Случайный процесс в однородном гауссовском поле

В. И. АЛХИМОВ
Московский городской психолого-педагогический университет
e-mail: alvaliv@list.ru

УДК 519.2

Ключевые слова: случайный процесс, однородное гауссовское поле, корреляционная функция, ренормализационная группа.

Аннотация

Рассмотрен случайный процесс в пространственно-однородном и стационарном во времени гауссовском поле $V(\mathbf{q}, t)$ с нулевым средним, $\mathbf{E}V = 0$, и корреляционной функцией $W(|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|, |t-t'|) \equiv \mathbf{E}[V(\mathbf{q},t)V(\mathbf{q}',t')]$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}^+$, где d — размерность евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Для усреднённой по всем реализациям случайного поля V некоторой «плотности» $G(r,t)$ известной физической системы установлено интегральное уравнение, аналогичное известному уравнению Дайсона. Инвариантность этого уравнения относительно непрерывной группы ренормировочных преобразований обусловила использование ренормгруппового метода, который в случае $1 < d < 4$ оказался эффективным для отыскания асимптотики функции $G(r,t)$, когда $r \to \infty$ и $t \to \infty$.

Abstract

V. I. Alkhimov, Random process in a homogeneous Gaussian field, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 2, pp. 3—21.

We consider a random process in a spatial-temporal homogeneous Gaussian field $V(\mathbf{q}, t)$ with the mean $\mathbf{E}V = 0$ and the correlation function $W(|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|, |t-t'|) \equiv \equiv \mathbf{E}[V(\mathbf{q},t)V(\mathbf{q}',t')]$, where $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}^+$, and d is the dimension of the Euclidean space $\mathbb{R}^d$. For a «density» $G(r,t)$ of the familiar model of a physical system averaged over all realizations of the random field V, we establish an integral equation which has the form of the Dyson equation. The invariance of the equation under the continuous renormalization group allows using the renormalization group method to find an asymptotic expression for $G(r,t)$ as $r \to \infty$ and $t \to \infty$.

1. Введение

В данной работе исследуется эволюция известной модели физической системы в случайной среде с пространственно-временной однородностью. Последнее означает, что все статистические характеристики среды инвариантны относительно трансляций в пространстве и времени. Эволюционный процесс рассматриваемой модели обусловлен двумя его основными механизмами: диссипацией

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 2, с. 3—21.

(например, диффузией) и самоорганизацией под действием внешних полей. В отличие от случая, рассмотренного в [2], влияние среды описывается здесь посредством статистически однородного в пространстве и стационарного во времени случайного поля $V(\mathbf{q},t)$, $\mathbf{q}\in\mathbb{R}^d$, $t\in\mathbb{R}^+$ (d — размерность пространства $\mathbb{R}^d$), где $V(\mathbf{q},t)$ — непрерывная и ограниченная снизу функция в $\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^+$. При этом случайная величина V подчинена гауссовскому распределению с нулевым средним, $\mathbf{E}V=0$, и корреляционной функцией

$$W(|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|,|t-t'|)\equiv\mathbf{E}[V(\mathbf{q},t)V(\mathbf{q}',t')].$$

В этом случае все характеристики поля $V(\mathbf{q},t)$ выражаются в терминах корреляционной функции $W(r,t)$, ограниченной и интегрируемой вместе со своими производными на $\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^+$. Кроме того, предполагается, что величина $W(r,t)$ достаточно быстро стремится к нулю, когда $r/L\to\infty$ и $t/T\to\infty$, где L и T — характеристические масштабы длины и времени (например, пространственный и временной радиусы корреляции функции $W(r,t)$ соответственно). Обозначим через $\rho(\mathbf{q},t;\mathbf{q}_0)$ некоторую «плотность» системы (например, плотность числа частиц). Запишем эволюционное уравнение для системы в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=D\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2\rho}{\partial q_j^2}-V(\mathbf{q},t)\rho,\quad D>0,\tag{1}$$

начальное условие имеет вид $\rho(\mathbf{q},0;\mathbf{q}_0)=\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}_0)$, где $\delta(\mathbf{q})$ — дельта-функция Дирака, а D — некоторый параметр системы (например, коэффициент диффузии). Это параболическое дифференциальное уравнение описывает суперпозицию процессов диффузии (или распространения тепла) и ветвления (или размножения и гибели). Решение уравнения (1), стремящееся к нулю при $q\to\infty$, можно представить с помощью формулы Фейнмана—Каца [4, 7, 8] следующим образом:

$$\rho(\mathbf{q},t;\mathbf{q}_0)=$$
$$=\lim_{N\to\infty}(4\pi\tau D)^{-Nd/2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\ldots\int\limits_{\mathbb{R}^d}\exp\biggl(-\sum_{n=1}^{N}\biggl[\frac{(\mathbf{q}_n-\mathbf{q}_{n-1})^2}{4D\tau}+\tau V(q_n,t_n)\biggr]\biggr)\prod_{n=1}^{N-1}d\mathbf{q}_n,\tag{2}$$

где $\tau=t/N$, $t_n=n\tau$, $n=1,2,\ldots,N$, $\mathbf{q}_n=\mathbf{q}(t_n)$, $\mathbf{q}_0=\mathbf{q}(0)$, $\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)$.

Однако нас будет интересовать «усреднённая плотность» $G(r,t)$, определяемая равенством

$$G(r,t)\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^d}d\mathbf{q}\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}_0-\mathbf{r})\mathbf{E}\rho(\mathbf{q},t;\mathbf{q}_0),\tag{3}$$

точнее, её асимптотическое поведение при больших значениях r/L и t/T. Отметим, что в формуле (3) выполняются два независимых функциональных интегрирования: одно — по пространству траекторий $\{\mathbf{q}\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^d\}$, а другое — по всем реализациям случайного поля V.

В настоящей работе для функции φ, полученной в результате двукратного интегрального преобразования «усреднённой плотности» G, установлено замкнутое уравнение, аналогичное известному уравнению Дайсона. Последнее оказалось инвариантным относительно непрерывной группы так называемых ренормировочных преобразований, что инициировало введение инвариантного спектрального параметра B, непосредственно связанного с функцией φ. Вследствие этой инвариантности величина B удовлетворяет дифференциальному уравнению Ли, при помощи которого удобно отыскивать асимптотику функции $G(r,t)$, когда $r/L \to \infty$ и $t/T \to \infty$. Для реализации предложенного метода в данной работе использовано факторизованное представление корреляционной функции $W(r,t) = \omega(r)T^{-2}\exp(-t/T)$, благодаря которому получена асимптотика функции $G(r,t)$ для малых и больших значений параметра $\bar{\omega} = \sup\limits_{r\geqslant 0}\omega(r)$ при условии $1 < d < 4$.

