

Аффинные квазиалгебры и квазиалгебры обёрток над октонионами

С. В. ЛЮДКОВСКИЙ

Московский государственный институт
радиотехники, электроники и автоматики
(технический университет)
e-mail: sludkowski@mail.ru

УДК 512.554.5+514.744+517.986

Ключевые слова: аффинные квазиалгебры, квазиалгебры обёрток, октонионы, вычеты функций.

Аннотация

Данная статья посвящена аффинным квазиалгебрам и квазиалгебрам обёрток над октонионами. Изучаются вычеты функций октонионных переменных, которые используются для построения таких квазиалгебр, исследуется их структура.

Abstract

S. V. Ludkovsky, Affine and wrap quasi-algebras over octonions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 2, pp. 61—119.

The article is devoted to affine and wrap quasi-algebras over octonions. Residues of functions of octonion variables are studied. They are used for constructing such quasi-algebras. Their structure is investigated.

1. Введение

Известно, что алгебры Ли ассоциативны, в то время как алгебры Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$ при $r \geq 3$ неассоциативны [4, 10, 17, 27], что объясняет особенности квазиалгебр над $\mathcal{A}_r$. В данной статье используется развитая ранее техника вычетов мероморфных функций переменных Кэли—Диксона из [21, 26]. Необходимо отметить, что теория функций переменных Кэли—Диксона сильно отличается от теории функций комплексных переменных и имеет много специфических особенностей. Она полезна не только для математики, но и для теоретической физики, включая квантовую механику, квантовую теорию поля, дифференциальные уравнения в частных производных, некоммутативную геометрию и т. д. [2, 7, 13, 15, 18].

Над комплексным полем известны алгебры петель. Они определяются для мероморфных функций в открытой области U с одной сингулярной отмеченной точкой $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ [16]. В случае алгебр Кэли—Диксона можно рассматривать мероморфные функции с сингулярностями в замкнутом подмножестве W

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 2, с. 61—119.

© 2009 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

коразмерности не менее двух. Это подмножество W может иметь размерность больше нуля, и W можно обходить в любой плоскости, содержащей $\mathbf{R}$. Таким образом, имеются поверхности, обращающиеся вокруг W , так что интерпретация петель уже теряется. Поэтому аналоги алгебр петель над $\mathcal{A}_r$ здесь названы квазиалгебрами обёрток.

В данной статье вводятся и изучаются аффинные квазиалгебры и квазиалгебры обёрток над октонионами. Для этого определяются вычеты функций октонионных переменных и описываются их свойства. Вычеты используются для построения таких квазиалгебр. Исследуется их структура. Все основные результаты данной статьи новые.

2. Квазиалгебры над октонионами

Во избежание недоразумений сначала приведём обозначения и определения.

2.1. Замечание. Пусть V — (квази)векторное пространство над алгеброй Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq 3$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ — тело кватернионов, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$ — алгебра октонионов. Это означает по определению, что $V = {}_0V i_0 \oplus \dots \oplus {}_{2^r-1}V i_{2^r-1}$, где ${}_0V, \dots, {}_{2^r-1}V$ — попарно изоморфные вещественные векторные пространства, $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$ — множество стандартных генераторов в $\mathcal{A}_r$: $i_0 = 1$, $i_j^2 = -1$, $i_0 i_j = i_j = i_j i_0$ и $i_j i_k = -i_k i_j$ для всех $1 \leq j \neq k \leq 2^r - 1$, $2 \leq r \leq 3$. Если дополнительно каждое пространство ${}_jV$ является ассоциативной вещественной алгеброй и $(ax)(by) = (ab)(xy)$ для любых $x, y \in V_0$ и $a, b \in \mathcal{A}_r$, то мы назовём V квазиалгеброй над $\mathcal{A}_r$. Мы также будем называть пространство V просто алгеброй, так как оно является алгеброй над полем вещественных чисел.

Пусть $\mathfrak{g}$ — квазиалгебра Ли над алгеброй Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq 3$, т. е. $\mathfrak{g} = {}_0\mathfrak{g} i_0 \oplus {}_1\mathfrak{g} i_1 \oplus \dots \oplus {}_{2^r-1}\mathfrak{g} i_{2^r-1}$, где ${}_0\mathfrak{g}, \dots, {}_{2^r-1}\mathfrak{g}$ — попарно изоморфные вещественные алгебры Ли, $\{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ — стандартные генераторы алгебры $\mathcal{A}_r$. Умножение в $\mathfrak{g}$ удовлетворяет следующим тождествам. Для любых чистых состояний $x i_k \in \mathfrak{g}_k i_k$ и $y i_j \in \mathfrak{g}_j i_j$

$$[x i_k, y i_j] = (-1)^{\chi(k,j)+1} [y i_j, x i_k], \quad (1)$$

где $\chi(k, j) = 0$, если $k = 0$, или $j = 0$, или $k = j$, $\chi(k, j) = 1$ при $k \neq j$, $k \geq 1$, $j \geq 1$. Тождество Якоби приобретает вид

$$[x i_k, [y i_j, z i_s]] + (-1)^{\xi(k,j,s)} [y i_j, [z i_s, x i_k]] + (-1)^{\xi(k,j,s)+\xi(j,s,k)} [z i_s, [x i_k, y i_j]] = 0 \quad (2)$$

для любых чистых состояний $x i_k \in \mathfrak{g}_k i_k$, $y i_j \in \mathfrak{g}_j i_j$ и $z i_s \in \mathfrak{g}_s i_s$, $\xi(k, j, s) \in \{0, 1\}$ таково, что $i_k (i_j i_s) = (-1)^{\xi(k,j,s)} i_j (i_s i_k)$. Более того, умножение является вещественно билинейным:

$$[ax, by] = ab[x, y] \quad (3)$$

для любых $x, y \in \mathfrak{g}$ и $a, b \in \mathbb{R}$; $[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y]$, $[y, x_1 + x_2] = [y, x_1] + [y, x_2]$ для всех $x_1, x_2, y \in \mathfrak{g}$.

Квазиалгебру Ли мы будем также кратко называть алгеброй Ли или алгеброй над $\mathcal{A}_r$.

Рассмотрим семейство $\text{Mat}_n(\mathcal{A}_r)$ всех $(n \times n)$ -матриц с матричными элементами из $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq 3$. Поскольку алгебра октонионов альтернативна и является алгеброй с делением, то для таких матриц выполняется алгоритм Гаусса. Для таких матриц существуют ранги по строкам и столбцам, причём они совпадают [12]. Поэтому определено понятие размерности квазиевекторного пространства над $\mathcal{A}_r$ при $2 \leq r \leq 3$.

Если X и Y — векторные пространства над $\mathcal{A}_r$, то мы скажем, что отображение $A: X \rightarrow Y$ лево- $\mathcal{A}_r$ -линейно, если оно $\mathbb{R}$ -линейно и $A(z_0x) = zA_0x$ для любого чистого вектора $_0x \in _0X$ и любого числа Кэли—Диксона z . Пространство всех лево- $\mathcal{A}_r$ -линейных операторов из X в Y мы обозначим $L_1^a(X, Y)$. Предположим, что $\mathfrak{h}$ — квазиевекторное пространство над $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq 3$. Тогда мы обозначим через $\mathfrak{h}_1^*$ пространство $L_1^a(\mathfrak{h}, \mathcal{A}_r)$ всех лево- $\mathcal{A}_r$ -линейных функционалов. Очевидно, что $\mathfrak{h}_1^*$ — $\mathcal{A}_r$ -квазиевекторное пространство.

Мы назовём векторы $v_1, \dots, v_n$ в квазиевекторном пространстве X над $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq 3$, векторно независимыми, если для любых ненулевых констант $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ никакой вектор $\{a_1v_1b_1\}_{q_1(3)} + \dots + \{a_nv_nb_n\}_{q_n(3)}$ не равен нулю для любых ассоциаторов $\{\alpha_1 \dots \alpha_n\}_{q(n)}$, указывающих на порядок умножения, когда $r = 3$. При $r = 2$ эти ассоциаторы можно опустить, так как тело кватернионов ассоциативно.

Рассмотрим $(n \times m)$ -матрицы B с элементами из $\mathcal{A}_r$. Если $2 \leq r \leq 3$, то алгебра $\mathcal{A}_r$ альтернативна и всякое уравнение $ax = b$ в ней имеет решение, которое при $a \neq 0$ имеет вид $x = a^{-1}b$. Поэтому в этом случае применим алгоритм Гаусса приведения матрицы к ступенчатому виду. Из ступенчатого вида матрицы B видно, что ранги B по строкам и столбцам одинаковы. Далее мы будем считать, что для квазиалгебр $2 \leq r \leq 3$, если не будет задано что-либо иное.

Условия (1)–(3) выполнены, например, когда $\mathfrak{g} = _0\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_r$, $[xa, yb] = [x, y]ab$ и $xa = ax$ для любых $a, b \in \mathcal{A}_r$ и $x, y \in _0\mathfrak{g}$, $_0\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли.

2.2. Определение. Матрица A называется обобщённой матрицей Картана, если

- C1) $a_{j,j} = 2$ для любых j ;
- C2) $a_{j,k}$ — неположительные целые числа для всех $j \neq k$;
- C3) $a_{j,k} = 0$ влечёт $a_{k,j} = 0$.

Реализацией матрицы $A \in \text{Mat}_n(\mathcal{A}_r)$, $2 \leq r \leq 3$, мы назовём тройку $(\mathfrak{h}, \Upsilon, \Upsilon^\vee)$, где $\mathfrak{h}$ — квазиевекторное пространство над $\mathcal{A}_r$, $\Upsilon = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subset \mathfrak{h}_1^*$, $\Upsilon^\vee = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subset \mathfrak{h}$, такую что

- 1) Υ и $\Upsilon^\vee$ являются векторно $\mathcal{A}_r$ -независимыми;
- 2) $\langle \gamma_k, \beta_j \rangle = a_{k,j} \in \mathcal{A}_r$ для всех $k, j = 1, \dots, n$;
- 3) $n - l = \dim_{\mathcal{A}_r} \mathfrak{h} - n$, где l обозначает ранг матрицы A по строкам над $\mathcal{A}_r$;
- 4) $\langle a, b \rangle := b(a) \in \mathcal{A}_r$ для всех $a \in \mathfrak{h}$ и $b \in \mathfrak{h}_1^*$, $\langle _0y, \beta_j \rangle \in \mathbb{R}$ для всех $j = 1, \dots, n$ и $_0y \in _0\mathfrak{h}$, $\langle _syi_s, _k\beta_{ik} \rangle = (-1)^{\chi(s,k)} \langle _k\beta_{ik}, _syi_s \rangle$ для всех чистых состояний.

