Конечные группы с D-блоком мощности 3*

В. А. БЕЛОНОГОВ
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

УДК 512.54

Ключевые слова: конечная группа, неприводимый характер, D-блок, p-блок.

Аннотация

Результаты статьи связаны с одной из главных задач теории представлений — изучением связей между строением конечной группы и свойствами её таблицы характеров. Исследуются конечные группы, имеющие D-блок мощности 3, для некоторого нормального подмножества D. Получены также некоторые свойства классических p-блоков (p — простое число), состоящих из трёх неприводимых характеров.

Abstract

V. A. Belonogov, Finite groups with a D-block of cardinality 3, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 2, pp. 23—33.

The results of this paper are connected with one of the main problems of the representation theory, the problem of dependence between the character table of a finite group and its abstract structure. Finite groups that have a D-block of cardinality 3 for some normal subset D are investigated. Some properties of classical p-blocks (where p is a prime number) consisting of three irreducible characters are also obtained.

Введение

В [3] (см. также [4, глава 7]) получено описание конечных групп с главным p-блоком (p — простое число), состоящим из трёх характеров. Значительная часть доказательства была проведена там в более общей ситуации, когда конечная группа G имеет главный D-блок мощности 3, где D — произвольное нормальное подмножество из G. Полученные результаты были применены затем при $D = G_{p'}$ в доказательстве основной теоремы. (Понятие D-блока, введённое в [2], напоминается в разделе 1; для D, равного множеству всех p'-элементов группы, понятие D-блока совпадает с понятием p-блока.)

В настоящей статье изучаются конечные группы, имеющие произвольный (не обязательно главный) D-блок мощности 3, и, в частности, выясняются свойства неприводимых характеров, составляющих такой блок (см. раздел 2; основные результаты здесь — теоремы 1 и 2). С помощью этих результатов в разделе 3

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-01-00148.

установлены некоторые свойства p-блоков мощности 3 (теоремы 3 и 4). Отметим, что изучению D-блоков мощности 2 (или, что равносильно, изучению пар полупропорциональных неприводимых характеров) был посвящён ряд работ автора (см., например, [5—7]).

Используемые нами обозначения в основном стандартны (см., например, [4, 8]). В частности, $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G; $\alpha|_K$ — ограничение классовой функции α группы G на её подмножестве K; $(\alpha,\beta)_G$ — скалярное произведение в G классовых функций α и β; если $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, то $\mathrm{Ker}(\Phi) := \bigcap\limits_{\varphi\in\Phi} \mathrm{Ker}(\varphi)$ ($\mathrm{Ker}(\varphi)$ — ядро характера φ); запись $D \trianglelefteq G$ означает, что D есть нормальное подмножество (т. е. объединение классов сопряжённых элементов) группы G; $k(G)$ — число классов сопряжённых элементов группы G и $k_G(D)$ — число таких классов, лежащих в D; $|A|$ — мощность множества A; $\dot{}\{a_1,\dots,a_n\}$ — множество $\{a_1,\dots,a_n\}$ мощности n (т. е. $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$); $A \times B := \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ — декартово произведение множеств A и B; $\dot{\cup}$ — знак объединения попарно непересекающихся множеств; $\mathrm{r}(M)$ — ранг матрицы M; $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ — множества всех комплексных, рациональных, целых и натуральных чисел соответственно; $\hat{\mathbb{Z}}$ — множество всех целых алгебраических чисел из $\mathbb{C}$. Если p — простое число, то G_p — множество всех p-элементов группы G, $G_{p'}$ — множество всех p'-элементов из G, а $|G|_p$ — p-часть порядка G. Если $m, n, n_1, \dots, n_k$ — целые числа, то $(n_1,\dots,n_k)$ — наибольший общий делитель $n_1,\dots,n_k$, а запись $m \mid n$ означает, что m делит n. Обозначения, связанные с понятием D-блока, объясняются в разделе 1.

Если утверждение некоторой теоремы или предложения состоит из нескольких пунктов, то начало доказательства очередного пункта будет отмечено номером этого пункта.

1. Известные результаты о взаимодействиях и D-блоках

Напомним некоторые определения и обозначения из [2, 4]. Пусть G — конечная группа, D — её нормальное подмножество и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. *$D$-срезкой* классовой функции ψ группы G называется классовая функция $\psi|_D^0$, совпадающая с ψ на D и обращающаяся в нуль на $G \setminus D$. Говорят, что D и Φ *взаимодействуют* (запись: $D \hookrightarrow \Phi$), если D-срезка $\varphi|_D^0$ любого характера φ из Φ является линейной комбинацией (с комплексными коэффициентами) характеров из Φ.

D-блок группы G — это минимальное (по включению) непустое подмножество из $\mathrm{Irr}(G)$, взаимодействующее с D. Согласно [2, лемма 6] характеры χ и ψ из $\mathrm{Irr}(G)$ лежат в одном D-блоке, если и только если они D-связаны (т. е. если $\chi = \psi$ или существует последовательность $\chi_1,\dots,\chi_n$, такая что $\chi_1 = \chi$, $\chi_n = \psi$ и $(\chi_i|_D^0, \chi_{i+1}|_D^0)_G \neq 0$ при $i \in \{1,\dots,n-1\}$). Классические p-блоки — частные случаи D-блоков (см. предложение 3).