2. Основное уравнение

Усредним обе части равенства (2) по гауссовскому распределению поля V, затем воспользуемся теоремой Фубини и соотношением

$$\mathbf{E}\exp\left[-\tau\sum_{n=1}^{N} V(\mathbf{q}_n, t_n)\right] = \exp\left[\tau^2 \sum_{0\leqslant m<n\leqslant N} W\left(|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_m|\,, |t_n - t_m|\right)\right]$$

для больших значений N. Учитывая определение функции $G(r,t)$ в (3), получим для неё формулу

$$G(r,t) = \lim_{N\to\infty}\int \frac{\exp(-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})g_N(p)\,d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}, \tag{4}$$

где

$$g_N(p) = \int P_{1N}\prod_{n=1}^{N}\theta_p(r_n)\,d\mathbf{r}_n, \tag{5}$$

$$P_{mn} = \prod_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1+\varepsilon_{ij}), \tag{6}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon(|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_{i-1}|, t_j - t_{i-1}) = \varepsilon\left(\left|\sum_{i\leqslant k\leqslant j}\mathbf{r}_k\right|, (j-i+1)\tau\right), \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1}, \tag{7}$$

$$\varepsilon(r,t) = \exp[\tau^2 W(r,t)] - 1, \tag{8}$$

а функция $\theta_p(r)$ определяется равенством

$$\theta_p(r) = (4\pi\tau D)^{-d/2}\exp\left[i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \frac{r^2}{4}\,\tau D\right], \tag{9}$$

из которого следует, что

$$\Theta(p) \equiv \int \theta_p(r)\, d\mathbf{r} = \exp[-\tau D p^2]. \tag{10}$$

Согласно предполагаемым условиям ограниченности и суммируемости функции $W(r,t)$ имеем

$$\tau^2 \sum_{0\leqslant m<n\leqslant N} W(|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_m|, |t_n - t_m|) \leqslant \tau^2 \sum_{n=1}^{N} (N-n+1)\bar{W}(n\tau) < KN\tau, \tag{11}$$

где

$$K = \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t \left(1 - \frac{t'}{t}\right) \bar{W}(t')\, dt', \quad \bar{W}(t) = \sup_{r\geqslant 0} W(r,t).$$

Поэтому из равенств (5)—(8) и (10) вытекает неравенство

$$|g_N(p)| < \exp[N\tau(K - Dp^2)]. \tag{12}$$

Рассмотрим разложение произведения P_{1N} из (6) в ряд по ε_{ij}:

$$P_{1N} = 1 + \sum_{k\geqslant 1} \left(\sum_{i_1\leqslant j_1} \sum_{i_2\leqslant j_2} \dots \sum_{i_k\leqslant j_k} \varepsilon_{i_1 j_1}\varepsilon_{i_2 j_2}\cdots\varepsilon_{i_k j_k} \right), \tag{13}$$

где индексы в каждом из сомножителей $\varepsilon_{i_1 j_1}, \varepsilon_{i_2 j_2}, \dots, \varepsilon_{i_k j_k}$ расположены в порядке неубывания, т. е. $i_k \leqslant j_k$ для $k \geqslant 1$, причём первые индексы этих сомножителей в каждом члене указанной суммы тоже образуют неубывающую последовательность, т. е. $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k$, и ни одна пара индексов не совпадает: $(i_l j_l) \neq (i_m j_m)$ при $l \neq m$. Сомножители $\varepsilon_{i_l j_1}$ и $\varepsilon_{i_m j_m}$ называются связанными, если $i_l \leqslant i_m \leqslant j_l$, и несвязанными, если $j_l \leqslant i_m$. Любое произведение сомножителей в (13), расположенных в порядке неубывания их первых индексов, назовём комплексом, если в этом произведении каждый сомножитель начиная со второго связан по крайней мере с одним из предшествующих сомножителей. Тогда любой член суммы в (13) либо является комплексом, либо распадается на произведение некоторого числа комплексов. Обозначим через f_{ij} сумму всех комплексов, зависящих от векторов $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_j$ и интервалов времени $t_k - t_{k-1} = \tau$, где $i \leqslant k \leqslant j$, и назовём её блоком. Это означает, что

$$\begin{aligned} f_{ij} = \varepsilon_{ij}P_{ij} &+ \sum_{i<k\leqslant l<j} \varepsilon_{il}\varepsilon_{kj} P_{i\,k-1}P_{kl}P_{l+1\,j} + \\ &+ \sum_{i<k<l\leqslant m<n<j} \{\varepsilon_{il}\varepsilon_{kn}\varepsilon_{mj} P_{i\,k-1}P_{kl}P_{l+1\,m-1}P_{mn}P_{n+1\,j} + \\ &+ (\varepsilon_{in}\varepsilon_{km}\varepsilon_{lj} + \varepsilon_{im}\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ln} + \varepsilon_{im}\varepsilon_{kn}\varepsilon_{lj}) P_{i\,k-1}P_{k\,l-1}P_{lm}P_{m+1\,n}P_{n+1\,j}\} + \dots, \end{aligned} \tag{14}$$

где в правой части под знаком первой суммы фигурирует всего лишь один представитель комплексов второго порядка по ε_{ij}, в то время как под знаком второй суммы находятся четыре неэквивалентных представителя комплексов третьего порядка относительно ε_{ij}. Для полного числа N_n неэквивалентных представителей комплексов n-го порядка по ε_{ij} имеет место асимптотическая оценка $N_n = O\big((2n-1)!!\big)$ при $n \to \infty$. Нетрудно убедиться, что произведение P_{1N} теперь можно разложить по блокам f_{ij} так, что каждый член суммы является либо блоком, либо произведением некоторого числа блоков:

$$P_{1N} = 1 + \sum_{k\geqslant 1}\Bigg[\sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_1+j_1<\ldots<i_k\leqslant i_k+j_k\leqslant N} f_{i_1\, i_1+j_1}\cdots f_{i_k\, i_k+j_k}\Bigg]. \qquad (15)$$

Подставляя разложение (15) в равенство (5), мы получим после надлежащего интегрирования формулу

$$g_N(p) = \sum_{m\geqslant 0}\sum_{n=0}^{N}\frac{(N-n+m)!}{(N-n)!\,m!}\Theta^{N-n}(p)F_n^{(m)}(p), \qquad (16)$$

где

$$F_n^{(0)}(p)\equiv 0, \quad F_n^{(m)}(p) = \sum_{n_1+\ldots+n_m=n} f_{n_1}(p)\cdots f_{n_m}(p), \quad m\geqslant 1, \qquad (17)$$

$$f_0(p)\equiv 0, \quad f_n(p) = \int f_{1n}\prod_{k=1}^{n}\theta_p(r_k)\,d\mathbf{r}_k, \quad n\geqslant 1, \qquad (18)$$

f_{1n}, как указано выше, обозначает блок, составленный из всех комплексов, зависящих от векторов $\{\mathbf{r}_k\}$ и промежутков времени $t_k - t_{k-1} = \tau$, $1\leqslant k\leqslant n$, а множитель $(N-n+m)!/(N-n)!\,m!$ равен числу способов размещения m частичных отрезков, состоящих последовательно из $n_1, n_2, \ldots, n_m$ звеньев (общее число звеньев равно n) и расположенных внутри одного отрезка, состоящего из N звеньев, так, чтобы при этом сохранялась последовательность расположения частичных отрезков.