Две реализации $(\mathfrak{h}, \Upsilon, \Upsilon^\vee)$ и $(\mathfrak{h}_1, \Upsilon_1, \Upsilon_1^\vee)$ называются изоморфными, если существует изоморфизм квазивекторных пространств $\varphi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_1$, такой что $\varphi(\Upsilon^\vee) = \Upsilon_1^\vee$ и $\varphi^*(\Upsilon) = \Upsilon_1$, где $\langle \varphi^*(\beta), \gamma \rangle := \langle \beta, \varphi(\gamma) \rangle$ для всех $\beta \in \Upsilon$ и $\gamma \in \Upsilon^\vee$.

2.3. Предложение. Для любой $(n \times n)$ -матрицы A существует, и притом единственная с точностью до изоморфизма, её реализация. Реализации матриц A и B изоморфны тогда и только тогда, когда B можно получить из A перестановкой строк и столбцов.

Доказательство. Мы можем занумеровать строки и столбцы матрицы и считать, что $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, где $A_1 - (l \times n)$ -матрица ранга l . Составим матрицу $C = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & I_{n-l} \end{pmatrix}$ и положим $\mathfrak{h} = \mathcal{A}_r^{2n-l}$, где I_n обозначает единичную $(n \times n)$ -матрицу. В качестве β_j возьмём $\beta_j(x) = x_j$ при $j = 1, \dots, n$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_j \in \mathcal{A}_r$, $x \in \mathcal{A}_r^n$. В качестве γ_j возьмём строки матрицы C . Мы получили реализацию для A .

Обратно, для реализации $(\mathfrak{h}, \Upsilon, \Upsilon^\vee)$ дополним Υ до базиса с помощью $\beta_{n+1}, \dots, \beta_{2n-l} \in \mathfrak{h}_1^*$. Тогда для подходящих $(l \times (n-l))$ -матрицы B и $((n-l) \times (n-l))$ -матрицы D ранга $n-l$ мы получим, что $\langle \gamma_j, \beta_k \rangle = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ A_2 & D \end{pmatrix}$. Добавляя к β_{n+1} подходящие $\mathcal{A}_r$ -линейные комбинации $\beta_1, \dots, \beta_l$, мы можем получить, что $B = 0$, где $2 \leq r \leq 3$, так как алгебра октонионов альтернативна и всякое уравнение $ax = b$ или $xa = b$ при ненулевом a имеет решение $x = a^{-1}b$ или $x = ba^{-1}$ соответственно. Тогда мы заменим $\beta_{n+1}, \dots, \beta_{2n-l}$ на их $\mathcal{A}_r$ -линейные комбинации, чтобы получить $D = I$, что и означает единственность реализации с точностью до перестановки строк или столбцов.

Если B получается из матрицы A перестановкой строк и столбцов, то две реализации очевидно изоморфны, так как $x \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ — изоморфизм квазивекторного пространства $\mathcal{A}_r^n$, где σ обозначает транспозицию, т. е. биективное сюръективное отображение множества $\{1, 2, \dots, n\}$. $\square$

2.4. Замечание. При реализации матриц вместо лево- $\mathcal{A}_r$ -линейных функционалов можно использовать право- $\mathcal{A}_r$ -линейные функционалы. Мы обозначим через $\mathfrak{h}_r^*$ пространство право- $\mathcal{A}_r$ -линейных функционалов на $\mathfrak{h}$, $\Upsilon_r \subset \mathfrak{h}_r^*$. Если $(\mathfrak{h}, \Upsilon, \Upsilon^\vee)$ — реализация матрицы A , то $(\mathfrak{h}_r^*, \Upsilon_r^\vee, \Upsilon_r)$ — реализация транспонированной матрицы A^T .

Для двух матриц A_k , $k = 1, 2$, и их реализаций $(\mathfrak{h}_k, \Upsilon_k, \Upsilon_k^\vee)$ мы можем получить реализацию их прямой суммы $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, прямую сумму реализаций: $(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2, \Upsilon_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times \Upsilon_2, \Upsilon_1^\vee \times \{0\} \cup \{0\} \times \Upsilon_2^\vee)$.

Матрица A называется разложимой, если после перенумерации столбцов и строк A раскладывается в нетривиальную прямую сумму. Ясно, что A можно представить в виде прямой суммы неразложимых матриц, а её реализацию в виде прямой суммы неразложимых реализаций. Мы назовём Υ корневым базисом, а $\Upsilon^\vee$ дуальным корневым базисом. Элементы из Υ или $\Upsilon^\vee$ называются простыми корнями или дуальными простыми корнями соответственно. Мы положим $Q = \sum_{j=1}^n \mathbb{Z}\beta_j$, $Q_+ = \sum_{j=1}^n \mathbb{Z}_+\beta_j$, где $\mathbb{Z}_+$ обозначает множество всех положительных

ных целых чисел, и назовём $Q = Q(A)$ корневой решёткой. Для $\beta = \sum_j k_j \beta_j \in Q$ число $\text{ht } \beta := \sum_j k_j$ называется высотой элемента β . Введём частичное упорядочение $\geq$ на $\mathfrak{h}_1^*$, полагая $a \geq b$, если $a - b \in Q_+$.

2.5. Определение. Рассмотрим матрицу $A \in \text{Mat}_n(\mathcal{A}_r)$ и её реализацию $(\mathfrak{h}, \Upsilon, \Upsilon^\vee)$. Введём вспомогательную квазиалгебру $\eta(A)$ над $\mathcal{A}_r$ с генераторами $e_j, f_j, j = 1, \dots, n$, и $h \in \mathfrak{h}$ и следующими определяющими соотношениями:

- 1) $[e_k, f_j] = \delta_{k,j} \gamma_j$;
- 2) $[h, h'] = 0$ для всех $h, h' \in \mathfrak{h}$;
- 3) $[h, e_j] = \langle \beta_j, h \rangle e_j$;
- 4) $[h, f_j] = -\langle \beta_j, h \rangle f_j$ для всех $j = 1, \dots, n$ и $h \in \mathfrak{h}$;
- 5) $[au, bv] = (ab)[u, v] = [u, v](ab)$ для любых $a, b \in \mathcal{A}_r$ и $u, v \in {}_0\eta(A)$.

Обозначим через η_+ и η_- подквазиалгебры в $\eta(A)$, порождённые элементами $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ соответственно.

Матрица A называется разложимой, если после перенумерации строк и столбцов она становится нетривиальной прямой суммой двух матриц.

2.6. Теорема. Пусть квазиалгебра $\eta(A)$ та же, что и в определении 2.5. Тогда

- 1) $\eta(A) = \eta_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \eta_+$ — прямая сумма квазивекторных пространств над $\mathcal{A}_r$;
- 2) η_+ и η_- свободно порождены генераторами $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ соответственно;
- 3) отображение $e_j \mapsto -f_j, f_j \mapsto -e_j$ для любых $j = 1, \dots, n, h \mapsto -h$ для всех $h \in \mathfrak{h}$ имеет единственное продолжение до инволюции ω в алгебре $\eta(A)$;
- 4) существует разложение на корневые пространства относительно $\mathfrak{h}$ вида

$$\eta(A) = \left(\bigoplus_{\beta \in Q_+} \eta_{-\beta} \right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in Q_+} \eta_{\beta} \right),$$

где

$$\eta_{\beta} = \{x \in \eta(A) : [h, x] = \beta(h)x \text{ для всех } h \in \mathfrak{h}\},$$

более того, $\dim_{\mathcal{A}_r} \eta(A) < \infty$ и $\eta_{\beta} \subset \eta_{\pm}$ для $\pm\beta \in Q_+, \beta \neq 0$;

- 5) среди идеалов в $\eta(A)$, имеющих пустое пересечение с $\mathfrak{h}$, существует максимальный идеал τ и $\tau = (\tau \cap \eta_-) \oplus (\tau \cap \eta_+)$ — прямая сумма идеалов.

Доказательство. Пусть V — квазивекторное пространство над $\mathcal{A}_r$ с базисом $v_1, \dots, v_n$, таким что $v_1, \dots, v_n \in {}_0V$ и $\beta \in {}_0\mathfrak{h}_1^*$. Мы определим тензорную квазиалгебру $T(V)$ в V , состоящую из всех элементов $\{(b_1 x_1) \dots (b_k x_k)\}_{q(k)}$ и их конечных сумм, где $b_1, \dots, b_k \in \mathcal{A}_r, x_1, \dots, x_k \in \{v_1, \dots, v_n\}, k \in \mathbb{N}, q(s)$ — вектор, указывающий на порядок тензорного умножения, как в [21, 26]. Тогда

$$T(V) = T^0(V) \oplus T^1(V) \oplus \dots \oplus T^k(V) \oplus \dots,$$

где

$$T^0(V) = \mathcal{A}_r, \quad T^1(V) = V, \\ T^k(V) = T^{k-1}(V) \otimes V + T^{k-2} \otimes T^2(V) + \dots + V \otimes T^{k-1}(V).$$

Естественное отношение эквивалентности в $T(V)$ даёт альтернативность октонионной алгебры **O** и ассоциативность тела кватернионов **H**. Для произведений элементов можно принять в расчёт тождества, проистекающие из того, что $\mathbb{R}$ есть центр алгебры $\mathcal{A}_r$. Если $r = 2$, то тело кватернионов **H** = $\mathcal{A}_2$ ассоциативно, и в этом частном случае ассоциаторы $\{*\}_{q(*)}$, указывающие на порядок умножения, не нужны.

Мы определим действие генераторов квазиалгебры $\eta(A)$ на тензорной квазиалгебре $T(V)$ пространства V следующими формулами:

- 6) $f_j(a) = v_j \otimes a$ для любых $a \in T(V)$;
- 7) $h(1) = \langle \beta, h \rangle 1$ и по индукции $h(v_j \otimes a) = -\langle \beta_j, h \rangle v_j \otimes a + v_j \otimes h(a)$ для любых $a \in T^{s-1}(V)$, $j = 1, \dots, n$, $h \in \eta_0$, $h \in {}_0\mathfrak{h}$, $v_j \in {}_0V$;
- 8) $e_j(1) = 0$ и по индукции $e_k(v_j \otimes a) = \delta_{k,j} \gamma_k(a) + v_j \otimes e_k(a)$ для всякого $a \in T^{s-1}(V)$, $j = 1, \dots, n$, $v_j \in {}_0V$.

