(i) = f_{ab}(i) = abM_i = aM_i \cdot bM_i,$$

где

$$aM_i \cdot bM_i = f_a(i) \cdot f_b(i) = f_a f_b(i) = \Phi(a)\Phi(b)(i).$$

Из этого следует, что $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$. Значит, Φ — гомоморфизм.

Если $\Phi(a) = \Phi(b)$ для некоторых элементов $a, b \in G$, то $f_a = f_b$. Следовательно, $aM_i = bM_i$ для каждого $i \in I$. Отсюда следует, что $a^{-1}b \in M_i$ для всех $i \in I$. Это означает, что $a^{-1}b$ является элементом теоретико-множественного пересечения групп M_i. Из условия теоремы следует, что $a^{-1}b = e$, т. е. $a = b$. Таким образом, Φ — инъективное отображение.

Теперь допустим, что a и b — произвольные почти ортогональные элементы группы G. Тогда для каждого $i \in I$ смежные классы aM_i и bM_i являются почти ортогональными элементами группы G/M_i (см. [5, теорема 1]).

Рассмотрим функцию $h \in \bar{G}$, такую что $h \leqslant \Phi(a)$ и $h \leqslant \Phi(b)$. Тогда $h(i) \leqslant f_a(i)$ и $h(i) \leqslant f_b(i)$ для каждого $i \in I$. Следовательно, для всех $i \in I$ имеем, что $h(i) \leqslant aM_i$ и $h(i) \leqslant bM_i$ в группе G_i. Из сказанного выше следует, что $h^n(i) \leqslant aM_i$ и $h^n(i) \leqslant bM_i$ для каждого целого положительного числа n. Значит, $h^n(i) \leqslant f_a(i)$ и $h^n(i) \leqslant f_b(i)$ для всех $i \in I$ и для каждого целого положительного числа n. Таким образом, $h^n \leqslant f_a$ и $h^n \leqslant f_b$ в группе $\bar{G}$. Это означает, что $h^n \leqslant \Phi(a)$ и $h^n \leqslant \Phi(b)$ для каждого целого положительного числа n. Следовательно, $\Phi(a)$ и $\Phi(b)$ — почти ортогональные элементы группы $\bar{G}$, и отображение Φ сохраняет отношение почти ортогональности. $\square$

3. Полупрямые произведения ро-групп

Пусть A и G — произвольные группы. Группа GA называется *полупрямым произведением* подгруппы A и дополнительной подгруппы G, если $GA = \{ga \mid g \in G,\ a \in A\}$, A — нормальная подгруппа в GA, $G \cap A = \{e\}$ и $(g_1a_1)(g_2a_2) = g_1g_2a_1^{g_2}a_2$, где $a_1^{g_2} = g_2^{-1}a_1g_2$ для всех $g_1, g_2 \in G$ и $a_1, a_2 \in A$ (см., например, [1]).

Далее везде будем считать, что GA является полупрямым произведением A и G, G — направленная группа, A — ро-группа, $g^{-1}A^+g \subseteq A^+$ для всех $g \in G^+$ и

$$P = \{ga \in GA \mid \text{либо } g \in G^+ \setminus \{e\}, \text{ либо } g = e \text{ и } a \in A^+\}.$$

Прежде чем доказать основные результаты данного раздела, мы докажем несколько утверждений о подмножестве P.

Лемма 14. *P — полугруппа.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные элементы g_1a_1 и g_2a_2 из P. Для элемента $ga = (g_1a_1)(g_2a_2)$, где $g = g_1g_2 \in G$ и $a = a_1^{g_2}a_2$, получаем, что $ga = g_1g_2a_1^{g_2}a_2$. Так как A — нормальная подгруппа в GA, то $a_1^{g_2} \in A$. Из этого следует, что $a \in A$.

Допустим, что $g_1 \in G^+ \setminus \{e\}$ или $g_2 \in G^+ \setminus \{e\}$. Отсюда следует, что $ga \in P$.

Если $g_1 = g_2 = e$, то $a_1, a_2 \in A^+$. Значит, $a^{g_2} = a_1a_2 \in A^+$. Таким образом, $ga \in P$. $\square$

Лемма 15. *Если u — элемент группы GA, то $u^{-1}Pu \subseteq P$.*

Доказательство. Допустим, что $ga \in P$ и $u = g_1a_1 \in GA$ для $g, g_1 \in G$ и $a, a_1 \in A$. Тогда $u^{-1} = g_1^{-1}(a_1^{-1})^{g_1^{-1}}$ и

$$u^{-1}(ga)u = \left(g_1^{-1}(a_1^{-1})^{g_1^{-1}}\right)(gg_1a^{g_1}a_1) = g_2a_2,$$

где $g_2 = g_1^{-1}gg_1$ и $a_2 = (a_1^{-1})^{g_2}a^{g_1}a_1$.