Если Ξ — некоторая таблица характеров группы G, то $\Xi(\Phi, D)$ обозначает подматрицу из Ξ, лежащую на пересечении строк, соответствующих характерам из Φ, и столбцов, соответствующих элементам из D.

Если группа обозначена буквой G, $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, то положим $D^- := G \setminus D$ и $\Phi^- := \mathrm{Irr}(G) \setminus \Phi$.

Далее мы будем использовать следующие результаты.

Предложение 1. *Пусть G — конечная группа, $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Следующие условия равносильны:*

1) $D \hookrightarrow \Phi$;
2) $\sum\limits_{d \in D} \varphi(d)\overline{\chi(d)} = 0$ *для всех* $(\varphi, \chi) \in \Phi \times \Phi^-$;
3) $\sum\limits_{\varphi \in \Phi} \varphi(d)\overline{\varphi(g)} = 0$ *для всех* $(d, g) \in D \times D^-$;
4) $\frac{1}{|G|} \sum\limits_{d \in D} \sum\limits_{\varphi \in \Phi} \varphi_0(d)\overline{\varphi(d)}\varphi(d_0) = \varphi_0(d_0)$ *для всех* $(\varphi_0, d_0) \in \Phi \times D$.

Это утверждение — теорема 1 в [2], а также теорема 3Б1 в [4]. Из неё непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть D, D_1, D_2 — нормальные подмножества из G, а Φ, Φ_1, Φ_2 — подмножества из $\mathrm{Irr}(G)$.*

1. *Равносильны условия* $D \hookrightarrow \Phi$, $D^- \hookrightarrow \Phi$, $D \hookrightarrow \Phi^-$, $D^- \hookrightarrow \Phi^-$. $D \hookrightarrow \bar{\Phi} := \{\bar{\varphi} \mid \varphi \in \Phi\}$, $D^{-1} := \{d^{-1} \mid d \in D\} \hookrightarrow \Phi$.
2. *Если* $D_1 \hookrightarrow \Phi$ *и* $D_2 \hookrightarrow \Phi$, *то* $D_1 \cap D_2 \hookrightarrow \Phi$, $D_1 \cup D_2 \hookrightarrow \Phi$ *и* $D_1 \setminus D_2 \hookrightarrow \Phi$.
3. *Если* $D \hookrightarrow \Phi_1$ *и* $D \hookrightarrow \Phi_2$, *то* $D \hookrightarrow \Phi_1 \cap \Phi_2$, $D \hookrightarrow \Phi_1 \cup \Phi_2$ *и* $D \hookrightarrow \Phi_1 \setminus \Phi_2$.

Предложение 2 [4, теорема 8А6]. *Пусть G — конечная группа, $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Следующие условия равносильны:*

1) $D \hookrightarrow \Phi$;
2) $\mathrm{r}\big(\Xi(\Phi, D)\big) + \mathrm{r}\big(\Xi(\Phi, D^-)\big) = |\Phi|$;
3) $\mathrm{r}\big(\Xi(\Phi, D)\big) + \mathrm{r}\big(\Xi(\Phi^-, D)\big) = k_G(D)$;
4) $\mathrm{r}\big(\Xi(\Phi, D)\big) + \mathrm{r}\big(\Xi(\Phi, D^-)\big) + \mathrm{r}\big(\Xi(\Phi^-, D)\big) + \mathrm{r}\big(\Xi(\Phi^-, D^-)\big) = k(G)$.

В [2, следствие 1 теоремы 4] установлен следующий результат (см. также [4, теорема 5А8]).

Предложение 3. *Пусть p — простое число, D — множество всех p'-элементов группы G и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Равносильны следующие условия:*

1) Φ *есть D-блок группы G*;
2) Φ *есть p-блок группы G.*

Предложение 4 ([1, лемма 5] или [4, утверждение 2Ё10]). *Пусть $g \in G$ и $\mu := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\chi_i$, где $a_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$. Предположим, что*

1) μ *обращается в нуль на* $\{1\} \cup g^G g^G$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i\chi_i(g) = 0$ *при некоторых* $\varepsilon_i \in \{1,-1\}$;

3) $\frac{\varepsilon_i\chi_i(g)}{\chi_i(1)} = \frac{\varepsilon_j\chi_j(g)}{\chi_j(1)}$ *при* $i,j \in \{1,\dots,n-2\}$.