Теперь мы проверим выполнение условий 1)–5) из определения 2.5. Условие 5) выполнено, так как $\mathbb{R}$ — центр алгебры $\mathcal{A}_r$. Соотношение 2) выполняется для любых $h, h' \in \mathfrak{h}_0$, так как $\langle \beta, h \rangle \in \mathbb{R}$ для любых $h \in {}_0\mathfrak{h}$. В силу тождества (3) это соотношение выполнено также для всех $h, h' \in \mathfrak{h}$. Возьмём с точностью до изоморфизма $f_j \in {}_0\eta_-$ и $e_k \in {}_0\eta_+$. Тогда из формул 7), 8) мы выводим, что

$$(e_k f_j - f_j e_k)(a) = e_k(v_j \otimes a) - v_j \otimes e_k(a) = \\ = \delta_{k,j} \gamma_k(a) + v_j \otimes e_k(a) - v_j \otimes e_k(a) = \delta_{k,j} \gamma_k(a),$$

т. е. выполняется условие 1). Тогда по формулам 6), 7) мы получим

$$(h f_j - f_j h)(a) = h(v_j \otimes a) - v_j \otimes h(a) = \\ = -\langle \beta_j, h \rangle v_j \otimes a + v_j \otimes h(a) - v_j \otimes h(a) = -\langle \beta_j, h \rangle f_j(a).$$

Отметим, что из формул 6), 7) для $s = 0$ вытекает условие 3) определения 2.5. Для $s > 0$ мы возьмём $a = v_k \otimes b$, где $b \in T^{s-1}(V)$, и $h \in {}_0\mathfrak{h}$. Тогда

$$(h e_j - e_j h)(v_k \otimes b) = \\ = h(\delta_{j,k} \gamma_j(b)) + h(v_k \otimes e_j(b)) - e_j(-\langle \beta_k, h \rangle v_k \otimes b + v_k \otimes h(b)) = \\ = \delta_{j,k} \gamma_j(h(b)) - \langle \beta_k, h \rangle v_k \otimes e_j(b) + v_k \otimes h e_j(b) + \langle \beta_k, h \rangle \delta_{j,k} \gamma_j(b) + \\ + \langle \beta_k, h \rangle v_k \otimes e_j(b) - \delta_{j,k} \gamma_j h(b) - v_k \otimes e_j h(b) = \\ = \langle \beta_j, h \rangle \delta_{j,k} \gamma_j(b) + v_k \otimes (h e_j - e_j h)(b).$$

Применим предположение индукции ко второму члену. Тогда мы получим, что для ${}_0\mathfrak{h}$ выполняется условие 3) определения 2.5, так как $e_j \in {}_0\eta_+$. Учитывая условие 4) определения 2.2, мы получим условие 3) определения 2.5 для любых $h \in \mathfrak{h}$.

Используя условия 1)–4) определения 2.5, по индукции докажем, что произведения элементов из множества $\{e_j, f_j: j = 1, \dots, n; \mathbf{h}\}$ принадлежат $\eta_- + \mathbf{h} + \eta_+$. Рассмотрим элемент $u = u_- + u_{\mathbf{h}} + u_+$, где $u_- \in \eta_-$, $u_+ \in \eta_+$, $u_{\mathbf{h}} \in \mathbf{h}$. Если $u = 0$, то он действует в $T(V)$ так, что $u(1) = u_-(1) + \langle \lambda, u_{\mathbf{h}} \rangle = 0$, следовательно, $\langle \lambda, u_{\mathbf{h}} \rangle = 0$ для любых $\lambda \in \mathbf{h}_l^*$. Итак, $u_{\mathbf{h}} = 0$.

Теперь мы воспользуемся отображением $f_j \mapsto v_j$, которое превращает квазиалгебру $T(V)$ в обёртывающую квазиалгебру квазиалгебры η_- . Эти квазиалгебры являются алгебрами над полем вещественных чисел и квазиалгебрами над алгеброй $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq 3$. Тензорная квазиалгебра $T(V)$ является свободной и универсальной обёртывающей квазиалгеброй $U(\eta_-)$ для η_- . Эта квазиалгебра является неассоциативной при $r = 3$, но она ассоциативна для $r = 2$. Отображение $u_- \mapsto u_-(1)$ является каноническим вложением $\eta_- \hookrightarrow U(\eta_-)$. Таким образом, $u_- = 0$, и первое утверждение доказано.

Если A — квазиалгебра над $\mathcal{A}_r$, то через $[A]$ мы обозначим квазиалгебру, полученную из A , снабжённую скобочным умножением, написанным выше.

Квазиалгебра $U(L)$ над алгеброй $\mathcal{A}_r$ Кэли—Диксона с единицей называется универсальной обёртывающей квазиалгеброй для алгебры L над $\mathcal{A}_r$, если существует такой гомоморфизм $\varepsilon: L \rightarrow [U]$, что для любого гомоморфизма $g: L \rightarrow [A]$ существует, и притом единственный, гомоморфизм $f: U \rightarrow A$, такой что $g = f \circ \varepsilon$.

Согласно нашему построению квазиалгебра $T(V)$ имеет разложение

$$T(V) = {}_0T(V)i_0 \oplus \dots \oplus {}_{2r-1}T(V)i_{2r-1},$$

где ${}_0T(V), \dots, {}_{2r-1}T(V)$ — вещественные попарно изоморфные алгебры. Поскольку $v_1, \dots, v_n \in {}_0V$, то ${}_0T(V)$ — универсальная обёртывающая квазиалгебра для ${}_0\eta_-$. В силу теоремы Пуанкаре—Биркгофа—Витта и выбора $f_1, \dots, f_n$ выше алгебра ${}_0\eta_-$ над $\mathbb{R}$ является свободно порождённой генераторами $f_1, \dots, f_n$. Отсюда мы получаем утверждение 2) теоремы.

Применяя инволюцию ω , мы получим, что η_+ является свободно порождённой генераторами $e_1, \dots, e_n$. Используя свойства 3), 4) определения 2.5, мы получаем разложение

$$\eta_{\pm} = \bigoplus_{\beta \in Q_+, \beta \neq 0} \eta_{\pm\beta}.$$

В то же время имеется оценка

$$\dim_{\mathcal{A}_r} \eta_{\beta} \leq (2n)^{|\text{ht } \beta|}$$

для размерности квазивекторного пространства η_{β} над $\mathcal{A}_r$, которая влечёт 4).

Если τ — идеал в $\eta(A)$, то имеется разложение $\tau = {}_0\tau i_0 \oplus \dots \oplus {}_{2r-1}\tau i_{2r-1}$ с попарно изоморфными вещественными алгебрами ${}_0\tau, \dots, {}_{2r-1}\tau$. Над $\mathbb{R}$ ${}_0\tau$ — это идеал в ${}_0\eta(A)$. Для вещественных алгебр утверждение 5) теоремы известно. Идеал τ имеет разложение

$$\tau = \bigoplus_{\beta} (\eta_{\beta} \cap \tau),$$

следовательно,

$$\tau = \bigoplus_{\beta} [(\tau \cap \eta_- \cap \eta_{\beta}) \oplus (\tau \cap \eta_+ \cap \eta_{\beta})] = (\tau \cap \eta_-) \oplus (\tau \cap \eta_+)$$

есть прямая сумма $\mathcal{A}_r$ -квазивекторных пространств. Тогда $[f_j, \tau \cap \eta_+] \subset \eta_+$ и $[e_j, \tau \cap \eta_+] \subset \eta_+$, следовательно, $[\eta(A), \tau \cap \eta_+] \subset \tau \cap \eta_+$, а также $[\eta(A), \tau \cap \eta_-] \subset \tau \cap \eta_-$. Таким образом, сумма в 5) является прямой суммой идеалов. $\square$

2.7. Замечание. Рассмотрим квазифактор-алгебру $\mathfrak{g}(A) = \eta(A)/\tau$. Она существует, так как существуют попарно изоморфные вещественные фактор-алгебры $(\eta(A))_j/\tau_j$ для любых $j = 0, 1, \dots, 2^r - 1$. Каждый элемент из $\mathfrak{g}(A)$ имеет вид $b + \tau$, где $b \in \eta(A)$. Матрица A называется матрицей Картана (квази)алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$, n называется рангом (квази)алгебры $\mathfrak{g}(A)$. Совокупность $(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{h}, \Upsilon, \Upsilon^{\vee})$ мы будем называть четвёркой, ассоциированной с матрицей A .

Две четвёрки $(\mathfrak{g}(A)^k, \mathfrak{h}^k, \Upsilon^k, \Upsilon^{\vee, k})$, $k = 1, 2$, называются изоморфными, если существует такой изоморфизм квазиалгебр $\varphi: \mathfrak{g}(A)^1 \rightarrow \mathfrak{g}(A)^2$, что $\varphi(\mathfrak{h}^1) = \mathfrak{h}^2$, $\varphi^*(\Upsilon^1) = \Upsilon^2$, $\varphi(\Upsilon^{\vee, 1}) = \Upsilon^{\vee, 2}$.

Мы сохраним обозначения $e_j, f_j, \mathfrak{h}$ для образов соответствующих элементов в $\mathfrak{g}(A)$. Подквазиалгебра $\mathfrak{h}$ называется подквазиалгеброй Картана, её элементы e_j, f_j называются генераторами Шевалле. Они порождают производную подквазиалгебру, которая согласно нашему определению $\mathfrak{g}'(A)$ такова, что $\mathfrak{g}'(A) = {}_0\mathfrak{g}'(A)i_0 \oplus \dots \oplus {}_{2^r-1}\mathfrak{g}'(A)i_{2^r-1}$ с попарно изоморфными вещественными алгебрами ${}_0\mathfrak{g}'(A) \oplus \dots \oplus {}_{2^r-1}\mathfrak{g}'(A)$, где ${}_0\mathfrak{g}'(A) = [{}_0\mathfrak{g}(A), {}_0\mathfrak{g}(A)]$, так что $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}'(A) + \mathfrak{h}$.

Отметим, что $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}'(A)$ тогда и только тогда, когда ранг $\text{rank}(A) = n$ максимален. Мы положим $\mathfrak{h}' = \sum_{j=1}^n \mathcal{A}_r \gamma_j$, следовательно, $\mathfrak{g}'(A) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$, $\mathfrak{g}'(A) \cap \mathfrak{g}_{\beta} = \mathfrak{g}_{\beta}$, если $\beta \neq 0$.