Если $g \in G^+ \setminus \{e\}$, то $g_2 \in G^+ \setminus \{e\}$. Значит, $u^{-1}(ga)u \in P$.

Если $g = e$, то $a \in A^+$, $g_2 = e$ и $a_2 = a_1^{-1}a^{g_1}a_1$.

Так как G — направленная группа, то $g_1 = xy^{-1}$ для некоторых элементов $x, y \in G^+$ (см., например, [2, теорема 1, с. 23]). Значит, $a^{g_1} = a^{xy^{-1}} =$

$= y(x^{-1}ax)y^{-1}$ для $x, y \in G^+$ и $a \in A^+$. Это означает, что $a^{g_1} \in A^+$. Поэтому $a_2 \in A^+$. Следовательно, $u^{-1}(ga)u \in P$. □

Лемма 16. *Если* $P^{-1} = \{u \in GA \mid u^{-1} \in P\}$, *то* $P \cap P^{-1} = \{e\}$.

Доказательство. Допустим, что $ga \in P \cap P^{-1}$. Так как $ga \in P$, то либо

$$g \in G^+ \setminus \{e\}, \tag{1}$$

либо

$$g = e \quad \text{и} \quad a \in A^+. \tag{2}$$

Так как $ga \in P^{-1}$, то $g^{-1}(a^{-1})^{g^{-1}} \in P$. Это значит, что либо

$$g^{-1} \in G^+ \setminus \{e\}, \tag{3}$$

либо

$$g^{-1} = e \quad \text{и} \quad a^{-1} \in A^+. \tag{4}$$

Комбинируя (1) и (3), или (1) и (4), или (2) и (3), получаем противоречие. Значит, $g = e$, $a \in A^+$ и $a^{-1} \in A^+$. Таким образом, $a = e$ и $ga = e$. □

Следствие 17. *Подмножество* P *является положительным конусом группы* GA.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из лемм 14—16 и [2, теорема 1, с. 23]. □

Справедливость следующего утверждения следует из определения множества P.

Замечание 18. Если $g_1a_1, g_2a_2 \in GA$, где $g_1a_1 \leqslant g_2a_2$, то либо $g_1 < g_2$, либо $g_1 = g_2$ и $a_1 \leqslant a_2$.

Теорема 19. *Группа* GA *является ро-группой с положительным конусом* P, A — *выпуклая подгруппа группы* GA, *и* $G \cap P = G^+$.

Доказательство. Согласно следствию 17 GA — ро-группа и $(GA)^+ = P$.

Допустим, что $a_1 \leqslant ga \leqslant a_2$ для некоторых $a, a_1, a_2 \in A$ и $g \in G$. По замечанию 18 получаем, что $g = e$ и $ga = a \in A$. Таким образом, A — выпуклая подгруппа в GA. Далее доказательство очевидно. □

Доказательство данной теоремы для правоупорядоченных групп можно найти в [3, теорема 1.6.3].

Доказательство теоремы 6. Из условия теоремы следует, что G и A — направленные группы. Рассмотрим $ga \in GA$, где $g \neq e$ и $a \neq e$. Тогда существует элемент $v \in G$, такой что $g \leqslant v$ и $e \leqslant v$. Если $g < v$, то $ga \leqslant v$ и $e \leqslant v$.

Допустим, что $g = v$, тогда найдётся элемент $b \in A$, такой что $a \leqslant b$ и $e \leqslant b$. Таким образом, $ga \leqslant gb$ и $e \leqslant gb$. Следовательно, GA — направленная группа.

Рассмотрим элементы $u_1, u_2, u_3, u_4 \in GA$, такие что $u_1, u_2 \leqslant u_3, u_4$. Мы должны найти такой элемент $v \in GA$, что $u_1, u_2 \leqslant v \leqslant u_3, u_4$.