С помощью формулы Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz\, z^{n_1+\ldots+n_m-n-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{m} n_j = n,\\ 0, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{m} n_j \neq n,\end{cases}$$

в которой замкнутый контур γ охватывает начало координат на комплексной z-плоскости, равенство (17) приводится к виду

$$F_n^{(m)}(p) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{dz}{z^{n+1}} f^m(p,z), \qquad (19)$$

где

$$f(p,z) \equiv \sum_{n\geqslant 0} z^n f_n(p). \qquad (20)$$

Подставим теперь выражение (19) в (16) и распространим суммирование по m от 0 до ∞, а по n — от $-\infty$ до N, что не оказывает влияния на конечный результат. Тогда, используя формулу

$$(1-x-y)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!\,n!}x^m y^n, \quad |x+y|<1,$$

приведём выражение (16) к виду

$$g_N(p)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{dz}{z^{N+1}}[1-z\Theta(p)-f(p,z)]^{-1}, \tag{21}$$

где замкнутый контур γ, охватывающий начало координат $z=0$, выбран так, чтобы выполнялось неравенство

$$|z\Theta(p)+f(p,z)|<1. \tag{22}$$

Наконец, если определить производящую функцию

$$g(p,z)\equiv\sum_{N\geqslant 0} z^N g_N(p), \tag{23}$$

то из равенства (21) можно получить уравнение

$$g^{-1}(p,z)=g_0^{-1}(p,z)-f(p,z), \tag{24}$$

в котором

$$g_0^{-1}(p,z)=1-z\Theta(p).$$

Однако для того чтобы уравнение (24) было замкнутым, необходимо установить непосредственную связь между производящими функциями $f(p,z)$ и $g(p,z)$. Подставим определённое в (14) выражение для f_{1n} в равенство (18) и запишем величину ε_{mn} в виде

$$\varepsilon_{mn}=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}i}\oint_\gamma dz\, z^{m-n-2}\int d\mathbf{p}\exp\Bigl[-i\mathbf{p}\cdot\sum_{j=m}^{n}\mathbf{r}_j\Bigr]\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p},z),$$

где функция $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p},z)$ определена равенством

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p},z)=\sum_{N\geqslant 0}^{N} z^N\int d\mathbf{r}\exp[i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}]\varepsilon(r,\tau N) \tag{25}$$

в соответствии с определениями ε_{mn} и $\varepsilon(r,t)$ в (7) и (8). Выполняя затем интегрирование в (18) по $\mathbf{r}_m$, $1\leqslant m\leqslant n$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} f_n(p)={}&\frac{1}{(2\pi)^{d+1}i}\oint_\gamma\frac{dz_1}{z_1^{n+1}}\int d\mathbf{p}_1\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_1,z_1)g_n(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)+\\ &+\sum_{1\leqslant l\leqslant m\leqslant n}\frac{1}{[(2\pi)^{d+1}i]^2}\oint_\gamma\frac{dz_1}{z_1^{m+1}}\oint_\gamma\frac{dz_2}{z_2^{n-l+2}}\iint d\mathbf{p}_1\,d\mathbf{p}_2\,\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_1,z_1)\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_2,z_2)\times\\ &\times g_{l-1}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)g_{m-l+1}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)g_{n-m}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2)+\ldots, \end{aligned} \tag{26}$$

которым мы воспользуемся в (20). В результате мы получим для $f(p,z)$ ряд

$$f(p,z) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}i} \oint\limits_{\gamma} \frac{dz_1}{z_1} \int d\mathbf{p}_1\, \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_1, z_1) g\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, \frac{z}{z_1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{[(2\pi)^{d+1}i]^2} \oint\limits_{\gamma} \frac{dz_1}{z_1} \oint\limits_{\gamma} \frac{dz_2}{z_2} \iint d\mathbf{p}_1\, d\mathbf{p}_2\, \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_1, z_1)\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_2, z_2) \times$$

$$\times g\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, \frac{z}{z_1}\right) g\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \frac{z}{z_1 z_2}\right) g\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2, \frac{z}{z_2}\right) + \ldots, \tag{27}$$

посредством которого описывается искомая связь между функциями $f(p,z)$ и $g(p,z)$.

Ряд в (27) удобно представить в символической форме

$$f(p,z) =$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} N_n \oint\limits_{\gamma} \left\{\frac{dz'}{2\pi i z'}\right\}^n \int \left\{\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d}\right\}^n \{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}', z')\}^n \left\{g\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \frac{z}{z'}\right)\right\}^{2n-1}, \tag{28}$$

чтобы продемонстрировать инвариантность уравнения (24) относительно мультипликативных преобразований

$$g \to g' = \alpha g, \quad g_0 \to g_0' = \alpha g_0, \quad \tilde{\varepsilon} \to \tilde{\varepsilon}' = \alpha^{-2}\tilde{\varepsilon}, \quad f \to f' = \alpha^{-1} f, \tag{29}$$

где α — не равный нулю параметр. Эти преобразования образуют непрерывную группу, называемую обычно ренормгруппой. Свойство (29) является исходной точкой для применения ренормгруппового метода к исследуемой здесь проблеме. Далее во всех формулах, содержащих производящие функции, перейдём от N к непрерывной переменной t. Для этого введём новую переменную E посредством равенства

$$z = z(E) \equiv \exp[-E\tau], \quad \operatorname{Re} E > K, \tag{30}$$

и запишем уравнение (24) в виде

$$\left[\tau g\big(p, z(E)\big)\right]^{-1} = \tau^{-1}(1 - \exp[-\tau(Dp^2 + E)]) -$$

$$- \sum_{n\geqslant 1} N_n \oint\limits_{\gamma} \left\{\frac{dz(E')}{2\pi i z(E')}\right\}^n \int \left\{\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d}\right\}^n \times$$

$$\times \left\{\tau^{-2}\tilde{\varepsilon}\big(\mathbf{p}', z(E')\big)\right\}^n \left\{\tau g\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \frac{z(E)}{z(E')}\right)\right\}^{2n-1}, \tag{31}$$

принимая во внимание свойство (29). Тогда вследствие неравенства

$$|g(p, z(E)| < [1 - \exp\tau(K - Dp^2 - \operatorname{Re} E)]^{-1}, \tag{32}$$

вытекающего из (12), (23) и (30), аналитическая в области функция $(1-z)g(p,z)$ является ограниченной внутри неё, и поэтому существует предел

$$\lim_{\tau\to 0} \tau g\big(p, z(E)\big) \equiv \varphi(p, E), \tag{33}$$

для которого из (32) выводится неравенство

$$|\varphi(p,E)| \leqslant (Dp^2 + \operatorname{Re} E - K)^{-1}. \tag{34}$$

Так как в соответствии с (25), (30) и (8) верна асимптотическая формула

$$\tau^{-2}\tilde{\varepsilon}\bigl(p, z(E)\bigr) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-Et_n) \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{r} \exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) W(r, t_n), \quad \tau \to 0, \tag{35}$$

и вследствие определения (30) имеем

$$z^{-1}(E)\, dz(E) = -\tau\, dE, \tag{36}$$

заключаем, что

$$w(p,E) = \lim_{\tau\to 0} \tau^{-1}\tilde{\varepsilon}\bigl(p, z(E)\bigr) = \int\limits_0^{\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{r} \exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et) W(r,t) \tag{37}$$