В силу теоремы 2.6 существует разложение на корневые пространства относительно $\mathfrak{h}$ вида

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\beta \in Q} \mathfrak{g}_{\beta},$$

где

$$\mathfrak{g}_{\beta} = \{x \in \mathfrak{g}(A): [h, x] = \beta(h)x \text{ для всех } h \in \mathfrak{h}\} -$$

это корневое подквазипространство, соответствующее β . В частности, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Число $\text{mult } \beta := \dim_{\mathcal{A}_r} \mathfrak{g}_{\beta}$ называется размерностью элемента β . По теореме 2.6 $\text{mult } \beta \leq (2n)^{|\text{ht } \beta|}$.

Элемент $\beta \in Q$ называется корнем, если $\beta \neq 0$ и $\text{mult } \beta \neq 0$. Если $\beta < 0$ или $\beta > 0$, то корень называется отрицательным или положительным соответственно. Как обычно, обозначим через $\Delta = \Delta(A)$, Δ_- и Δ_+ семейства всех элементов, всех положительных элементов и всех отрицательных элементов соответственно. Тогда Δ есть дизъюнктное объединение Δ_- и Δ_+ . Поэтому $\mathfrak{g}_{\beta} \subset \eta_+$, если $\beta > 0$, $\mathfrak{g}_{\beta} \subset \eta_-$, если $\beta < 0$. Более того, $\mathfrak{g}_{\beta}$ является $\mathcal{A}_r$ -квазивекторным пространством, натянутым на векторы $[\dots [e_{j_1}, e_{j_2}], e_{j_3}], \dots, e_{j_s}]$,

где $\beta_1 + \dots + \beta_s = \beta$ для $\beta > 0$, или на векторы $[\dots [f_{j_1}, f_{j_2}], f_{j_3}], \dots, f_{j_s}]$, где $\beta_1 + \dots + \beta_s = -\beta$ для $\beta > 0$, так как $e_j, f_j \in \mathfrak{og}$. Таким образом, $g_{\beta_j} = \mathcal{A}_r e_j$ при $\beta_j > 0$, $g_{\beta_j} = \mathcal{A}_r f_j$ при $\beta_j < 0$, $g_{s\beta_j} = 0$ при $|s| > 1$. Каждый корень или положителен, или отрицателен. Поэтому получаем лемму 2.8.

2.8. Лемма. Если $\beta \in \Delta_+ \setminus \{\beta_j\}$, то $(\beta + \mathbb{Z}\beta_j) \cap \Delta \subset \Delta_+$.

2.9. Замечание. В соответствии с утверждениями 3), 5) теоремы 2.6 идеал τ в $\eta(A)$ является ω -инвариантным. Он индуцирует автоморфизм квазиалгебры $\mathfrak{g}(A)$, который называется инволюцией Шевалле. Это означает, что $\omega(e_j) = -f_j$, $\omega(f_j) = -e_j$, $\omega(h) = -h$ для любых $h \in \mathfrak{h}$. Более того, $\omega(g_\beta) = g_{-\beta}$, следовательно, $\text{mult } \beta = \text{mult } (-\beta)$ и $\Delta_- = -\Delta_+$.

2.10. Определение. Предположим, что G — это подмножество группового кольца ${}_0Gi_0 \oplus \mathbb{R} \dots \oplus {}_{2r-1}Gi_{2r-1}$, где ${}_jG$ — попарно изоморфные коммутативные группы и $ab = \sum_{j,k} {}_ja_k b$ для всех $a, b \in G$, $a = {}_0ai_0 + \dots + {}_{2r-1}ai_{2r-1}$, ${}_ja \in {}_jG$ для всякого j . Пусть умножение в G таково, что

- 1) существует единичный элемент $e = {}_0ei_0$, где ${}_0e$ — единичный элемент в ${}_0G$;
- 2) для каждого элемента $a \in G$ существует элемент $a^{-1} \in G$, такой что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$;
- 3) если $0 \leq r \leq 2$, то умножение ассоциативно, если $r = 3$, то умножение альтернативно (слабо ассоциативно), $(aa)b = a(ab)$, $b(aa) = (ba)a$ для всех $a, b \in G$.

Тогда мы будем кратко называть G квазикоммутативной группой, вместо того чтобы говорить «алгебраически ассоциативная квазикоммутативная группа» при $r = 2$ и «альтернативная квазикоммутативная группа» при $r = 3$.

Пусть G — группа. Разложение $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ квазивекторного пространства V в прямую сумму подквазипространств V_g над $\mathcal{A}_r$ называется G -градуированным. Элементы в V_g называются однородными степенями g .

Алгебра A , имеющая разложение $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ на такие подквазипространства A_g , что $A_g A_h \subset A_{gh}$ для любых $g, h \in G$, называется G -градуированной. При этом не предполагается, что A ассоциативна или является алгеброй Ли.

Квазиалгебру A над $\mathcal{A}_r$ назовём квазикоммутативной, если её разложение $A = {}_0Ai_0 \oplus \dots \oplus {}_{2r-1}Ai_{2r-1}$, где вещественные алгебры ${}_0A, \dots, {}_{2r-1}A$ попарно изоморфны, таково, что каждая алгебра ${}_jA$ коммутативна.

2.11. Предложение. Предположим, что $\mathfrak{h}$ — квазикоммутативная алгебра Ли над $\mathcal{A}_r$ и V — её диагонализуемый модуль, что означает, что

$$V = \bigoplus_{b \in \Lambda} V_b, \quad \Lambda \subset \mathfrak{h}_1^*, \quad (1)$$

где

$$V_b := \{v \in V : f({}_kv) = b(f)_kv \text{ для любых } f \in \mathfrak{h}, k = 0, \dots, 2^r - 1\},$$

Λ — мультипликативная подгруппа в $\mathfrak{h}_1^*$. Тогда каждый подмодуль U в V градуирован относительно градуировки (1).

Доказательство. Рассмотрим элемент $v \in V$ и запишем его в виде

$$v = \sum_{j=1}^n v_j,$$

где

$$v_j \in V_{b_j}, \quad v_j = {}_0v_j i_0 + \dots + {}_{2^r-1}v_j i_{2^r-1}, \quad {}_kv_j \in {}_kV_j.$$

Существует такой элемент $f \in \mathfrak{h}$, что числа $b_j(f)$ попарно различны. Тогда для $v \in U$ мы получим, что

$$f^p({}_kv) = \sum_{j=1}^n b_j(f)^p {}_kv_j \in U$$

для любых $p = 0, 1, \dots, n-1$ и $k = 0, \dots, 2^r-1$. Мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений над октонионами с невырожденной матрицей. Используя алгоритм Гаусса, мы получаем, что все элементы ${}_kv_j$ принадлежат ${}_kU$, и следовательно, $v_j \in U$ для каждого j . Произведение леволinéйных функционалов также леволinéйно. Отметим, что $({}_kv_i)_j({}_jv_i) \in {}_sVi_s$ для чистых состояний ${}_kv_i \in {}_kVi_k$, где $i_s = i_k i_j$. Таким образом,

$$U = \bigoplus_{b \in \Lambda} (U \cap V_b),$$

и это означает, что подмодуль U также является $\mathfrak{h}$ -градуированным. $\square$

2.12. Замечание. Если V — градуированное квазивекторное пространство, то его можно снабдить формальной топологией (иными словами, топологией прямой суммы), имеющей фундаментальную систему окрестностей нуля, состоящую из всех открытых подмножеств в V^F , где $V^F := \bigoplus_{g \in G \setminus F} V_g$, F — конечное

подмножество в G , когда каждое V_g является топологическим квазивекторным пространством. Пополнение V относительно такой топологии равно $\prod_{g \in G} V_g$, и последнее квазипространство называется формальным пополнением (или прямым произведением) V .

Градуировку можно ввести, ставя в соответствие генераторам a_j элементы $b_j \in G$ и полагая по определению, что $\deg(a_j) = b_j$. Такая градуировка задаёт единственную G -градуированную квазиалгебру Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда идеал соотношений между a_j также является G -градуированным. Это выполняется для свободной системы генераторов a_j , $j = 1, \dots, s$.

В частности, пусть $s_1, \dots, s_n$ — целые числа. Положим $\deg e_j = -\deg f_j = s_j$, $\deg \mathfrak{h} = 0$. Тогда мы получим $\mathbb{Z}$ -градуированную квазиалгебру

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j(s),$$

где

$$s = (s_1, \dots, s_n), \quad g_j(s) = \bigoplus_{\beta = \sum_m k_m \beta_m \in Q; \sum_m k_m s_m = j} g_\beta.$$

Ясно, что если $s_j > 0$ для всех j , то $g_0(s) = \mathfrak{h}$ и $\dim_{\mathcal{A}_r} g_j(s) < \infty$.

Если $s = (1, \dots, 1) = \mathbf{1}$, то

$$g_j(\mathbf{1}) = \bigoplus_{\beta: \text{ht}(\beta)=j} g_\beta, \quad g_0(\mathbf{1}) = \mathfrak{h}, \quad g_{-1}(\mathbf{1}) = \sum_m \mathcal{A}_r f_m, \quad g_1(\mathbf{1}) = \sum_m \mathcal{A}_r e_m,$$

так что

$$\eta_\pm = \bigoplus_{j \geq 1} g_{\pm j}(\mathbf{1}).$$

2.13. Лемма. Пусть $a \in \eta_+$ и либо $[a, f_j] = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$, либо $[a, e_j] = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$. Тогда $a = 0$.

Доказательство. Предположим, что элемент $a \in \eta_+$ таков, что $[a, g_{-1}(\mathbf{1})] = 0$. Тогда $\sum_{k, m \geq 0} (\text{ad } g_1(\mathbf{1}))^k (\text{ad } \mathfrak{h})^m a$ есть подквазипространство в η_+ над $\mathcal{A}_r$, инвариантное относительно $\text{ad } g_1(\mathbf{1})$, $\text{ad } \mathfrak{h}$ и $\text{ad } g_{-1}(\mathbf{1})$. Таким образом, если $a \neq 0$, то мы получим идеал в $g(A)$, который имеет с $\mathfrak{h}$ тривиальное (нулевое) пересечение. Это противоречит определению $g(A)$. $\square$

2.14. Предложение. Центр алгебры $g(A)$ или $g'(A)$, над вещественным полем $\mathbb{R}$ равен

$$Z = \{h \in {}_0\mathfrak{h} : \langle \beta_j, h \rangle = 0 \text{ для всех } j = 1, \dots, n\}.$$

Более того, $\dim_{\mathbb{R}} Z = n - l$.