Тогда

$$\frac{\varepsilon_{n-1}\chi_{n-1}(g)}{\chi_{n-1}(1)} = \frac{\varepsilon_n\chi_n(g)}{\chi_n(1)}.$$

2. Трёхэлементные D-блоки

Поскольку D-блок группы G является одновременно и её D^--блоком (по пункту 1) следствия 1), при изучении D-блока Φ мы можем без ограничения общности предполагать, что $\mathrm{r}\big(\Xi(\Phi,D)\big) \leqslant \mathrm{r}\big(\Xi(\Phi,D^-)\big)$. Характеризацию трёхэлементного D-блока даёт следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, $\Phi := \dot{}\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\} \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, $D \trianglelefteq G$ и $\mathrm{r}\big(\Xi(\Phi,D)\big) \leqslant \mathrm{r}\big(\Xi(\Phi,D^-)\big)$. Равносильны следующие утверждения*:

1) Φ — *D-блок группы G*;

2) *существуют такие числа $a,b \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, что*

$$\varphi_2|_D^0 = a\varphi_1|_D^0, \quad \varphi_3|_D^0 = b\varphi_1|_D^0$$

и

$$\varphi_1|_{D^-}^0 + \bar a\varphi_2|_{D^-}^0 + \bar b\varphi_3|_{D^-}^0 = 0.$$

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть Φ — D-блок группы G. Тогда по импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) предложения 2

$$\mathrm{r}\big(\Xi(\Phi,D)\big) + \mathrm{r}\big(\Xi(\Phi,D^-)\big) = 3.$$

Кроме того, $\Xi(\Phi,D)$ не имеет нулевых строк, так как иначе $\{\varphi_i\} \hookleftarrow D$ для некоторого i и Φ не D-блок. Следовательно,

$$\mathrm{r}\big(\Xi(\Phi,D)\big) = 1, \quad \mathrm{r}\big(\Xi(\Phi,D^-)\big) = 2$$

и существуют такие $a,b \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, что

$$\varphi_2|_D^0 = a\varphi_1|_D^0, \quad \varphi_3|_D^0 = b\varphi_1|_D^0.$$

Как отмечалось выше, существует $d_0 \in D$, для которого $\varphi_1(d_0) \neq 0$. Тогда

$$a = \frac{\varphi_2(d_0)}{\varphi_1(d_0)}, \quad b = \frac{\varphi_3(d_0)}{\varphi_1(d_0)}.$$

Кроме того, согласно утверждению 1) $\Longrightarrow$ 3) предложения 1

$$\overline{\varphi_1(d)}\varphi_1(x) + \overline{\varphi_2(d)}\varphi_2(x) + \overline{\varphi_3(d)}\varphi_3(x) = 0 \ \text{ для всех } \ (d,x) \in D \times D^-.$$

В частности,

$$\overline{\varphi_1(d_0)}\varphi_1|_{D^-}^0 + \overline{\varphi_2(d_0)}\varphi_2|_{D^-}^0 + \overline{\varphi_3(d_0)}\varphi_3|_{D^-}^0 = 0,$$

т. е.

$$\varphi_1|^0_{D^-} + \bar{a}\varphi_2|^0_{D^-} + \bar{b}\varphi_3|^0_{D^-} = 0.$$

Таким образом, 1) $\Longrightarrow$ 2).

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Из 2) следует, что

$$\varphi_1 + \bar{a}\varphi_2 + \bar{b}\varphi_3 = \varphi_1|^0_D + \bar{a}\varphi_2|^0_D + \bar{b}\varphi_3 = (1 + |a|^2 + |b|^2)\varphi_1|^0_D,$$

откуда получаем, что

$$\begin{cases} \varphi_1|^0_D = \dfrac{1}{1+|a|^2+|b|^2}\,(\varphi_1 + \bar{a}\varphi_2 + \bar{b}\varphi_3), \\ \varphi_2|^0_D = \dfrac{a}{1+|a|^2+|b|^2}\,(\varphi_1 + \bar{a}\varphi_2 + \bar{b}\varphi_3), \\ \varphi_3|^0_D = \dfrac{b}{1+|a|^2+|b|^2}\,(\varphi_1 + \bar{a}\varphi_2 + \bar{b}\varphi_3). \end{cases} \tag{2.1}$$

Тогда (по определению взаимодействия) $D \hookleftarrow\!\!\!\to \Phi$. Предположим, что Φ не является D-блоком. Тогда существует такое $i \in \{1,2,3\}$, что $D \hookleftarrow\!\!\!\to \{\varphi_i\}$, т. е.

$$\text{либо}\quad \varphi_i|^0_D = 0, \quad \text{либо}\quad \varphi_i|^0_{D^-} = 0.$$

Первое равенство вместе с (2.1) влечёт линейную зависимость неприводимых характеров: $\varphi_1 + \bar{a}\varphi_2 + \bar{b}\varphi_3 = 0$, противоречащую их линейной независимости. Следовательно, $\varphi_i|^0_{D^-} = 0$, т. е. $\varphi_i|^0_D = \varphi_i$. Но отсюда с учётом (2.1) при любом $i \in \{1,2,3\}$ опять получаем противоречие с линейной независимостью характеров φ_1, φ_2, φ_3. Таким образом, Φ есть D-блок группы G.