есть пространственно-временной спектр случайного поля $V(r,t)$. Принимая во внимание соотношения (33), (35)—(37), перейдём к пределу в уравнении (31) при $\tau \to 0$. В результате получим для функции $\varphi(p,E)$ основное уравнение

$$\varphi^{-1}(p,E) = \varphi_0^{-1}(p,E) - F(p,E;w;\varphi), \tag{38}$$

где

$$\varphi_0^{-1}(p,E) = Dp^2 + E,$$

а функция $F(p,E;w;\varphi)$ представлена в виде ряда

$$\begin{aligned} F(p,E;w;\varphi) = \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE_1}{2\pi i} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} w(\mathbf{p}_1, E_1)\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1, E-E_1) + \\ + \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE_1}{2\pi i} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE_2}{2\pi i} \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} w(\mathbf{p}_1, E_1) w(\mathbf{p}_2, E_2) \times \\ \times \varphi(\mathbf{p}-p_1, E-E_1)\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2, E-E_1-E_2)\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2, E-E_2) + \ldots, \end{aligned} \tag{39}$$

который для краткости запишем в символической форме

$$\begin{aligned} F(p,E;w;\varphi) = \sum_{n\geqslant 1} N_n \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \left\{\frac{dE'}{2\pi i}\right\}^n \int \left\{\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d}\right\}^n \times \\ \times \{w(\mathbf{p}', E')\}^n \{\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}', E-E')\}^{2n-1}. \end{aligned} \tag{40}$$

Из неравенства (22) и равенств (28), (30) и (40) нетрудно вывести, что переменная E должна удовлетворять, помимо неравенства в (30), требованию

$$\operatorname{Re} F(p,E;w;\varphi) \leqslant Dp^2 + \operatorname{Re} E, \tag{41}$$

которое обусловливает сходимость ряда в (39). Теперь воспользуемся формулой обращения для равенства (23), чтобы выразить функцию $g_N(p)$ через $g(p,z)$, и затем перейдём к пределу в (4), учитывая при этом равенства (30) и (33). В результате имеем

$$G(r,t) = \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE}{2\pi i} \exp(tE)\psi(r,E), \tag{42}$$

$$\psi(r,E) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \exp(-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\varphi(p,E). \tag{43}$$

Таким образом, определение функции $G(r,t)$ сводится к решению уравнения (38). Однако более реалистичной задачей является определение асимптотики функции $G(r,t)$ при $r/L \to \infty$ и $t/T \to \infty$, разумеется, если задана корреляционная функция $W(r,t)$.

3. Ренормгрупповые уравнения

Из формул (42), (43) следует, что для отыскания указанной асимптотики необходимо знать поведение функции $\varphi(p,E)$ при малых значениях p и $|E-E_0|$, где E_0 — наиболее удалённая вправо на действительной оси переменной E особая точка функции $\varphi(0,E)$, определяемая согласно (38) уравнением

$$\varphi^{-1}(0,E_0) \equiv 0. \tag{44}$$

Вследствие неравенства (34) из (44) следует, что $K = E_0$. Если теперь обозначить через $p_\pm \equiv \pm i\eta$ ($\mathrm{Re}\,\eta > 0$) ближайшие к началу $p=0$ корни уравнения $\varphi^{-1}(p,E) = 0$, в котором значения E принадлежат окрестности точки $E = E_0$, то, полагая $p = i\eta$ в (38), получим тождество

$$\varphi^{-1}(i\eta,E) \equiv 0. \tag{45}$$

Тогда из (44) и (45) вытекает следующее соотношение между величинами $E-E_0$ и η^2:

$$E - E_0 \equiv D\eta^2 + F(i\eta,E;w;\varphi) - F(0,E_0;w;\varphi). \tag{46}$$

С помощью тождества (45) преобразуем уравнение (38) к более удобной форме:

$$\varphi^{-1} = D\chi^2 + F(i\eta,E;w;\varphi) - F(p,E;w;\varphi), \quad \chi^2 \equiv p^2 + \eta^2. \tag{47}$$

Система уравнений (46), (47) составляет основу для отыскания асимптотики величины $G(r,t)$, когда $r\to\infty$, $t\to\infty$ и задана корреляционная функция W. Эта задача, по существу, сводится к вычислению показателя степени μ ($0<\mu<1$) в асимптотическом поведении функции φ,

$$\varphi = O(\chi^{2(\mu-1)}), \quad \chi \to 0, \tag{48}$$

и установлению асимптотической зависимости между переменными E и η:

$$E - E_0 = O(\eta^{2\nu}), \quad 0 < \nu < 1, \quad \eta \to 0.$$

Для реализации этого подхода воспользуемся инвариантностью уравнения (47) относительно группы ренормгруппировочных преобразований. Разделим обе его части на $D\chi^2$ и представим искомую функцию φ как

$$\varphi = \frac{X}{D\chi^2}, \tag{49}$$

где новая неизвестная величина X удовлетворяет уравнению

$$X^{-1} = 1 + (D\chi^2)^{-1}\Psi(\chi^2, \eta^2; w; \varphi), \tag{50}$$

в котором

$$\Psi(\chi^2, \eta^2; w; \varphi) = F(i\eta, E; w; \varphi) - F(p, E; w; \varphi). \tag{51}$$

Допустим, что при некотором не равном нулю значении $\chi^2 = \lambda$ выполняется равенство

$$\Psi(\lambda, \eta^2; w; \varphi) = 0,$$

где $\lambda = \lambda(\eta^2; w)$ — так называемая точка нормировки. Уравнение (50) можно переписать теперь следующим образом:

$$X^{-1} = 1 + \left(\frac{\lambda}{\chi^2}\right) \Psi\left(\frac{\chi^2}{\lambda}, \frac{\eta^2}{\lambda}; \frac{\lambda^{s-1}}{D^2} E_0 w; \frac{\lambda}{\chi^2} X\right).$$

Тогда безразмерную величину X в окрестности точек $p = 0$ и $E = E_0$ можно представить как функцию безразмерных переменных:

$$X = X(x, y; b),$$

где

$$x = \frac{\chi^2}{\lambda}, \quad y = \frac{\eta^2}{\lambda}, \quad b = \lambda^{s-1} D^{-2} E_0 w_0, \quad s = \frac{d-2}{2},$$

а число b, называемое здесь спектральным параметром, представляет собой безразмерную комбинацию величин λ, E_0, D и интегральной характеристики корреляционной функции $w_0 \equiv w(0,0)$. При этом в точке $x = 1$ выполняется условие нормировки

$$X(1, y; b) = 1. \tag{52}$$

Теперь нетрудно убедиться, что согласно свойству инвариантности уравнения (50) относительно ренормгруппировочных преобразований умножение функции $X = X(x, y; b)$ на число α^{-1} приводит к изменению её точки нормировки, $\chi^2 = \lambda'(\eta^2, w')$, и спектрального параметра, $b' = \alpha^{-2} l^{s-1} b$, где $w' = \alpha^{-2} w$, $l = \lambda'/\lambda$, т. е.

$$\alpha X(x, y; b) = X\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}; b'\right). \tag{53}$$