Доказательство. Центр алгебры Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$ — поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Мы используем соотношения (1)–(3) замечания 2.1. Предположим, что $p \in Z$ и $p = \sum_j p_j$ — разложение p относительно главной градуировки. Тогда из $[p, g_{-1}(\mathbf{1})] = 0$ следует, что $[p_j, g_{-1}(\mathbf{1})] = 0$ для любых $j > 0$. По лемме 2.13 мы получим, что $p_j = 0$ для всех $j > 0$. Из $[p, g_1(\mathbf{1})] = 0$ мы выводим, что $p_j = 0$ для всех $j < 0$. Таким образом, $p \in \mathfrak{h}$, и мы имеем $[p, e_j] = \langle \beta_j, p \rangle e_j = 0$. Следовательно, $\langle \beta_j, p \rangle = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$.

Обратно, если $p \in \mathfrak{h}$ и $\langle \beta_j, p \rangle = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$, то p коммутирует со всеми генераторами Шевалле и, следовательно, принадлежит центру квазиалгебры. Отметим также, что $Z \subset {}_0\mathfrak{h}$, так как в противном случае $\dim_{\mathbb{R}} Z > n - l$ и Υ не будет $\mathcal{A}_r$ -векторно независимым множеством. $\square$

2.15. Предложение. Если матрица A принадлежит семейству $\text{Mat}_n(\mathcal{A}_r)$, то алгебра $g_{\mathcal{A}_{r+1}}(A)$ над $\mathcal{A}_{r+1}$ является скрещённым произведением двух копий квазиалгебр $g_{\mathcal{A}_r}(A)$ над $\mathcal{A}_r$ при $1 \leq r \leq 2$.

Доказательство. Поскольку $a_{j,k} \in \mathcal{A}_r$ для любых j, k , то, используя постоянные множители, мы можем выбрать элементы β_j и γ_j , принадлежащие

$(h_{\mathcal{A}_r})_i^*$ и $h_{\mathcal{A}_r}$ соответственно. Алгебра Кэли—Диксона $\mathcal{A}_{r+1}$ является скрещённым произведением двух копий $\mathcal{A}_r$ (используется процедура удвоения [10, 12]). Поэтому каждый элемент $v \in \eta_{\mathcal{A}_{r+1}}(A)$ можно представить в виде ${}_0v + {}_1vi_{2^r}$, где ${}_0v, {}_1v \in \eta_{\mathcal{A}_r}(A)$, i_{2^r} — генератор удвоения для $\mathcal{A}_{r+1}$ из $\mathcal{A}_r$. Это даёт разложение $\eta_{\mathcal{A}_{r+1}}(A)$ как квазивекторного пространства над $\mathcal{A}_r$ в прямую сумму $\eta_{\mathcal{A}_r}(A) \oplus \eta_{\mathcal{A}_r}(A)i_{2^r}$, где $i_0, \dots, i_{2^{r+1}-1}$ — стандартные генераторы алгебры $\mathcal{A}_{r+1}$.

С другой стороны, каждое чистое состояние из $\eta_{\mathcal{A}_{r+1}}(A)$ является чистым состоянием или в $\eta_{\mathcal{A}_r}(A)$, или в $\eta_{\mathcal{A}_r}(A)i_{2^r}$, так что правила умножения в $\eta_{\mathcal{A}_{r+1}}(A)$ и в $\eta_{\mathcal{A}_r}(A) \oplus \eta_{\mathcal{A}_r}(A)i_{2^r}$ одинаковы. Используя $\mathbb{R}$ -билинейность умножения и разлагая каждый элемент в сумму чистых состояний ${}_jvi_j$, где ${}_jv$ принадлежат вещественным алгебрам ${}_j\eta_{\mathcal{A}_{r+1}}(A)$, $j = 0, 1, \dots, 2^{r+1} - 1$, мы получаем, что квазиалгебра $\eta_{\mathcal{A}_{r+1}}(A)$ над $\mathcal{A}_{r+1}$ является скрещённым произведением $\eta_{\mathcal{A}_r}(A) \otimes^s \eta_{\mathcal{A}_r}(A)$ двух копий квазиалгебры $\eta_{\mathcal{A}_r}(A)$ над $\mathcal{A}_r$ (используется генератор i_{2^r} процедуры удвоения).

Максимальный идеал τ в $\eta_{\mathcal{A}_{r+1}}(A)$, имеющий с $h_{\mathcal{A}_{r+1}}$ тривиальное пересечение, обладает тем же разложением $\tau_{\mathcal{A}_{r+1}} = \tau_{\mathcal{A}_r} \otimes^s \tau_{\mathcal{A}_r}$, так что вещественные алгебры ${}_j\tau_{\mathcal{A}_{r+1}}$ и ${}_k\tau_{\mathcal{A}_r}$ являются попарно изоморфными для любых j, k . Отсюда следует, что

$${}_jg_{\mathcal{A}_{r+1}}(A) = {}_j\eta_{\mathcal{A}_{r+1}}(A)/{}_j\tau_{\mathcal{A}_{r+1}}$$

для любых j . Поэтому

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{A}_{r+1}}(A) &= \eta_{\mathcal{A}_{r+1}}(A)/\tau_{\mathcal{A}_{r+1}} = \\ &= (\eta_{\mathcal{A}_r}(A)/\tau_{\mathcal{A}_r}) \otimes^s (\eta_{\mathcal{A}_r}(A)/\tau_{\mathcal{A}_r}) = g_{\mathcal{A}_r}(A) \otimes^s g_{\mathcal{A}_r}(A). \quad \square \end{aligned}$$

2.16. Лемма. Пусть J_1 и J_2 — два непересекающихся подмножества множества $\{1, \dots, n\}$, такие что $a_{j,k} = a_{k,j} = 0$, когда $j \in J_1$ и $k \in J_2$. Предположим, что $\delta_s = \sum_{j \in J_s} k_{j,s} \beta_j$, $s = 1, 2$, и $\beta = \delta_1 + \delta_2$ — это корень квазиалгебры $g(A)$ над $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq 3$. Тогда $\delta_1 = 0$ или $\delta_2 = 0$.

Доказательство. Пусть $j \in J_1$ и $k \in J_2$. Тогда $[\gamma_j, e_k] = 0$, $[\gamma_k, e_j] = 0$, $[e_j, f_k] = 0$, $[e_k, f_j] = 0$, следовательно, $[e_j, e_k] = 0$ и $[f_j, f_k] = 0$ согласно лемме 2.13. Таким образом, квазиалгебры $g^1(A)$ и $g^2(A)$, где $g^s(A)$ обозначает алгебру, порождённую $\{e_j, f_j : j \in J_s\}$, коммутируют. Квазиалгебра $g_\beta(A)$ содержится в подквазиалгебре, порождённой $g^1(A)$ и $g^2(A)$, следовательно, $g_\beta(A)$ содержится или в $g^1(A)$, или в $g^2(A)$. $\square$

2.17. Предложение. Квазиалгебра $g(A)$ над $\mathcal{A}_r$, где $2 \leq r \leq 3$, является простой тогда и только тогда, когда

- 1) $\text{rank}_{\mathcal{A}_r} A = n$;
- 2) для любых $1 \leq j, k \leq n$, где n — порядок матрицы A , существуют индексы $j_1, \dots, j_s$, такие что $(\dots (a_{j,j_1} a_{j_1,j_2}) \dots) a_{j_s,k} \neq 0$.

Доказательство. Если не выполняется одно из условий 1) и 2), то согласно лемме 2.16 $g(A)$ будет содержать нетривиальный собственный идеал ξ , $\xi \neq 0$, $\xi \neq g(A)$, и квазиалгебра $g(A)$ не будет простой.

Если условия 1) и 2) выполнены и δ — ненулевой идеал в $\mathfrak{g}(A)$, то δ содержит ненулевой элемент $h \in \mathfrak{h}$. Поскольку $\text{rank}_{\mathcal{A}_r} = n$, то согласно предложению 2.14 $Z = 0$, следовательно, $[h, e_j] = ae_j \neq 0$ для некоторого j , поэтому $e_j \in \delta$ и $\gamma_j = [e_j, f_j] \in \delta$. Из условия 2) и того факта, что норма в октонионной алгебре мультипликативна, мы получим, что $e_j, f_j, \gamma_j \in \delta$ для всех j . С другой стороны, из условия 1) следует, что $\mathfrak{h}$ — это $\mathcal{A}_r$ -векторная оболочка элементов γ_j . Таким образом, мы получим $\delta = \mathfrak{g}(A)$. $\square$

2.18. Определение. Матрица размера $n \times n$ с элементами из $\mathcal{A}_r$ называется симметризуемой, если существуют диагональная матрица $D = (d_1, \dots, d_n)$, где $d_j \neq 0$ для любых j , и симметричная матрица B (т. е. $B^T = B$, где B^T обозначает транспонированную матрицу B), такие что

$$A = DB. \quad (1)$$

В этом случае B называется симметризацией A , а алгебра $\mathfrak{g}(A)$ называется симметризуемой.

Для симметризуемой матрицы A с разложением (1) и реализацией $(\mathfrak{h}, \Upsilon, \Upsilon^\vee)$ мы зафиксировав $\mathcal{A}_r$ -векторное пространство $\mathfrak{h}_2$, дополнительное к $\mathfrak{h}_1 = \text{span}_{\mathcal{A}_r} \{\gamma_j : j\}$ в $\mathfrak{h}$, и симметричную $\mathcal{A}_r$ -значную форму $(* | *)$ на $\mathfrak{h}$, лево- $\mathcal{A}_r$ -линейную по левому аргументу и право- $\mathcal{A}_r$ -линейную по правому аргументу, такие что

- 2) $(\gamma_j | h) = d_j \langle \beta_j, h \rangle$ для любых $h \in \mathfrak{h}$;
- 3) $(h_1 | h_2) = 0$ для любых $h_1 \in \mathfrak{h}_1$ и $h_2 \in \mathfrak{h}_2$;
- 4) $({}_0x | {}_0y) \in \mathbb{R}$ для любых ${}_0x, {}_0y \in {}_0\mathfrak{g}$,
- 5) $(\gamma_j | \gamma_k) = d_j b_{j,k} d_k$, где $b_{j,k} \in \mathbb{R}$, для любых j и k .

2.19. Предложение.