Теорема 1 доказана. □

Предложение 5. *Пусть* $\Phi :=^{\cdot} \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, $D \trianglelefteq G$ *и для* $a, b \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *выполнено утверждение* 2) *теоремы* 1. *Положим*

$$\begin{aligned} G_0 &:= \{g \in G \mid \varphi_1(g) = \varphi_2(g) = \varphi_3(g) = 0\}, \\ G_1 &:= \{g \in G \setminus G_0 \mid \varphi_2(g) = a\varphi_1(g),\ \varphi_3(g) = b\varphi_1(g)\}, \\ G_2 &:= \{g \in G \setminus G_0 \mid \varphi_1(g) + \bar{a}\varphi_2(g) + \bar{b}\varphi_3(g) = 0\}. \end{aligned}$$

Тогда

1) $G = G_0 \mathbin{\dot\cup} G_1 \mathbin{\dot\cup} G_2$, *причём* G_1 *и* G_2 *непустые*;
2) G_1, G_2 *и* G_0 (*если* $G_0 \neq \varnothing$) — *объединения смежных классов по подгруппе* $\mathrm{Ker}(\Phi)$;
3) *если* $1 \in D$ *или матрица* $\Xi(\Phi, G)$ *имеет два ненулевых непропорциональных целочисленных столбца, то* $a, b \in \mathbb{Q}$;
4) *если одно из чисел* a *и* b *рационально, то рационально и другое*;
5) *если* $a, b \in \mathbb{Q}$, *то при любом* $T \in \{G_0, G_1, G_2\}$ *из* $g \in T$ *следует, что* $g^k \in T$ *для всех целых чисел* k, *взаимно простых с порядком* g; *в частности,* $\sum\limits_{t\in T} \chi(t)$, $\sum\limits_{t\in T} |\chi(t)|^2$, $\prod\limits_{t\in T} \chi(t)$ — *целые числа для любого* $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$;
6) *если* $T \trianglelefteq G$, $\mathrm{r}\big(\Xi(\Phi, T)\big) \leqslant \mathrm{r}\big(\Xi(\Phi, T^-)\big)$ *и* $T \cap G_1 \neq \varnothing$, *то* Φ *является* T-*блоком, если и только если* $T = G_1 \cup S$ *для некоторого* $S \subseteq G_0$ ($S \trianglelefteq G$).

Доказательство. 1. По теореме 1 для любого $g \in G$ выполнено по крайней мере одно из следующих условий:

а) $\varphi_2(g) = a\varphi_1(g)$, $\varphi_3(g) = b\varphi_1(g)$,
б) $\varphi_1(g) + \bar{a}\varphi_2(g) + \bar{b}\varphi_3(g) = 0$.

Если же верны оба условия, то, очевидно, $(1 + |a|^2 + |b|^2)\varphi_1(g) = 0$ и $\varphi_1(g) = \varphi_2(g) = \varphi_3(g) = 0$. Отсюда следует 1).

2. Утверждение 2) легко следует из теоремы 1 и утверждения 2A34 из [4], согласно которому $\varphi_i(gz) = \varphi_i(g)$ для всех $g \in G$, $z \in \mathrm{Ker}(\varphi_3)$ и $i \in \{1, 2, 3\}$.

3. Если $1 \in D$, то по пункту 2) теоремы 1 $a = \varphi_2(1)/\varphi_1(1)$, $b = \varphi_3(1)/\varphi_1(1)$, и утверждение 3) верно. Предположим теперь, что матрица $\Xi(\Phi, G)$ имеет два непропорциональных целочисленных столбца, соответствующих элементам g_1 и g_2 из G. Если хотя бы один из этих элементов принадлежит D, то из первых двух равенств пункта 2) теоремы 1 следует, что $a, b \in \mathbb{Q}$. Если же элементы g_1 и g_2 оба лежат в D^-, то согласно третьему равенству пункта 2) теоремы 1 справедливы равенства

$$\begin{cases} \varphi_1(g_1) + \bar{a}\varphi_2(g_1) + \bar{b}\varphi_3(g_1) = 0, \\ \varphi_1(g_2) + \bar{a}\varphi_2(g_2) + \bar{b}\varphi_3(g_2) = 0. \end{cases}$$

Ввиду непропорциональности столбцов, соответствующих элементам g_1 и g_2, эта система уравнений относительно $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеет не более одного решения, а следовательно, ввиду теоремы 1 она имеет единственное решение. Так как все коэффициенты системы целочисленны, то это решение рациональное, т. е. $a, b \in \mathbb{Q}$.

4. Если $1 \in D$, то по пункту 3) a и b рациональны. Пусть $1 \in D^-$. Тогда по предложению 1 $\varphi_1(1) + \bar{a}\varphi_2(1) + \bar{b}\varphi_3(1) = 0$, откуда, очевидно, следует требуемое утверждение.