Если в (53) положить $x = l$ и учесть условие нормировки

$$X\left(1, \frac{y}{l}; b'\right) = 1,$$

получим, что
$$\alpha^{-1} = X(l, y; b),$$
а равенство (53) преобразуется к виду
$$X(x, y; b) = X(l, y; b) X\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}; bl^{s-1} X^2(l, y; b)\right). \tag{54}$$
Возведём в квадрат обе части уравнения (54) и затем умножим его на bx^{s-1}. В результате получаем, что величина
$$B(x, y; b) = bx^{s-1} X^2(x, y; b), \tag{55}$$
называемая здесь инвариантным спектральным параметром, удовлетворяет уравнению
$$B(x, y; b) = B\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}; B(l, y; b)\right) \tag{56}$$
с нормировочным условием
$$B(1, y; b) = b. \tag{57}$$

Уравнение (56) замкнуто и может быть решено в общем виде [3, 5]. Однако для практических целей более удобно иметь дело с дифференциальным уравнением Ли, соответствующим непрерывной ренормгруппе:
$$x\frac{\partial B(x, y; b)}{\partial x} = \beta\left(\frac{y}{x}; B(x, y; b)\right), \tag{58}$$
где
$$\beta(y; b) = \left[\frac{\partial B(x, y; b)}{\partial x}\right]_{x=1}, \tag{59}$$
а равенство (57) играет роль граничного условия для уравнения (58). Если теперь в уравнениях (58) и (59) перейти к пределу при $y \to 0$, то уравнение для функции
$$B(x; b) = \lim_{y\to 0} B(x, y; b) \tag{60}$$
приводится к виду
$$x\frac{\partial B(x; b)}{\partial x} = \beta\big(B(x; b)\big) \tag{61}$$
или к интегральной форме
$$\int\limits_b^{B(x;b)} \frac{da}{\beta(a)} = \ln x,$$
где
$$\beta(b) = \left[\frac{\partial B(x; b)}{\partial x}\right]_{x=1}, \tag{62}$$
а соответствующее граничное условие принимает вид $B(1; b) = b$. Таким образом, эффективным параметром, характеризующим корреляцию в малой окрестности точек $p = 0$ и $\eta = 0$, является инвариантный спектральный параметр B, знание которого позволяет найти асимптотику функции φ в (47). Обычно для

этой цели используется теория возмущений, и удаётся получить информацию о поведении $\beta(b)$ лишь в малой окрестности точки $b = 0$, где $\beta(b) = 0$. В самом деле, если $\beta(b) > 0$ в этой окрестности, то $B(x;b) \to 0$ при $x \to 0$, следовательно, точка $b = 0$ является стабильным нулём. Если же $\beta(b) < 0$ вблизи нуля, то величина $B(x;b)$ возрастает при $x \to 0$ и теория возмущений становится неприменимой. Согласно выражениям (55) и (60) $B(x;b) \to 0$ при $x \to 0$, если

$$X(x,b) = o\left(\frac{x^{1-s}}{2}\right), \quad x \to 0. \tag{63}$$

Отсюда следует, что если $X(x,b) = O(x^{\mu})$ при $x \to 0$ согласно (48) и (49), то условие

$$1 - s < 2\mu \tag{64}$$

является необходимым для определения функции $\beta(b)$ в окрестности точки $b = 0$. Но значение μ не зависит от переменной y, поэтому функция $X(x,y;b)$ тоже должна вести себя как $X(x,y;b) = O(x^{\mu})$ при $x \to 0$, а функция φ, в соответствии с (48), как

$$\varphi = O(x^{\mu-1}), \quad x \to 0. \tag{65}$$

Чтобы вычислить функцию $\beta(b)$, необходимо оценить функцию $F(p,E_0;w;\varphi_0)$ из (39) для значений p в окрестности точки $p = 0$. Но функция $F(p,E_0;w;\varphi_0)$ представляет собой ряд, для вычисления членов которого необходимо знать свойства спектра случайного поля. При этом подразумевается, что показатель степени в асимптотическом соотношении (63) не изменяется при переходе к пределу при $\eta \to 0$ ($E \to E_0$). Таким образом, для реализации изложенного здесь метода вычисления асимптотики «усреднённой плотности» $G(r,t)$ при больших значениях r и t необходима более детальная информация о корреляционной функции $W(r,t)$.

4. Факторизованное представление корреляционной функции

Рассмотрим случай, когда корреляционная функция $W(r,t)$ определена равенством

$$W(r,t) = \omega(r) T^{-2} \exp\left(-\frac{t}{T}\right), \tag{66}$$

где функция $\omega(r)$ вместе со своей производной $d\omega/dr$ абсолютно интегрируема в $\mathbb{R}^d$. Тогда пространственно-временной спектр случайного поля $V(r,t)$ в соответствии с формулами (37) и (66) равен

$$w(p,E) = \frac{u(p)}{T(1+TE)},$$

а его пространственная часть

$$u(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{r}\, \exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\omega(r)$$

удовлетворяет условию $0 < |u(p)| \leqslant u_0$, где $u_0 \equiv u(0)$. Вследствие предполагаемой интегрируемости функции $|d\omega/dr|$ из теоремы Римана—Лебега [6] следует, что $|u(p)| < Cp^{-2}$, $C > 0$, $p \to \infty$. В дальнейшем мы будем обозначать через C положительную постоянную, не обязательно принимающую в разных формулах одно и то же значение. Функция $F(p, E; w; \varphi)$ принимает вид

$$\begin{aligned} &F(p,E;w;\varphi) = \\ &\quad = T^{-2}\int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d}u(\mathbf{p}')\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}', E+T^{-1}) + T^{-4}\int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d}\int \frac{d\mathbf{p}''}{(2\pi)^d}u(\mathbf{p}')u(\mathbf{p}'') \times \\ &\quad \times \varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}', E+T^{-1})\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{p}'', E+2T^{-1})\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}'', E+T^{-1}) + \ldots, \end{aligned} \tag{67}$$

что может быть записано в символической форме как

$$F(p,E;w;\varphi) = \sum_{n\geqslant 1} N_n T^{-2n}\int \left\{\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d}\right\}^n \{u(\mathbf{p}')\}^n\{\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}', E+T^{-1})\}^{2n-1},$$

где функция $\varphi(p, E + nT^{-1})$ подчиняется рекуррентному соотношению

$$\varphi^{-1}(p,E+nT^{-1}) = \varphi_0^{-1}(p,E+nT^{-1}) - F(p,E+nT^{-1};w;\varphi), \quad n = 1,2,\ldots, \tag{68}$$

$$\varphi_0^{-1}(p,E+nT^{-1}) = Dp^2 + E + nT^{-1}.$$

Чтобы описать ситуации, обусловленные большими или малыми значениями TE, обратимся к формуле (11), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\tau^2 \sum_{0\leqslant m<n\leqslant N} W(|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_m|, |t_n - t_m|) \leqslant \left(\frac{\tau}{T}\right)^2 \bar{\omega}\sum_{n=1}^{N}(N-n+1)\exp\left(-\frac{n\tau}{T}\right) < KN\tau,$$

где $K = E_0 = \bar{\omega}T^{-1}$, $\bar{\omega} = \sup\limits_{x\geqslant 0}\omega(x)$.