1. Ядро ограничения формы $(* | *)$ на $\mathfrak{h}_1$ совпадает с Z .
2. Форма $(* | *)$ невырожденная на $\mathfrak{h}$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из предложения 2.14. Для доказательства второго утверждения рассмотрим условие $0 = \left(\sum_j c_j \gamma_j | h \right)$ для всех $h \in \mathfrak{h}$. Поскольку $\left(\sum_j c_j \gamma_j | h \right) = \left\langle \sum_j c_j d_j \beta_j, h \right\rangle$ для любых $h \in {}_0\mathfrak{h}$, имеем $\sum_j c_j d_j \beta_j = 0$, следовательно, $c_j = 0$ для любых $j = 1, \dots, n$. $\square$

2.20. Замечание. Форма $(* | *)$ невырожденная, и существует изоморфизм $\nu: {}_0\mathfrak{h} \rightarrow {}_0\mathfrak{h}_1^*$, имеющий естественное продолжение до изоморфизмов $\nu: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_1^*$ и $\nu_r: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_r^*$, такой что $\langle \nu(h), p \rangle = (h | p)$ для всех $h, p \in \mathfrak{h}$, с индуцированной формой $(* | *)$ на $\mathfrak{h}_1^*$, для которой

- 1) $(\beta_j | \beta_k) = b_{j,k} = d_k^{-1} a_{k,j}$ для любых j, k ;
- 2) $\langle p, \nu_r(h) \rangle = (p | h)$ для любых $h, p \in \mathfrak{h}$,

и с индуцированной формой $(* | *)$ на $\mathfrak{h}_r^*$. Очевидно, что

- 3) $\nu(\gamma_j) = d_j \beta_j$;
 4) $\nu_r(\gamma_j) = \beta_j d_j$.

2.21. Теорема. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — симметризуемая квазиалгебра Ли, и пусть задано её разложение (1) (см. определение 2.18). Тогда существует невырожденная симметричная $\mathcal{A}_r$ -значная форма $(* | *)$ на $\mathfrak{g}(A)$, лево- $\mathcal{A}_r$ -линейная по левому аргументу и право- $\mathcal{A}_r$ -линейная по правому аргументу и удовлетворяющая условиям 2)–4) определения 2.18, причём

- 1) форма $(* | *)$ инвариантна на ${}_{0\mathfrak{g}}(A)$, т. е. $([x, y] | z) = (x | [y, z])$ для всех $x, y, z \in {}_{0\mathfrak{g}}(A)$;
 2) $(\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_\delta) = 0$, если $\beta + \delta \neq 0$;
 3) ограничение $(* | *)|_{\mathfrak{g}_\beta + \mathfrak{g}_{-\beta}}$ является невырожденным при $\beta \neq 0$;
 4) $[x, y] = (x | y)\nu^{-1}(\beta)$ для любых $x \in \mathfrak{g}_\beta$ и $y \in \mathfrak{g}_{-\beta}$, $\beta \in \Delta$.

Доказательство. Рассмотрим главную $\mathbb{Z}$ -градуировку $\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ и положим $\mathfrak{g}(m) = \bigoplus_{j=-m}^m \mathfrak{g}_j$ для $m = 0, 1, 2, \dots$. Определим на $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{h}$ форму $(* | *)$, лево- $\mathcal{A}_r$ -линейную по левому аргументу и право- $\mathcal{A}_r$ -линейную по правому аргументу и удовлетворяющую условиям 2)–5) определения 2.18. Продолжим её на $\mathfrak{g}(1)$ следующим образом:

$$(e_j | f_k) = \delta_{j,k} d_j, \quad j, k = 1, \dots, n;$$

$$(\mathfrak{g}_0 | \mathfrak{g}_{\pm 1}) = 0, \quad (\mathfrak{g}_1 | \mathfrak{g}_1) = 0, \quad (\mathfrak{g}_{-1} | \mathfrak{g}_{-1}) = 0.$$

Поскольку форма лево- $\mathcal{A}_r$ -линейна по левому аргументу и право- $\mathcal{A}_r$ -линейна по правому аргументу, $([e_j | f_k] | h) = (e_j | [f_k, h])$ для любых $h \in \mathfrak{h}$, или, эквивалентно, $\delta_{j,k}(\gamma_j | h) = \delta_{j,k} d_j \langle \beta_j, h \rangle$, где мы можем взять $e_j, f_k \in {}_{0\mathfrak{g}}$. Тогда форма $(* | *)$ удовлетворяет условию 1), когда оба элемента $[x, y]$ и $[y, z]$ принадлежат $\mathfrak{g}(1)$. Поскольку форма лево- $\mathcal{A}_r$ -линейна по левому аргументу и право- $\mathcal{A}_r$ -линейна по правому аргументу, мы можем продолжить её на $\mathfrak{g}(m)$ индукцией по $m \geq 1$, чтобы $(\mathfrak{g}_j | \mathfrak{g}_k) = 0$, если $|j|, |k| \leq m$ и $j + k \neq 0$. Таким образом, условие 1) выполняется, когда $[x, y]$ и $[y, z]$ принадлежат $\mathfrak{g}(m)$.

Предположим, что продолжение осуществлено для $\mathfrak{g}(m-1)$. Тогда нам нужно определить $(x | y)$ только при $x \in \mathfrak{g}_{\pm m}$ и $y \in \mathfrak{g}_{\mp m}$. Запишем y в виде $y = \sum_j [u_j, v_j]$, где u_j и v_j — однородные элементы ненулевой степени, принадлежащие $\mathfrak{g}(m-1)$. Тогда $[x, u_j] \in \mathfrak{g}(m-1)$, и для $u_j, v_j \in {}_{0\mathfrak{g}}(m-1)$ мы положим

$$(x | y) = \sum_j ([x, u_j] | v_j). \quad (5)$$

Потом по правилу лево- $\mathcal{A}_r$ -линейности по левому аргументу и право- $\mathcal{A}_r$ -линейности по правому аргументу мы продолжим форму на $\mathfrak{g}(m)$. Остаётся проверить, что определение по формуле (5) корректно на ${}_{0\mathfrak{g}}$. Предположим, что $x_j \in {}_{0\mathfrak{g}} \mathfrak{g}_j$ для $j \in \mathbb{Z}$. Возьмём $k, j, s, t \in \mathbb{Z}$, для которых $|k+j| = |s+t| = m$ и $k+j+s+t = 0$;

$|k|, |j|, |s|, |t| < m$. Тогда

$$([x_k, x_j], x_s \mid x_t) = (x_k \mid [x_j, [x_s, x_t]]), \quad (6)$$

так как

$$\begin{aligned} ([x_k, x_j], x_s \mid x_t) &= ([x_k, x_s], x_j \mid x_t) - ([x_j, x_s], x_k \mid x_t) = \\ &= ([x_k, x_s] \mid [x_j, x_t]) + (x_k \mid [[x_j, x_s], x_t]) = \\ &= (x_k \mid [x_s, [x_j, x_t]] + [[x_j, x_s], x_t]) = (x_k \mid [x_j, [x_s, x_t]]). \end{aligned}$$

Если теперь $x = \sum_k [p_k, w_k]$, то из (5), (6) мы получим

$$(x \mid y) = \sum_k ([x, u_k] \mid v_k) = \sum_k (p_k \mid [w_k, y]).$$

Следовательно, это значение не зависит от выбора выражений для x и y .

Из определений вытекает, что условие 1) выполнено, как только $[x, y]$ и $[y, z]$ принадлежат $\mathfrak{g}(m)$. Таким образом, мы построили форму $(* \mid *)$ на $\mathfrak{g}$, удовлетворяющую условиям 1), 2). Её ограничение на $\mathfrak{h}$ невырожденное по предложению 2.19.

Форма $(* \mid *)$ удовлетворяет условию 3), так как $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ и $y \in \mathfrak{g}_\beta$. Учитывая свойство инвариантности и свойство, что форма лево- $\mathcal{A}_r$ -линейна по левому аргументу и право- $\mathcal{A}_r$ -линейна по правому аргументу, мы выводим, что

$$0 = ([h, x] \mid y) + (x \mid [h, y]) = (\langle \beta, h \rangle + \langle \gamma, h \rangle)(x \mid y).$$

Для $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ и $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, где $\alpha \in \Delta$ и $h \in \mathfrak{h}$, мы получим

$$([x, y] - (x \mid y)\nu^{-1}(\alpha) \mid h) = (x \mid [y, h]) - (x \mid y)\langle \alpha, h \rangle = 0.$$

Таким образом, условие 5) вытекает из 2). Из 2), 3), 5) следует, что билинейная форма $(* \mid *)$ симметрична.

Если 4) не выполняется, то по 3) форма $(* \mid *)$ вырожденная. Положим $\mathfrak{t} = \text{Ker}(* \mid *)$. Это идеал, и по 2) мы имеем $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h} = 0$. Но это противоречит определению квазиалгебры $\mathfrak{g}(A)$. $\square$

2.22. Замечание. Предположим, что $A = (a_{k,j})$ — симметризуемая обобщённая матрица Картана. Уравнение (1) определения 2.18 эквивалентно системе однородных линейных уравнений $\text{diag}(d_1^{-1}, \dots, d_n^{-1})A = (b_{j,k})$, где $b_{j,k} = b_{k,j}$ для всех j, k , и неравенств $d_j \neq 0$, так как октонионная алгебра $\mathbf{O} = \mathcal{A}_3$ альтернативна. Но в обобщённой матрице Картана все элементы целые, следовательно, решения могут быть выбраны в поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Таким образом, мы можем выбрать разложение (1) (см. определение 2.18) с $d_j > 0$, такое что d_j и $b_{j,k}$ — рациональные числа.

Мы можем предполагать, что матрица A неразложима. По предложению 2.17 для любых $1 < j \leq n$ существует такая последовательность $1 = j_1 < j_2 < \dots < j_{k-1} < j_k = j$, что $a_{j_k, j_{k+1}} < 0$. Поэтому $a_{j_s, j_{s+1}} d_{j_{s+1}} = a_{j_{s+1}, j_s} d_{j_s}$ для любых $s = 1, \dots, k-1$. Итак, $d_j d_1 > 0$ для любых j . Поэтому мы можем

выбрать $d_j > 0$ для каждого j . Если матрица A неразложима, то диагональная матрица $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ определяется согласно (1) (см. определение 2.18) единственным образом с точностью до умножения на постоянную. Теперь мы зафиксируем симметричную форму, которая лево- $\mathcal{A}_r$ -линейна по левому аргументу и право- $\mathcal{A}_r$ -линейна по правому аргументу и удовлетворяет условиям 2)–4), связанными с разложением (1) (см. определение 2.18). По предложению 2.19 мы получаем, что

- 1) $(\beta_j | \beta_j) > 0$ для любых $j = 1, \dots, n$;
- 2) $(\beta_j | \beta_k) \leq 0$ для любых $j \neq k$;
- 3) $\gamma_j = 2\nu^{-1}(\beta_j)/(\beta_j | \beta_j)$.