5. Пусть $a, b \in \mathbb{Q}$, $g \in G$ и k — целое число, взаимно простое с порядком g. Обозначим через l наибольший делитель числа $|G|$, взаимно простой с k. Тогда число $k' := k + l$ взаимно просто с $|G|$ и согласно [4, утверждение 2A15] существует автоморфизм $\alpha_{k'}$ поля $\mathbb{Q}(\omega)$, где ω — первообразный корень степени $|G|$ из 1, такой что $\chi(g^k) = \chi(g)^{\alpha_{k'}}$ для всех $g \in G$ и всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Следовательно, автоморфизм $\alpha_{k'}$ переводит соотношения а) и б), приведённые в доказательстве пункта 1), в соотношения

а′) $\varphi_2(g^k) = a\varphi_1(g^k)$, $\varphi_3(g^k) = b\varphi_1(g^k)$,
б′) $\varphi_1(g^k) + \bar{a}\varphi_2(g^k) + \bar{b}\varphi_3(g^k) = 0$

соответственно. Отсюда и из пункта 1) следует, что если $g \in T \in \{G_0, G_1, G_2\}$, то и $g^k \in T$. Тогда из утверждений 2A15, 2A14(3) и 2A6 в [4] следует последнее утверждение в 5).

6. Пусть Φ является T-блоком. Тогда согласно теореме 1 существуют такие числа $u, v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, что

$$\varphi_2|_T^0 = u\varphi_1|_T^0, \quad \varphi_3|_T^0 = v\varphi_1|_T^0$$

и

$$\varphi_1|^0_{T^-} + \bar{u}\varphi_2|^0_{T^-} + \bar{v}\varphi_3|^0_{T^-} = 0.$$

Так как $G_1 \cap T \neq \varnothing$, то, очевидно, $a = u$, $b = v$. Но тогда из того, что для D (по условию доказываемого предложения) и приведённых выше условий для T справедливо утверждение 2) теоремы 1, с помощью рассуждений доказательства пункта 1) легко выводится, что $T = G_1 \cup S$, где $S \subseteq G_0$ и $S \trianglelefteq G$. Обратное утверждение очевидно ввиду теоремы 1.

Предложение 5 доказано. □

Утверждение 6) предложения 5 может быть неверным, если $G_1 \cap T = \varnothing$, как видно из примера группы $G = \langle g \rangle$ порядка 3 при $D = \{1\}$ и $T = \{g\}$.

Теорема 2. *Пусть* $D \trianglelefteq G$, $\Phi := \dot{}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ *и для* $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *выполнено утверждение* 2) *теоремы* 1. *Тогда*

1) $|G| = (1 + |a|^2 + |b|^2) \sum\limits_{d\in D} |\varphi_1(d)|^2$;

2) $|G| = \frac{1}{2} \sum\limits_{x\in D^-} (|\varphi_1(x)|^2 + |\varphi_2(x)|^2 + |\varphi_3(x)|^2)$;

3) $\sum\limits_{x\in D^-} |\varphi_1(x)|^2 = (|a|^2 + |b|^2) \sum\limits_{d\in D} |\varphi_1(d)|^2$.

Доказательство. 1. Так как по теореме 1 Φ — D-блок группы G и, следовательно, $D \hookrightarrow \Phi$, то по предложению 1 (импликация 1) $\Longrightarrow$ 4))

$$\frac{1}{|G|} \sum_{d\in D} \sum_{\varphi\in\Phi} \varphi_1(d)\big(\overline{\varphi_1(d)}\varphi_1(d_0) + \overline{\varphi_2(d)}\varphi_2(d_0) + \overline{\varphi_3(d)}\varphi_3(d_0)\big) = \varphi_1(d_0) \tag{2.2}$$

для всех $d_0 \in D$. Выберем в D такой элемент d_0, что $\varphi_1(d_0) \neq 0$ (такой элемент в D есть, так как Φ — D-блок согласно теореме 1). Тогда $\varphi_2(d_0) = a\varphi_1(d_0)$, $\varphi_3(d_0) = b\varphi_1(d_0)$, и, разделив обе части равенства (2.2) на $\varphi_1(d_0)$, получим требуемое в пункте 1) равенство.

2. Расписав равенства $(\varphi_i, \varphi_i)_G = 1$ при каждом $i \in \{1, 2, 3\}$, получим

$$|G| - \sum_{d\in D} |\varphi_1(d)|^2 = \sum_{x\in D^-} |\varphi_1(x)|^2, \tag{2.3}$$
$$|G| - |a|^2 \sum_{d\in D} |\varphi_2(d)|^2 = \sum_{x\in D^-} |\varphi_2(x)|^2,$$
$$|G| - |b|^2 \sum_{d\in D} |\varphi_3(d)|^2 = \sum_{x\in D^-} |\varphi_3(x)|^2.$$

Сложив эти три равенства и применив равенство пункта 1) (тогда в левой части имеем $3|G| - |G| = 2|G|$), получим равенство, равносильное равенству пункта 2).

3. Подставив в (2.3) вместо $|G|$ равное ему выражение из пункта 1), получим требуемое.

Теорема 2 доказана. □

В следующем утверждении не делается ограничений на ранг $\Xi(\Phi, D)$.