Далее мы рассмотрим два предельных случая: $\bar{\omega} \ll 1$ и $\bar{\omega} \gg 1$. С учётом выбора значений E ($\mathrm{Re}\, E > K$) и времени корреляции T имеем, что $\bar{\omega} < T\,\mathrm{Re}\, E \ll 1$ в первом случае и $T\,\mathrm{Re}\, E > \bar{\omega} \gg 1$ во втором.

4.1. Случай $\bar{\omega} \ll 1$

В этом случае в формуле (67) в определении величины $F(p, E; w; \varphi)$ фигурируют функции $\varphi(p, E + nT^{-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, для которых имеют место уравнения (68). В частном случае $n = 1$ уравнение (68) имеет вид

$$\varphi^{-1}(p,E+T^{-1}) = Dp^2 + E + T^{-1} - F(p,E+T^{-1};w;\varphi).$$

Учитывая неравенства (41) и $T\,\mathrm{Re}\,E \ll 1$, воспользуемся методом последовательных приближений и вычислим функцию $F(p,E;w;\varphi)$ в первом приближении:

$$F_1(p,E;w;\varphi_0) = T^{-2}\int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d}u(\mathbf{p}')\varphi_0(\mathbf{p}-\mathbf{p}', E+T^{-1}) =$$

$$= T^{-1}(TE+1)^{-1}\int\limits_0^\infty dx\, x\bar{K}_s(x)\bar{J}_s\left(\frac{px}{a}\right)\omega\left(\frac{x}{a}\right), \quad (69)$$

где $\bar{J}_s(x) = x^{-s}J_s(x)$, $\bar{K}_s(x) = x_sK_s(x)$, J_s — функция Бесселя, K_s — функция Макдональда, $a^2 = (TE+1)/DT$ в соответствии с определением (45). Из формулы (69) и свойств функций $\bar{J}_s(x)$ и $\bar{K}_s(x)$ следует, что для значений p в окрестности точки $p = ia$ основной вклад в величину интеграла вносит область интегрирования, в которой $|x/a| \ll 1$, и поэтому для функции $\omega(x/a)$ в (69) мы воспользуемся её предельным значением $\omega_0 = \omega(0)$. Получаем

$$F_1(p,E;w;\varphi_0) \cong \omega_0 T^{-2}\varphi_0(p,E+T^{-1}),$$

и следовательно, в рассматриваемом приближении функция $\varphi(p,E)$ имеет вид

$$\varphi_1^{-1}(p,E) = Dp^2 + E - \frac{\omega_0}{T(DTp^2+TE+1)}. \quad (70)$$

Используя выражение (70) в формулах (42) и (43) для $\varphi(p,E)$, получим соответствующее приближение для $G(r,t)$:

$$G_I(r,t) = \left(\mathrm{ch}\,\frac{\gamma t}{2T} + \gamma^{-1}\,\mathrm{sh}\,\frac{\gamma t}{2T}\right)\exp\left(-\frac{t}{2T}\right)G_0(r,t),$$

где

$$\gamma = \sqrt{1+4\omega_0}, \quad G_0(r,t) = (4\pi Dt)^{-d/2}\exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right).$$

Отсюда следует, что при больших значениях t асимптотика функции $G_I(r,t)$ описывается выражением

$$G_I(r,t) \sim (1+\gamma^{-1})\exp\left(\frac{\omega_0 t}{T}\right)G_0(r,t).$$

4.2. Случай $\bar{\omega} \gg 1$

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathrm{Re}\,E \gg T^{-1}$ и, следовательно, в аргументах функций φ в подынтегральных выражениях в (67) величиной T^{-1} можно пренебречь. В этой ситуации при оценке значения μ в (65) мы потребуем сходимости интегралов в формуле (51), принимающей теперь вид

$$\Psi(\chi^2,\eta^2;w;\varphi) = T^{-2}\int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d}u(\mathbf{p}')[\varphi(\mathbf{p}_+-\mathbf{p}',E) - \varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}',E)] +$$

$$+T^{-4}\int\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d}\int\frac{d\mathbf{p}''}{(2\pi)^d}u(\mathbf{p}')u(\mathbf{p}'')\times$$
$$\times[\varphi(\mathbf{p}_+-\mathbf{p}',E)\varphi(\mathbf{p}_+-\mathbf{p}'-\mathbf{p}'',E)\varphi(\mathbf{p}_+-\mathbf{p}'',E)-$$
$$-\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}',E)\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{p}'',E)\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}'',E)]+\dots\,. \tag{71}$$

Поскольку $|\varphi(\mathbf{p}_+-\mathbf{p},E)|=O\big(|\mathbf{p}|^{2(\mu-1)}\big)$, $u(\mathbf{p})=O(|\mathbf{p}|^{-2})$, когда $p\to\infty$, то сходимость интегралов в каждом члене ряда (71) будет обеспечена при выполнении условия

$$\mu<1-s. \tag{72}$$

Объединение условий (64) и (72) приводит к следующим ограничениям для значения μ:

$$\mu<1-s<2\mu. \tag{73}$$

Для определения асимптотики функции $\varphi(p,E)$ в уравнении (47) при $p\to0$ и $E\to E_0$ ($\eta\to0$) мы примем в качестве исходного приближения для $\varphi(p,E)$ выражение

$$\tilde\varphi(p,\eta)=A\left(\frac{\Lambda}{\chi}\right)^{1-\mu}K_{1-\mu}(\Lambda\chi),\quad L\ll\Lambda, \tag{74}$$

в котором значения параметров A, Λ и $\mu=\mu(d)$, где $0<\mu<1$, когда $2\leqslant d<4$ ($0\leqslant s<1$), должны ещё быть найдены. Согласно (43) и (74) соответствующее приближение для функции $\psi(r,E)$ есть

$$\tilde\psi(r,\eta)=(2\pi)^{-d/2}AR^{-2\nu}\bar K_\nu(\eta R),\quad R^2\equiv r^2+\Lambda^2,\quad \nu\equiv\mu+s. \tag{75}$$

Если учесть условие нормировки (52) для функции

$$\tilde X\left(\frac{\chi^2}{\lambda},\frac{\eta^2}{\lambda},b\right)=D\chi^2\tilde\varphi(p,\eta) \tag{76}$$

в точке $\chi^2=\lambda$, то из (76) следует, что

$$A^{-1}=D\lambda^\mu\bar K_{1-\mu}(\Lambda\sqrt\lambda).$$

Использование здесь функции $K_\alpha(z)$ обусловлено её асимптотическими свойствами [1]

$$K_\alpha(z)=$$
$$=\begin{cases}2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)z^{-\alpha}\left(1-\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac z2\right)^{2\alpha}+(1-\alpha)^{-1}\left(\frac z2\right)^2+O\big(z^{2(1+\alpha)}\big)\right), & z\to0,\\ \sqrt{\frac\pi2 z}\exp(-z)[1+O(z^2)], & z\to\infty,\end{cases} \tag{77}$$

$$K_{-\alpha}(z)=K_\alpha(z),\quad 0<\alpha<1,$$

адекватно передающими характер поведения функции $\varphi(p,E)$ при $p\to0$ и $E\to E_0$ ($\eta\to0$); $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамму-функцию Эйлера. Следует подчеркнуть, что выбор конкретной формы исходного приближения (74) для функции $\varphi(p,E)$ неоднозначен, если нас интересует её асимптотика при $\eta\to0$ и $p\to0$.