Допустим, что $u_i = g_ia_i$ для $i = 1, 2, 3, 4$, где $g_i \in G$ и $a_i \in A$. Согласно замечанию 18 мы заключаем, что:

либо $g_1 < g_3$, либо $g_1 = g_3$ и $a_1 \leqslant a_3$;
либо $g_1 < g_4$, либо $g_1 = g_4$ и $a_1 \leqslant a_4$;
любо $g_2 < g_3$, либо $g_2 = g_3$ и $a_2 \leqslant a_3$;
либо $g_2 < g_4$, либо $g_2 = g_4$ и $a_2 \leqslant a_4$.

Допустим, что множество $\{k, m, s, t\}$ — это множество $\{1, 2, 3, 4\}$, где порядок чисел может быть другим. Рассмотрим восемь случаев.

Случай 1. Пусть $g_k = g_t$, $g_k < g_s$, $g_m < g_s$, $g_m < g_t$. Тогда $u_m \leqslant u_k \leqslant u_t \leqslant u_s$.

Случай 2. Пусть $g_k = g_t$, $g_k < g_s$, $g_m = g_s$, $g_m = g_t$. В этом случае мы приходим к противоречию.

Случай 3. Пусть $g_k = g_t$, $g_k < g_s$, $g_m = g_s$, $g_m < g_t$. В этом случае также получаем противоречивое утверждение.

Случай 4. Допустим, что $g_i = \bar{g}$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Так как в силу сказанного выше $a_1 \leqslant a_3$, $a_1 \leqslant a_4$, $a_2 \leqslant a_3$ и $a_2 \leqslant a_4$, то существует элемент $a \in A$, такой что $a_1, a_2 \leqslant a \leqslant a_3, a_4$. В этом случае $v = \bar{g}a$.

Случай 5. Пусть $g_k = g_t$, $g_k < g_s$, $g_m < g_s$, $g_m = g_t$, где $k, m \in \{1, 2\}$ и $s, t \in \{3, 4\}$. Тогда $g_k = g_t = g_m < g_s$. Так как $a_k \leqslant a_t$ и $a_m \leqslant a_t$, то $v = u_t$.

Случай 6. Пусть $g_k < g_t$, $g_k < g_s$, $g_m = g_s$, $g_m = g_t$, где $k, m \in \{1, 2\}$ и $s, t \in \{3, 4\}$. Тогда $g_k < g_s = g_m = g_t$. Так как $a_m \leqslant a_s$ и $a_m \leqslant a_t$, то $v = u_m$.

Случай 7. Пусть $g_1 < g_3$, $g_1 < g_4$, $g_2 < g_3$, $g_2 < g_4$. По условию теоремы существует такой элемент $g \in G$, что $g_1, g_2 \leqslant g \leqslant g_3, g_4$.

Допустим, что либо $g = g_1$, либо $g = g_2$. Так как A — направленная группа, то существует такой элемент $c \in A$, что $a_1 \leqslant c$ и $a_2 \leqslant c$. В этом случае $v = gc$.

Если либо $g = g_3$, либо $g = g_4$, то, рассуждая аналогично, получим, что $v = gd$ для некоторого элемента $d \in A$, такого что $d \leqslant a_3$ и $d \leqslant a_4$.

Случай 8. Пусть $g_1 < g$, $g_2 < g$, $g < g_3$, $g < g_4$. В этом случае $v = g$.

Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Для доказательства теоремы 7 нам нужно доказать несколько утверждений.

Лемма 20. *Если $g \in G^+ \setminus \{e\}$, то $a < g$ для всех $a \in A$.*

Доказательство. По условию леммы $ga^{-1} \in P$ для каждого элемента $a \in A$. Из этого следует, что $e \leqslant ga^{-1}$ в группе GA. Это означает, что $a \leqslant g$. Так как $G \cap A = \{e\}$ и $g \neq e$, то $a < g$. $\square$

Замечание 21. Для произвольного элемента ga группы GA верно, что $(ga)^n = g^n b$ для некоторого $b \in A$.

Доказательство. По определению группа GA получаем

$$(ga)^2 = g^2 a^g a, \quad (ga)^3 = g^3 a^{g^2} a^g a, \quad (ga)^4 = g^4 a^{g^3} a^{g^2} a^g a.$$

Индукцией по n выводим, что

$$(ga)^n = g^n a^{g^{n-1}} a^{g^{n-2}} \cdots a^g a. \qquad \square$$

Лемма 22. *Если a и b — произвольные почти ортогональные элементы группы A, то они являются почти ортогональными элементами группы GA.*

Доказательство. Рассмотрим такой элемент $gc \in GA$, что $gc \leqslant a$ и $gc \leqslant b$. По замечанию 18 либо $g < e$, любо $c \leqslant a, b$. В первом случае мы получаем $g^n < e$. По замечанию 21 из этого следует, что $(gc)^n \leqslant a$ и $(gc)^n \leqslant b$ для каждого целого положительного числа n.