Предложение 6. *Пусть G — конечная группа, $D \trianglelefteq G$ и $\Phi := \dot{\ }\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ — D-блок группы G. Положим $s := \big(\varphi_2(1), \varphi_3(1)\big)$ и $t := \big(\varphi_1(1), \varphi_2(1), \varphi_3(1)\big)$. Предположим, что $1 \in D$. Тогда справедливы следующие условия:*

1) *если H — такая подгруппа группы G, что $H \cap D = \{1\}$, то $|H|$ делит $(\varphi_1(1)^2 + \varphi_2(1)^2 + \varphi_3(1)^2)/t$;*
2) $\frac{\varphi_1(x)}{s/t} \in \hat{\mathbb{Z}}$ *для всех $x \in D^-$.*

Доказательство. Так как $\Phi \hookrightarrow D$ и $1 \in D$, то по предложению 1 (импликация 1) $\longrightarrow$ 3))

$$\varphi_1(1)\varphi_1(x) + \varphi_2(1)\varphi_2(x) + \varphi_3(1)\varphi_3(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in D^-. \tag{2.4}$$

1. Рассмотрим обобщённый характер

$$\theta := \frac{\varphi_1(1)}{t}\varphi_1 + \frac{\varphi_2(1)}{t}\varphi_2 + \frac{\varphi_3(1)}{t}\varphi_3.$$

Так как по условию $H \cap D = 1$, то $H \setminus \{1\} \subseteq D^-$. Следовательно, согласно (2.4) θ обращается в нуль на $H \setminus \{1\}$. Поэтому $\mathbb{Z} \ni (\theta|_H, 1_H)_H = \frac{1}{|H|}\theta(1)$, т. е. $|H|$ делит $\theta(1) = (\varphi_1(1)^2 + \varphi_2(1)^2 + \varphi_3(1)^2)/t$.

2. Из равенства (2.4) следует, что $\frac{\varphi_1(1)\varphi_1(x)}{s} \in \hat{\mathbb{Z}}$ для всех $x \in D^-$. Кроме того,

$$\frac{\varphi_1(1)\varphi_1(x)}{s} = \frac{\varphi_1(1)}{t} \cdot \frac{\varphi_1(x)}{s/t}, \quad \text{где} \quad \left(\frac{\varphi_1(1)}{t}, \frac{s}{t}\right) = 1.$$

Из последних двух предложений следует требуемое заключение. Действительно, если $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \cdot \frac{b}{c} \in \hat{\mathbb{Z}}$ и $(a, c) = 1$, то $1 = au + cv$ для некоторых $u, v \in \mathbb{Z}$ и

$$\frac{b}{c} = \frac{b}{c}(au + cv) = a\frac{b}{c} + bv \in \hat{\mathbb{Z}}.$$

Предложение 6 доказано. □

3. Трёхэлементные p-блоки

Пусть p — простое число и Φ — p-блок группы G, состоящий из трёх характеров. Положим $D = G_{p'}$. Тогда по предложению 3 Φ есть D-блок группы G, и мы можем применять к Φ результаты предыдущих разделов. Согласно предложению 2 и пункту 1) предложения 5 ранг $\Xi(\Phi, D)$ равен 1 или 2. Эти случаи мы рассмотрим отдельно в следующих теоремах.

Теорема 3. *Пусть $\Phi := \dot{\ }\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ — p-блок группы G (p — простое число) и $\mathrm{r}\big(\Xi(\Phi, G_{p'})\big) = 1$. Тогда*

1) $\mathrm{Ker}(\Phi) \subseteq O_{p'}(G)$ *и* $\mathrm{Ker}(\varphi_i) = \mathrm{Ker}(\Phi) \leftthreetimes P_i$, *где P_i — p-подгруппа, для всех $i \in \{1, 2, 3\}$;*
2) $|G| = \frac{\varphi_1(1)^2 + \varphi_2(1)^2 + \varphi_3(1)^2}{\varphi_1(1)^2} m$, *где* $m = \sum\limits_{d \in D} |\varphi_1(d)|^2 \in \mathbb{N}$;

3) *$|G|_p$ делит* $\frac{\varphi_1(1)^2+\varphi_2(1)^2+\varphi_3(1)^2}{(\varphi_1(1),\varphi_2(1),\varphi_3(1))}$;
4) *если $\varphi_1(1)=\varphi_2(1)=\varphi_3(1)$, то $p=3$ и дефектная группа блока Φ имеет порядок* 3;
5) *если $p\neq 3$, $g\in G$ и $o(g)=3$, то*

$$\frac{(\varphi_1(1)^2+\varphi_2(1)^2+\varphi_3(1)^2)}{(\varphi_1(1),\varphi_2(1),\varphi_3(1))}\cdot\frac{\varphi_1(1)+\varphi_1(g)+\overline{\varphi_1(g)}}{3\varphi_1(1)}\in\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Положим $D=G_{p'}$. Тогда D^- есть множество всех элементов из G, порядки которых делятся на p. По [4, утверждение 5A8] Φ есть D-блок группы G, и следовательно, по теореме 1 имеем

$$\frac{\varphi_1(d)}{\varphi_1(1)}=\frac{\varphi_2(d)}{\varphi_2(1)}=\frac{\varphi_3(d)}{\varphi_3(1)}\quad\text{для всех}\quad d\in D \tag{3.1}$$