Указанный выбор определяется двумя требованиями. Во-первых, необходимо учесть вклад в величину $\tilde{\varphi}(p,\eta)$ только ближайшей к началу $p=0$ особой точки $p_+=i\eta$. Во-вторых, в соответствие со свойством инвариантности уравнения (38) относительно ренормгруппировочных преобразований асимптотика $\tilde{\varphi}(p,\eta)$ должна иметь вид

$$\tilde{\varphi}(p,\eta)=O\big(\chi^{2(\mu-1)}\big), \quad \chi\to 0,$$

а связь между величинами η^2 и $E-E_0$ осуществляется посредством равенства (46), которое в этом случае имеет вид

$$E-E_0\equiv D\eta^2+F(i\eta,E;u;\varphi)-F(0,E_0;u;\varphi). \tag{78}$$

Определим «нормированную» функцию $G_I(r,t)$:

$$G_I(r,t)=\Bigg[\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty}\frac{dE}{2\pi i}\exp(tE)\varphi(0,E)\Bigg]^{-1}G(r,t). \tag{79}$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{r}\,G_1(r,t)=1,$$

следовательно,

$$\operatorname{Im}G_I(r,t)=0. \tag{80}$$

Последним свойством мы воспользуемся для оценки параметра μ. Асимптотическое поведение фигурирующего в (79) интеграла при $t\to\infty$ определяется наиболее удалённой вправо на действительной оси особой точкой $E=E_0$ функции $\varphi(0,E)$, т. е. точкой, удовлетворяющей тождеству (44). Для определения асимптотики функции $\tilde{G}(r,t)$, когда $r/L\to\infty$ и $t/T\to\infty$, обратимся к формуле (42) и в принятой форме исходного приближения (75) запишем её как

$$\tilde{G}(r,t)=\exp(E_0t)\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty}\frac{dE}{2\pi i}\exp[(E-E_0)t]\tilde{\psi}(r,\eta), \tag{81}$$

где связь между переменными E и η осуществляется посредством тождества (78), преобразованного с учётом формулы (67) к виду

$$\begin{aligned}E-E_0={}&D\eta^2+T^{-2}\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}u(\mathbf{p})[\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_+-\mathbf{p},\eta)-\tilde{\varphi}(\mathbf{p},0)]+\\&+T^{-4}\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\int\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d}u(\mathbf{p})u(\mathbf{p}')\times\\&\times[\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_+-\mathbf{p},\eta)\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_+-\mathbf{p}-\mathbf{p}',\eta)\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_+-\mathbf{p}',\eta)-\\&-\tilde{\varphi}(\mathbf{p},0)\tilde{\varphi}(\mathbf{p}+\mathbf{p}',0)\tilde{\varphi}(\mathbf{p}',0)]+\ldots.\end{aligned} \tag{82}$$

Если в правой части формулы (82) воспользоваться для $\tilde{\varphi}(p,\eta)$ выражением (74), то после оценки интегралов мы получим, что

$$(E_0-E)T=\tilde{u}\eta^{2\nu}+O(\Lambda^2\eta^2), \quad \eta\to 0, \tag{83}$$

где

$$\tilde{u} \equiv \frac{c_\nu A u_0}{T}, \quad c_\nu = \frac{\Gamma(1-\nu)}{2^{d+\mu}} \pi^{s+1} \nu.$$

Функция $G_I(r,t)$ в рассматриваемом приближении примет вид

$$\tilde{G}_I(r,t) = \left[\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE}{2\pi i} \exp[(E-E_0)t] \tilde{\varphi}(0,\eta) \right]^{-1} \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE}{2\pi i} \exp[(E-E_0)t] \tilde{\psi}(r,\eta). \tag{84}$$

В интегралах равенства (84) сдвинем вертикальный контур интегрирования $(C-i\infty, C+i\infty)$ бесконечно далеко в левую полуплоскость комплексной переменной E, обходя при этом особые точки функции $\varphi(p,E)$. По предположению среди всех особых точек функции $\varphi(p,E)$ точка E_0 имеет наибольшую вещественную часть, а потому наибольший вклад в величину $\tilde{G}_I(r,t)$ при $t \to \infty$ вносит результат интегрирования в (84) по той части контура интегрирования, которая охватывает разрез $(-\infty, E_0]$ комплексной плоскости переменной E вдоль её вещественной оси. Если обозначить через $E_- = E_0 + z\exp(-i\pi)$ и $E_+ = E_0 + z\exp(i\pi)$, где $z > 0$, значения переменной E соответственно на нижнем и на верхнем берегах разреза $(-\infty, E_0]$ и в формуле (84) учесть интегрирование лишь по контуру, охватывающему этот разрез, то для асимптотики функции $\tilde{G}_I(r,t)$, когда $t \to \infty$, получим выражение

$$\tilde{G}_I(r,t) \sim \left[\int\limits_0^\infty \exp(-tz) \Delta\tilde{\varphi}(z)\, dz \right]^{-1} \int\limits_\infty^\infty \exp(-tz) \Delta\tilde{\psi}(r,z)\, dz, \tag{85}$$

$$\Delta\tilde{\varphi}(z) = \tilde{\varphi}(0,\eta_+) - \tilde{\varphi}(0,\eta_-) = [\eta_+^{2(\mu-1)} \bar{K}_{1-\mu}(\Lambda\eta_+) - \eta_-^{2(\mu-1)} \bar{K}_{1-\mu}(\Lambda\eta_-)],$$
$$\Delta\tilde{\psi}(r,z) = \tilde{\psi}(r,\eta_+) - \tilde{\psi}(r,\eta_-) = (2\pi)^{-d/2} R^{-2\nu} [\bar{K}_\nu(R\eta_+) - \bar{K}_\nu(R\eta_-)].$$

Переменные $\eta_- = \eta_-(z)$ и $\eta_+ = \eta_+(z)$, согласно соотношению (83), связаны с величиной z вблизи точки E_0 на нижнем и на верхнем берегах разреза $(-\infty, E_0]$ соответственно:

$$zT = \tilde{u}\eta_-^{2\nu} + O(\Lambda^2\eta_-^2), \quad zT\exp(2\pi i) = \tilde{u}\eta_+^{2\nu} + O(\Lambda^2\eta_+^2).$$

Асимптотическая оценка интегралов в (85), когда $t \to \infty$, приводит к следующему результату:

$$\tilde{G}_I(r,t) \sim CR^{2(1-\nu)} \left(\frac{T}{\tilde{u}} t \right)^{(2-\mu)/\nu} \left[\frac{1 - \exp(2\pi i/\nu)}{1 - \exp(2\pi i(\mu-1)/\nu)} \right].$$

Из условия (80), при котором правая часть последнего выражения является положительной величиной, вытекает равенство

$$\mu = \frac{2 - ns}{1+n}, \tag{86}$$

где n — натуральное число. Единственное решение уравнения (86), удовлетворяющее условию (73), есть $n = 2$. Поэтому

$$\mu = \frac{2}{3}(1-s) \quad \left(\mu = \frac{4-d}{3}\right); \quad \nu = \frac{s+2}{3} \quad \left(\nu = \frac{d+2}{6}\right). \tag{87}$$

Тогда $\tilde{G}_I(r,t) \sim CR^{\mu}(T/\tilde{u}t)^2$, $t/T \to \infty$.