Таким образом, $a_{j,k} = 2(\beta_j | \beta_k)/(\beta_j | \beta_j)$ для любых j, k . Тогда мы возьмём продолжение формы $(* | *)$ с $\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{g}(A)$ согласно теореме 2.21. Эта форма будет называться стандартной инвариантной формой.

Если выбрать для корня β двойственные базисы $\{e_\beta^j\}$ и $\{e_{-\beta}^j\}$ в $0\mathfrak{g}_\beta$ и в $0\mathfrak{g}_{-\beta}$, такие что $(e_\beta^j | e_{-\beta}^k) = \delta_{j,k}$ для $j, k = 1, \dots, \text{mult } \beta$, то для $x \in \mathfrak{g}_\beta$ и $y \in \mathfrak{g}_{-\beta}$ будет выполнено тождество

$$(x | y) = \sum_j (x | e_{-\beta}^j)(y | e_\beta^j). \quad (4)$$

2.23. Лемма. Если $\alpha, \beta \in \Delta$ и $z \in \mathfrak{g}_{\beta-\alpha}$, то в $\mathfrak{g}(A) \otimes \mathfrak{g}(A)$ выполняется тождество

$$\sum_s e_{-\alpha}^s \otimes [z, e_\alpha^s] = \sum_s [e_{-\beta}^s, z] \otimes e_\beta^s. \quad (1)$$

Доказательство. Мы определим форму $(* | *)$, лево- $\mathcal{A}_r$ -линейную по левому аргументу и право- $\mathcal{A}_r$ -линейную по правому аргументу, удовлетворяющую условиям 2)–4) определения 2.18, по формуле

$$({}_k x i_k \otimes {}_j y i_j | {}_s w i_s \otimes {}_t z i_t) = (-1)^{\zeta(k,j,s,t)} ({}_k x i_k | {}_s w i_s) ({}_j y i_j | {}_t z i_t)$$

для чистых состояний и продолжим её по $\mathbb{R}$ -билинейности на $\mathfrak{g}(A) \otimes \mathfrak{g}(A)$, где $\zeta(k, j, s, t) \in \{0, 1\}$ такое, что $(i_k i_j)(i_s i_t) = (-1)^{\zeta(k,j,s,t)} (i_k i_s)(i_j i_t)$. Мы возьмём $e \in 0\mathfrak{g}_\alpha$ и $f \in 0\mathfrak{g}_{-\beta}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_s (e_{-\alpha}^s \otimes [z, e_\alpha^s] | e \otimes f) &= \\ &= \sum_s (e_{-\alpha}^s | e)([z, e_\alpha^s] | f) = \sum_s (e_{-\alpha}^s | e)(e_\alpha^s | [f, z]) = (e | [f, z]), \end{aligned}$$

а также

$$\sum_s ([e_{-\beta}^s, z] \otimes e_\beta^s | e \otimes f) = \sum_s (e_{-\beta}^s | [z, e])(e_\beta^s | f) = ([z, e] | f)$$

по теореме 2.21 и формуле (4) замечания 2.22. Поскольку форма лево- $\mathcal{A}_r$ -линейна по левому аргументу и право- $\mathcal{A}_r$ -линейна по правому аргументу, последние две формулы влекут (1), так как октонионная алгебра альтернативна. $\square$

2.24. Следствие. Пусть выполнены условия леммы 2.23. Тогда

- 1) $\sum_s [e_{-\alpha}^s, [z, e_\alpha^s]] = \sum_s [[e_{-\beta}^s, z], e_\beta^s]$ в $\mathfrak{g}(A)$;
- 2) $\sum_s e_{-\alpha}^s [z, e_\alpha^s] = \sum_s [e_{-\beta}^s, z] e_\beta^s$ в $U(\mathfrak{g}(A))$.

Доказательство. Данный результат получается путём применения отображений $\mathfrak{g}(A) \otimes \mathfrak{g}(A) \ni x \otimes y \mapsto [x, y] \in \mathfrak{g}(A)$ и $\mathfrak{g}(A) \otimes \mathfrak{g}(A) \ni x \otimes y \mapsto xy \in U(\mathfrak{g}(A))$ к формуле (1) леммы 2.23. $\square$

2.25. Замечание. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — квазиалгебра Ли, соответствующая матрице A , $\mathfrak{h}$ — её подквазиалгебра Картана, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\beta} \mathfrak{g}_{\beta}$ — её разложение на корневые подквазипространства относительно $\mathfrak{h}$. $\mathfrak{g}(A)$ -модуль (или $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль) V называется ограниченным, если для каждого элемента $v \in V$ для всех корней β , кроме конечного числа положительных, справедливо $\mathfrak{g}_{\beta}(v) = 0$.

Введём функционал $\rho \in \mathfrak{h}_{\Gamma}^*$ по формуле $\langle \rho, \gamma_j \rangle = a_{jj}/2$, $j = 1, \dots, n$, где $\gamma_j \in \Upsilon^{\vee}$. Если $\text{rank } A < n$, то формула не определяет ρ единственным образом, поэтому мы можем взять любой функционал, удовлетворяющий этим соотношениям. Согласно свойствам 1), 3) замечания 2.20 мы получаем, что $(\rho | \beta_j) = (\beta_j | \beta_j)/2$ для любых $j = 1, \dots, n$.

Для любого положительного корня β мы выберем базис $\{e_{\beta}^j\}$ в квазипространстве $\mathfrak{g}_{\beta}$ и возьмём дуальный базис $\{e_{-\beta}^j\}$ в $\mathfrak{g}_{-\beta}$ так, что они принадлежат $\mathfrak{o}\mathfrak{g}_{\beta}$ и $\mathfrak{o}\mathfrak{g}_{-\beta}$ соответственно. Тогда положим

$$\Omega_0 = 2 \sum_{\beta \in \Delta_+} \sum_j e_{-\beta}^j e_{\beta}^j.$$

Этот оператор не зависит от выбора дуального базиса. Для любых $v \in V$ только конечное число слагаемых $e_{-\beta}^j e_{\beta}^j(v)$ отлично от нуля, следовательно, оператор Ω_0 корректно определён на V . Пусть $u_1, u_2, \dots$ и $u^1, u^2, \dots$ — дуальный базис для подквазиалгебры $\mathfrak{h}$, принадлежащий $\mathfrak{o}\mathfrak{h}$. Мы определим обобщённый оператор Казимира следующим образом:

$$\Omega = 2\nu_r^{-1}(\rho) + \sum_j u^j u_j + \Omega_0.$$

Выберем $\rho \in \mathfrak{o}\mathfrak{h}_{\Gamma}^*$.

Рассмотрим теперь разложение на корневые подквазипространства для $U(\mathfrak{g}(A))$ относительно $\mathfrak{h}$:

$$U(\mathfrak{g}(A)) = \bigoplus_{\beta \in Q} U_{\beta},$$

где

$$U_{\beta} = \{x \in U(\mathfrak{g}(A)) : [h, x] = \langle \beta, h \rangle x \text{ для всех } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Положим $U'_{\beta} = U(\mathfrak{g}'(A)) \cap U_{\beta}$. Тогда $U(\mathfrak{g}'(A)) = \bigoplus_{\beta} U'_{\beta}$.

2.26. Теорема. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — симметризуемая квазиалгебра над $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq 3$. Если V — ограниченный $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль и $u \in U'_\beta$, то

$$[\Omega_0, u] = -(2(\rho | \beta) + (\beta | \beta) + 2\nu_r^{-1}(\beta))u. \quad (1)$$

Если V — ограниченный $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль, то Ω коммутирует с действием $\mathfrak{g}(A)$ на V .

Доказательство. Поскольку

$$\lambda = \sum_j \langle \lambda, u^j \rangle \nu_r(u_j) = \sum_j \langle \lambda, u_j \rangle \nu(u^j)$$

для любых $\lambda \in \mathfrak{g}(A)$, то

$$\sum_j \langle \lambda, u^j \rangle \langle u_j, \mu \rangle = (\lambda | \mu). \quad (2)$$

Более того,

$$\left[\sum_j u^j u_j, x \right] = ((\beta | \beta) + 2\nu_r^{-1}(\beta))x \quad (3)$$

для любых $x \in \mathfrak{g}_\beta$, так как

$$\begin{aligned} \left[\sum_j u^j u_j, x \right] &= \sum_j \langle \beta, u^j \rangle x u_j + \sum_j u^j \langle u_j, \beta \rangle x = \\ &= \sum_j \langle \beta, u^j \rangle \langle u_j, \beta \rangle x + \left(\sum_j u^j \langle u_j, \beta \rangle + \langle \beta, u^j \rangle u_j \right) x. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение о коммутировании следует из формул 1 и (3).

Возьмём теперь элементы e_{β_j} и $e_{-\beta_j}$, где $j = 1, \dots, n$, которые порождают квазиалгебру $\mathfrak{g}'(A)$. Если $u = e_{\beta_j}$ или $u = e_{-\beta_j}$, то по лемме 2.8 и следствию 2.24 мы выводим, что

$$\begin{aligned} [\Omega_0, e_{\beta_j}] &= 2 \sum_{\beta \in \Delta_+} \sum_s ([e_{-\beta}^s, e_{\beta_j}] e_\beta^s + e_{-\beta}^s [e_\beta^s, e_{\beta_j}]) = \\ &= 2[e_{-\beta_j}, e_{\beta_j}] e_{\beta_j} + 2 \sum_{\beta \in \Delta_+ \setminus \{\beta_j\}} \left(\sum_s [e_{-\beta}^s, e_{\beta_j}] e_\beta^s + \sum_s e_{-\beta+\beta_j}^s [e_{\beta-\beta_j}^s, e_{\beta_j}] \right) = \\ &= -2\nu_r^{-1}(\beta_j) e_{\beta_j} = -2(\beta_j | \beta_j) e_{\beta_j} - 2e_{\beta_j} \nu_r^{-1}(\beta_j). \end{aligned}$$

Аналогично мы имеем

$$[\Omega_0, e_{-\beta_j}] = 2e_{-\beta_j} [e_{\beta_j}, e_{-\beta_j}] = 2e_{-\beta_j} \nu_r^{-1}(\beta_j).$$

Таким образом, мы получили утверждение (1) для $u = e_{\beta_j}$ и $u = e_{-\beta_j}$. Если $u \in U'_\alpha$ и $v \in U'_\beta$, то

$$\begin{aligned} [\Omega_0, uv] &= [\Omega_0, u]v + u[\Omega_0, v] = \\ &= -\{(2(\rho | \alpha) + (\alpha | \alpha) + 2\nu_r^{-1}(\alpha))u\}v - u\{(2(\rho | \beta) + (\beta | \beta) + 2\nu_r^{-1}(\beta))v\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -((2(\rho | \alpha) + (\alpha | \alpha) + 2\nu_r^{-1}(\alpha) + 2(\alpha | \beta) + 2(\rho | \beta) + (\beta | \beta) + 2\nu_r^{-1}(\beta))uv = \\
&= (2(\rho | \alpha + \beta) + (\alpha + \beta | \alpha + \beta) + 2\nu_r^{-1}(\alpha + \beta))uv,
\end{aligned}$$

так как $\alpha, \beta \in {}_0\mathfrak{h}^*$, $e_\beta \in {}_0\mathfrak{g}_\beta$, $\rho \in {}_0\mathfrak{h}_r^*$ и, следовательно, $\nu_r^{-1}(\rho) \in {}_0\mathfrak{h}$, в то время как $\mathbb{R}$ является центром алгебры Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$.