($a=\varphi_2(1)/\varphi_1(1)$, $b=\varphi_3(1)/\varphi_1(1)$, так как $1\in D$) и

$$\varphi_1(1)\varphi_1(x)+\varphi_2(1)\varphi_2(x)+\varphi_3(1)\varphi_3(x)=0\quad\text{для всех}\quad x\in D^-. \tag{3.2}$$

1. Из соотношения (3.2) непосредственно следует, что подгруппа $\mathrm{Ker}(\Phi)$ содержится в $D=G_{p'}$. Поэтому она является p'-группой и, будучи нормальной в G, содержится в $O_{p'}(G)$. По равенству (3.1) $\mathrm{Ker}(\varphi_1)\cap D=\mathrm{Ker}(\varphi_2)\cap D=$ $=\mathrm{Ker}(\varphi_3)\cap D$, и поэтому при любом $i\in\{1,2,3\}$ имеем $\mathrm{Ker}(\varphi_i)\cap G_{p'}=\mathrm{Ker}(\Phi)$, т. е. $\mathrm{Ker}(\Phi)$ — нормальная p'-холлова подгруппа в $\mathrm{Ker}(\varphi_i)$ и заключение пункта 1) выполнено.

2. Поскольку Φ есть D-блок группы G и $1\in D$, то будет выполнено утверждение 2) теоремы 1 при $a=\frac{\varphi_2(1)}{\varphi_1(1)}$ и $b=\frac{\varphi_3(1)}{\varphi_1(1)}$. Тогда из пункта 1) теоремы 3 следует требуемое равенство для $|G|$. Тот факт, что число m рациональное, следует из того, что $d^k\in D$ для любых $d\in D$ и $k\in\mathbb{Z}$ и утверждений 2A15 и 2A14 (пункт 3)) в [4]. Кроме того, число m целое алгебраическое, и следовательно, по [4, 2A6] оно целое.

3. Пусть $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$. Так как, очевидно, $P\cap D=\{1\}$, то требуемое утверждение непосредственно следует из пункта 1) предложения 6.

4. Пусть $\varphi_1(1)=\varphi_2(1)=\varphi_3(1)$. Тогда по пункту 3) $|P|$ делит $3\varphi_1(1)$. Если $p\neq 3$, то $|P|$ делит $\varphi_1(1)$, и тогда по [4, 5B8] $\{\varphi_1\}$ есть p-блок группы G, что противоречит с условию доказываемой теоремы. Следовательно, $p=3$ и $|P|/3$ делит $\varphi_1(1)$ ($\varphi_1(1)=\varphi_2(1)=\varphi_3(1)$). Последнее условие равносильно заключению пункта 4).

5. Пусть $p\neq 3$ и $o(g)=3$. Тогда для любого обобщённого характера γ группы G

$$\gamma(1)+\gamma(g)+\overline{\gamma(g)}\in 3\mathbb{Z}, \tag{3.3}$$

так как

$$\mathbb{Z}\ni(\gamma|_{\langle g\rangle},1|_{\langle g\rangle})_{\langle g\rangle}=\frac{1}{3}\big(\gamma(1)+\gamma(g)+\gamma(g^{-1})\big).$$

Рассмотрим обобщённый характер

$$\theta := \frac{\varphi_1(1)}{t}\varphi_1 + \frac{\varphi_2(1)}{t}\varphi_2 + \frac{\varphi_3(1)}{t}\varphi_3,$$

где $t := \bigl(\varphi_1(1), \varphi_2(1), \varphi_3(1)\bigr)$. Так как, очевидно, $g \in D$, то с помощью соотношения (3.1) легко получаем, что

$$\frac{\theta(1) + \theta(g) + \overline{\theta(g)}}{\theta(1)} = \frac{\varphi_1(1) + \varphi_1(g) + \overline{\varphi_1(g)}}{\varphi_1(1)}. \tag{3.4}$$

Теперь из равенств (3.3) и (3.4) получаем

$$3 \mid \theta(1) + \theta(g) + \overline{\theta(g)} = \theta(1)\frac{\varphi_1(1) + \varphi_1(g) + \overline{\varphi_1(g)}}{\varphi_1(1)},$$

что равносильно утверждению 5).

Теорема 3 доказана. □

Замечание. Пусть выполнено условие теоремы 3, $d \in D := G_{p'}$ и $p \mid |C_G(d)|$. Тогда

$$|\varphi_1(d)|^2 + |\varphi_2(d)|^2 + |\varphi_3(d)|^2 \in \mathcal{P}$$

для любого простого идеала $\mathcal{P}$ кольца $\hat{\mathbb{Z}}$, содержащего число p.