Если $g = e$, то $(gc)^n = c^n$, где по условию леммы $c^n \leqslant a$ и $c^n \leqslant b$ для каждого целого положительного числа n. Это завершает доказательство леммы. □

Лемма 23. *Если g_1 и g_2 — некоторые почти ортогональные элементы группы G, такие что $g_1 \neq e$ и $g_2 \neq e$, то $g_1 a$ и $g_2 b$ являются почти ортогональными элементами группы GA для любых элементов $a, b \in A$.*

Доказательство. Допустим, что $gc \leqslant g_1 a$ и $gc \leqslant g_2 b$ для некоторого элемента $gc \in GA$. По замечанию 18 мы должны рассмотреть несколько возможностей:

1) $g < g_1$ и $g < g_2$;
2) $g < g_1$ и $g = g_2$;
3) $g = g_1$ и $g < g_2$;
4) $g = g_1 = g_2$ и $c \leqslant a, b$.

Согласно [6, лемма 4] элементы g_1 и g_2 не могут быть сравнимы. Это означает, что $g < g_1$ и $g < g_2$. По условию леммы $g^n \leqslant g_1$ и $g^n \leqslant g_2$ для каждого целого положительного числа n. Остальное верно в силу замечания 21. □

Доказательство теоремы 7. Допустим, что $x = ga \in GA$. Если $x \in P$, то $x = xe^{-1}$, где x и e — почти ортогональные элементы группы GA. Если $x \in P^{-1}$, то $x = e(x^{-1})^{-1}$, где x^{-1} и e — почти ортогональные элементы группы GA.

Допустим, что $x \notin P$ и $x \notin P^{-1}$. Если $g = e$, то $x \in A$. По условию теоремы существуют элементы $u, v \in A$, для которых $x = uv^{-1}$, где u и v — почти ортогональные элементы группы A. В силу леммы 22 u и v являются почти ортогональными элементами группы GA.

Допустим, что $g \neq e$. По условию теоремы существуют элементы $g_1, g_2 \in G$, такие что $g = g_1 g_2^{-1}$, а g_1 и g_2 являются почти ортогональными элементами группы G. Тогда

$$x = (g_1 g_2^{-1})a = g_1(g_2^{-1} a g_2) g_2^{-1} = g_1(g_2(g_2^{-1} a^{-1} g_2^{-1})^{-1} = g_1(g_2 b)^{-1}$$

для $b \in A$, где $b = g_2^{-1} a^{-1} g_2$. В силу сказанного выше $g_2 \neq e$. Так как по лемме 20 $g_2 b \in P$, то согласно лемме 23 элементы g_1 и $g_2 b$ являются почти ортогональными в группе GA. Это завершает доказательство теоремы. □

Используя следствия 8 и 13, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 24. *Пусть A и B — pl-группы. Если $b^{-1} A^+ b \subseteq A^+$ для каждого $b \in B^+$, то прямое сплетение $A \operatorname{wr} B$ (см. [1]) является pl-группой.*

Литература

[1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1972.
[2] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[3] Копытов В. М., Медведев Н. Я. Правоупорядоченные группы. — Новосибирск: Научная книга, 1996.

[4] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[5] Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах AO-групп // Универсальная алгебра и её приложения. Тр. участников междунар. семинара. — Волгоград: Перемена, 2000. — С. 287—294.

[6] Ширшова Е. Е. Об обобщении понятия ортогональности и группах Рисса // Мат. заметки. — 2001. — Т. 69, вып. 1. — С. 122—132.

[7] Ширшова Е. Е. Декартовы произведения AO-групп // Междунар. алгебр. конф. Тезисы докладов. — М., 2008. — С. 257—258.

[8] Shirshova E. E. On Archimedean extensions of AO-groups // J. Math. Sci. — 2000. — Vol. 102, no. 6. — P. 4662—4666.

[9] Shirshova E. E. On groups with the almost orthogonality condition // Commun. Algebra. — 2000. — Vol. 28, no. 10. — P. 4803—4818.