Теперь необходимо проверить, будет ли выражение (74) с приведённым в (87) значением μ удовлетворять уравнению (61). Обратимся к уравнению (50) и в рассматриваемом приближении вычислим функцию $\Psi(p^2, 0; w; \tilde{\varphi})$ согласно её определению в (71):

$$\Psi(p^2,0;w;\tilde{\varphi}) = T^{-2}\int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d} u(\mathbf{p}')[\tilde{\varphi}(\mathbf{p}',0) - \tilde{\varphi}(\mathbf{p}-p',0)] +$$
$$+ T^{-4}\int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d}\int \frac{d\mathbf{p}''}{(2\pi)^d} u(\mathbf{p}')u(\mathbf{p}'')[\tilde{\varphi}(\mathbf{p}',0)\tilde{\varphi}(\mathbf{p}'+\mathbf{p}'',0)\tilde{\varphi}(\mathbf{p}'',0) -$$
$$- \tilde{\varphi}(\mathbf{p}-\mathbf{p}',0)\tilde{\varphi}(\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{p}'',0)\tilde{\varphi}(\mathbf{p}-\mathbf{p}'',0)] + \ldots .$$

В результате получим

$$(Dp^2)^{-1}\Psi(p^2,0;w;\tilde{\varphi}) = C_1 A[u(0) - u(p)](DT^2\Lambda^{2\nu}p^2)^{-1} +$$
$$+ C_2 A^3[u^2(0) - u^2(p)\bar{K}_1(\Lambda p)](DT^4\Lambda^2 p^2)^{-1} + O(1),$$

где $C_1 = \Gamma(\nu)/2^{2-\mu}\pi^{s+1}$, $C_2 = \Gamma^3(\nu)/2^{d+2}\pi^d\Gamma(s+2)$, $\bar{K}_1(z) = 1 + (z^2/2)\ln z + O(z^2)$, $z \to 0$, откуда следует, что

$$X^{-1} = 1 + C_1 u_0 A L^2 (2DT^2\Lambda^{2\nu})^{-1} - C_2 u_0^2 A^3 (4DT^4)^{-1}\ln(\Lambda^2 p^2) + O(1).$$

Теперь, используя условие нормировки в виде $\Psi(\lambda, 0; w; \tilde{\varphi}) = 0$ и полагая $A = k(DT^4/u_0{}^2)^{1/3}$, $k^3 = 4(4-d)/3C_2$, мы получим равенство

$$\left[\frac{\partial X}{\partial \ln p^2}\right]_{p^2=\lambda} = \frac{4-d}{3}. \tag{88}$$

Наконец, учитывая (88) в (62), приходим к заключению, что выражение (74) с указанным в (87) значением μ удовлетворяет уравнению (61). Таким образом, связь между всеми параметрами задачи установлена и тем самым функции $\tilde{\varphi}(p,\eta)$ и $\tilde{\psi}(r,\eta)$ в формулах (74) и (75) вполне определены, что позволяет найти асимптотику функции $\tilde{G}(r,t)$. Используя в равенстве (81) асимптотическую формулу (77) для больших значений аргумента, получим

$$\tilde{G}(r,t) \cong C\left(\frac{D^2T^2}{u_0}\right)^{1/3} r^{-(d+5)/6}\exp\left(E_0 t + \frac{i\pi}{2}\right) \times$$
$$\times \int d\eta\, \eta^{(d-1)/2}\exp[-tT^{-1}h(\eta, rTt^{-1})], \tag{89}$$

где

$$h(\eta, rTt^{-1}) = \eta r T t^{-1} + k(u_0 DT)^{1/3}\eta^{(d+2)/3}.$$

Для асимптотической оценки величины $\tilde{G}(r,t)$, когда r/L и t/T стремятся к бесконечности, но их отношение rT/tL фиксировано и мало, воспользуемся в формуле (89) методом перевала. Из-за громоздкого вида асимптотического разложения функции $\tilde{G}(r,t)$, когда $1 < d < 4$, мы приведём здесь выражение для главного члена этого разложения лишь в случаях $d = 2$ $(s = 0)$ и $d = 3$ $(s = 1/2)$:

$$\tilde{G}(r,t) = \begin{cases} \frac{c_2 T^2}{u_0 t^2}\left[\frac{r^4 T^2}{u_0 D t^3}\right]^{1/3} \exp\left(E_0 t + \frac{k_2 r^4 T^2}{u_0 D t^3}\right)\left\{1 + O\left(\frac{T}{t}\right)\right\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } d = 2, \\ \frac{c_3 T^2}{u_0 t^2}\left[\frac{r^5 T^2}{u_0 D t^3}\right]^{1/12} \exp(E_0 t)\left\{\cos\left[\left(\frac{k_3 r^5 T^2}{u_0 D t^3}\right)^{1/2} + \frac{\pi}{4}\right] + O\left(\frac{T}{t}\right)\right\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } d = 3, \end{cases} \tag{90}$$

где c_d, k_d $(d = 2, 3)$ — вполне определённые положительные постоянные. Случаи $d = 1$ и $d = 4$ являются особыми и требуют отдельного изучения. Из формулы (90) следует, что для $d = 2$ поведение функции $\tilde{G}(r,t)$ при $t/T \to \infty$ определяется в основном экспоненциально растущим множителем. Однако в случае $d = 3$ асимптотика $\tilde{G}(r,t)$ содержит, помимо $\exp(E_0 t)$, периодический множитель. Последний при фиксированном и малом значении rT/tL определяет убывание главного асимптотического члена $\tilde{G}(r,t)$ с ростом t/T начиная с некоторого момента времени. Поэтому для достаточно больших значений t/T уже нельзя утверждать, что первый член даёт асимптотическую формулу, так как остаточный член может не быть малым по сравнению с главным. В противном случае формула (90) означала бы, что при больших значениях t/T функция $\tilde{G}(r,t)$ обращается в нуль там же, где периодический множитель, что совсем не обязательно. Изложенный выше подход для отыскания асимптотики «усреднённой плотности» $\tilde{G}(r,t)$ принципиально отличается от метода её определения в [2] и в определённом смысле является подтверждением эффективности ренормгруппового метода в исследовании данной проблемы.

Литература

[1] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.

[2] Алхимов В. И. Теор. и матем. физ. — 2004. — Т. 139. — С. 512—528.

[3] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1976.

[4] Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. — М.: Мир, 1965.

[5] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

[6] Титчмарш Э. Теория функций. — М.: Наука, 1980.

[7] Фейнман Р. Статистическая механика. — М.: Мир, 1978.

[8] Schulman L. S. Techniques and Applications of Path Integration. — New York: Wiley, 1981.