Действительно, если $dx = xd$, где $o(x) = p$, то $dx \in D_-$ и по предложению 1

$$\varphi_1(d)\overline{\varphi_1(dx)} + \varphi_2(d)\overline{\varphi_2(dx)} + \varphi_3(d)\overline{\varphi_3(dx)} = 0.$$

Но по [4, 4Д6] $\varphi_i(dx) \equiv \varphi_i(d) \pmod{\mathcal{P}}$. Отсюда и из предыдущего равенства следует требуемое утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\Phi := \dot{}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ — p-*блок группы* G (p — *простое число*) *и* $\mathrm{r}\bigl(\Xi(\Phi, G_{p'})\bigr) = 2$. *Тогда*

1) $\frac{\varphi_1(g)}{\varphi_1(1)} = \frac{\varphi_2(g)}{\varphi_2(1)} = \frac{\varphi_3(g)}{\varphi_3(1)}$ *для всех* $g \in O_{p'}(G)$;

2) $\varphi_i(x)\varphi_j(1) - \varphi_j(x)\varphi_i(1) \in |G_p|\widehat{\mathbb{Z}}$ *для всех* $x \in D^-$ *и всех* $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Доказательство. Положим $D = G_{p'}$. По предложению 3 Φ есть D-блок группы G. Тогда согласно предложению 2 $\mathrm{r}\bigl(\Xi(\Phi, D^-)\bigr) = 1$, и по теореме 1 существуют такие числа $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, что

$$\varphi_2|^0_{D^-} = a\varphi_1|^0_{D^-}, \quad \varphi_3|^0_{D^-} = b\varphi_1|^0_{D^-} \tag{3.5}$$

и

$$\varphi_1|^0_D + \overline{a}\varphi_2|^0_D + \overline{b}\varphi_3|^0_D = 0. \tag{3.6}$$

1. Пусть $g \in O_{p'}(G)$. Положим $\mu := \varphi_1 + \bar{a}\varphi_2 + \bar{b}\varphi_3$. Так как $\{1, g\} \cup g^G g^G \subseteq O_{p'}(G) \subseteq D$, то по (3.6) для функции μ выполнены условия предложения 4 при $n = 3$, $\chi_i = \varphi_i$ и $\varepsilon_i = 1$. По предложению 4 имеем $\frac{\varphi_2(g)}{\varphi_2(1)} = \frac{\varphi_3(g)}{\varphi_3(1)}$. Изменив нумерацию характеров φ_i, подобным образом получаем равенство $\frac{\varphi_1(g)}{\varphi_1(1)} = \frac{\varphi_2(g)}{\varphi_2(1)}$, т. е. утверждение 1) верно.

2. Из условия (3.5) следует, что для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$ существует такое $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, что $\varphi_j|^0_{D^-} = c\varphi_i|^0_{D^-}$. Пусть x — такой элемент из D^-, что $\varphi_i(x) \neq 0$ (такой x существует, так как иначе $\{\varphi_i\}$, а не Φ, является D-блоком). Тогда $c = \varphi_j(x)/\varphi_i(x)$ и, следовательно, функция $\gamma := \varphi_i(x)\varphi_j - \varphi_j(x)\varphi_i$ обращается в нуль на D^-. Отсюда и из того факта, что силовская p-подгруппа группы G такова, что $P \setminus \{1\} \subseteq D^-$, следует, что

$$\hat{\mathbb{Z}} \ni (\gamma|_P, 1|_P)_P = \frac{1}{|P|}(\varphi_i(x)\varphi_j - \varphi_j(x)\varphi_i).$$

Таким образом, $\varphi_i(x)\varphi_j - \varphi_j(x)\varphi_i \in |G|_p\hat{\mathbb{Z}}$ для всех $x \in D^-$ с ограничением $\varphi_i(x) \neq 0$. Но, очевидно, включение верно и без этого ограничения.

Теорема 4 доказана. □

Литература

[1] Белоногов В. А. Признаки непростоты конечной группы на языке характеров // Алгебра и логика. — 1982. — Т. 21, № 4. — С. 386—401.

[2] Белоногов В. А. D-блоки характеров конечной группы // Исследования по теории групп. — Свердловск: УрО АН СССР, 1984. — С. 3—31.

[3] Белоногов В. А. Конечные группы с небольшим главным p-блоком // Теоретико-групповые исследования. — Свердловск: УрО АН СССР, 1990. — С. 8—30.

[4] Белоногов В. А. Представления и характеры в теории конечных групп. — Свердловск: УрО АН СССР, 1990.

[5] Белоногов В. А. Малые взаимодействия в группах $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$, $\mathrm{PGL}_3(q)$ и $\mathrm{PGU}_3(q)$ // Тр. ИММ УрО РАН. — 1996. — Т. 4. — С. 17—47.

[6] Белоногов В. А. О неприводимых характерах групп S_n и A_n // Сиб. мат. журн. — 2004. — Т. 45, № 5. — С. 977—994.

[7] Белоногов В. А. К гипотезе о полупропорциональных характерах // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 2. — С. 299—314.

[8] Isaacs I. M. Character Theory of Finite Groups. — New York: Academic Press, 1976.