Таким образом, формула (1) доказана в общем случае. $\square$

2.27. Следствие. Если предположения теоремы 2.26 выполнены и существует такой вектор $v \in V$, что $e_j(v) = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$ и $h(v) = \langle b, h \rangle v$ для некоторого $b \in \mathfrak{h}_r^*$ и всех $h \in \mathfrak{h}$, то

$$\Omega(v) = (b + 2\rho | b)v. \quad (1)$$

Более того, если $U(\mathfrak{g}(A))v = V$, то

$$\Omega = (b + 2\rho | b)I_V. \quad (2)$$

Доказательство. Формула (1) вытекает из определения Ω и формулы (2) теоремы 2.26. Тогда формула (2) вытекает из формулы (1) и теоремы 2.26. $\square$

2.28. Предложение. Пусть $\mathfrak{g}$ — квазиалгебра над $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq 3$, с инвариантной формой $(* | *)$, лево- $\mathcal{A}_r$ -линейной по левому аргументу и право- $\mathcal{A}_r$ -линейной по правому аргументу и удовлетворяющей условиям 2)–4) определения 2.18. Пусть также $\{x_j : j\}$ и $\{y_j : j\}$ — это дуальные базисы, принадлежащие ${}_0\mathfrak{g}$, т. е. $(x_j | y_k) = \delta_{j,k}$ для любых j, k . Предположим, что V — такой $\mathfrak{g}$ -модуль, что для любых пар элементов $u, v \in V$ справедливо, что или $x_j(u) = 0$, или $y_j(v) = 0$ для всех j , кроме конечного числа j . Тогда оператор $\Omega_2 := \sum_j x_j \otimes y_j$ определён на $V \otimes V$ и коммутирует с действием всех элементов $\mathfrak{g}$ на V .

Доказательство. Рассмотрим коммутаторы $[z, x_j] = \sum_k c_{j,k} x_k$, $[z, y_j] = \sum_k p_{k,j} y_k$, где $c_{j,k}, p_{k,j} \in \mathcal{A}_r$. Беря скалярные произведения, мы получаем, что $c_{j,k} = ([z, x_j] | y_k)$ и $p_{k,j} = ([z, y_j] | x_k)$. Из инвариантности формы $(* | *)$ следует, что $c_{j,k} = (z | [x_j, y_k])$ и $p_{k,j} = (z | [y_j, x_k])$, поэтому $c_{j,k} = -p_{k,j}$ для всех j, k и $\sum_j ([z, x_j] \otimes y_j + x_j \otimes [z, y_j]) = 0$, так как $x_j, y_j \in {}_0\mathfrak{g}$ для любых j . $\square$

2.29. Пример. Рассмотрим нулевую $(n \times n)$ -матрицу $A = 0$, где $n \in \mathbb{N}$ или $n = \infty$. Тогда $[e_j, e_k] = 0$, $[f_j, f_k] = 0$, $[e_j, f_k] = \delta_{j,k} \gamma_j$ для всех $j, k = 1, \dots, n$. Следовательно,

$$\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{h} \oplus \sum_j \mathcal{A}_r e_j \oplus \sum_j \mathcal{A}_r f_j.$$

Центр $\mathfrak{g}(0)$ равен $Z = \sum_j \mathbb{R} \gamma_j$. Более того, $\dim_{\mathcal{A}_r} \mathfrak{h} = 2n$, и мы можем выбрать такие элементы $d_1, \dots, d_n \in \mathfrak{h}$, что $\mathfrak{h} = \mathcal{A}_r \otimes_{\mathbb{R}} Z + \sum_j \mathcal{A}_r d_j$ и $[d_j, e_k] = \delta_{j,k} e_k$, $[d_j, f_k] = -\delta_{j,k} f_k$ для любых $j, k = 1, \dots, n$. Невырожденная симметричная инвариантная форма, лево- $\mathcal{A}_r$ -линейная по левому аргументу и право- $\mathcal{A}_r$ -линейная

по правому аргументу и удовлетворяющая условиям 2)–5) определения 2.18 задаётся правилами $(e_j | f_j) = 1$, $(\gamma_j | d_j) = 1$ для любых j , все другие скалярные произведения равны нулю. На рассматриваемой квазиалгебре $\rho = 0$ и оператор Казимира приобретает вид $\Omega = 2 \sum_j \gamma_j d_j + 2 \sum_j f_j e_j$.

Положим $q = \sum \mathcal{A}_r(\gamma_j - \gamma_k) \subset \mathcal{A}_r \otimes_{\mathbb{R}} Z$. Мы назовём квазиалгеброй Гейзенберга над алгеброй Кэли–Диксона $\mathcal{A}_r$ квазиалгебру $H := \mathbf{g}'(0)/q$, где $\mathbf{g}' = {}_0\mathbf{g}'i_0 \oplus \dots \oplus {}_{2^r-1}\mathbf{g}'i_{2^r-1}$, ${}_0H = {}_0\mathbf{g}'(0)/{}_0q$, $H = {}_0Hi_0 \oplus \dots \oplus {}_{2^r-1}Hi_{2^r-1}$, вещественные алгебры ${}_0H, \dots, {}_{2^r-1}H$ попарно изоморфны.

3. Вычеты октонионных мероморфных функций

Далее нам потребуются вычеты (супер)дифференцируемых функций переменных Кэли–Диксона. В данном разделе они изучаются более подробно и в большей общности, чем в других статьях автора.

3.1. Определение. Пусть $f: V \rightarrow \mathcal{A}_r$ — функция, V — окрестность точки $z \in \hat{\mathcal{A}}_r$, где $\hat{\mathcal{A}}_r$ обозначает одноточечную компактификацию $\mathcal{A}_r$ с помощью бесконечной точки или как некоммутативного аналога 2^r -мерной сферы Римана [21, 26]. Тогда функция f называется мероморфной в точке z , если она имеет изолированную особенность в z и является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной в $V \setminus \{z\}$. Если U — открытое подмножество в $\hat{\mathcal{A}}_r$, то функция f называется мероморфной в U , если она мероморфна в каждой точке $z \in U$. Если U — область определения функции f и f мероморфна в U , то f называется мероморфной на U .

Это определение имеет естественное обобщение. Пусть W — замкнутое связное подмножество в $\hat{\mathcal{A}}_r$, его коразмерность не меньше двух ($\text{codim}(W) = 2^r - \dim(W) \geq 2$, где $\dim(W)$ — топологическая размерность в смысле покрытий для W (см. [9, § 7.1])) и $W \cap (z + \mathbb{R} \oplus \widehat{M\mathbb{R}})$ — множество, состоящее из изолированных точек для каждого чисто мнимого числа Кэли–Диксона $M \in \mathcal{A}_r$, $|M| = 1$, и всех $z \in W \cup \{0\}$. Если существует открытая окрестность V для W , такая что функция f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной на $V \setminus W$ и может иметь сингулярности в точках из W , то f называется мероморфной на W . Если U — открытое подмножество в $\hat{\mathcal{A}}_r$, различные подмножества W_k в U изолированы друг от друга, т. е. $\inf\{|\zeta - \eta| : j = 1, 2, k-1, k+1, \dots, \zeta \in W_k, \eta \in W_j\} > 0$ для любого отмеченного k , f мероморфна на каждом W_k и $\mathcal{A}_r$ -голоморфна на $U \setminus \left[\bigcup_k W_k \right]$ и $\bigcup_k W_k$ замкнуто в $\mathcal{A}_r$, то f называется мероморфной на U .

Мы обозначим через $\mathbf{M}(U)$ множество всех мероморфных функций на U с одноточечными сингулярностями $W = \{z\}$. Пусть функция f мероморфна на области U в $\hat{\mathcal{A}}_r$. Точка

$$c \in \bigcap_{V \subset U, V \text{ замкнуто и ограничено}} \text{cl}(f(U \setminus V))$$

называется кластерным значением для f .

Пусть V — открытое подмножество в $\mathcal{A}_r$. Определим вычет мероморфной функции f на W с сингулярностью в точке $a \in W \subset \mathcal{A}_r$ следующим образом:

$$\text{Res}(a, f).M := (2\pi)^{-1} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_y} f(z) dz \right), \quad (1)$$

если этот предел существует. Здесь $\gamma_y(t) = a + y\rho \exp(2\pi t M) \subset V \setminus W$, $\rho > 0$, $|M| = 1$, $M \in \mathcal{I}_r$, $\mathcal{I}_r := \{z: z \in \mathcal{A}_r, \text{Re}(z) = 0\}$, $\text{Re}(z) := (z + \bar{z})/2$, $t \in [0, 1]$, $0 < y \leq 1$, петля $\gamma := \gamma_1$ охватывает только одну сингулярную точку a для f в комплексной плоскости $(a + \mathbb{R} \oplus M\mathbb{R})$. Как обычно, мы предполагаем, что

- R1) функция f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной на $V \setminus W$;
- R2) W — замкнутое связное подмножество в $\hat{\mathcal{A}}_r$ коразмерности не менее 2;
- R3) пересечение $W \cap (z + \widehat{\mathbb{R} \oplus N\mathbb{R}})$ состоит из изолированных точек для всех чисто мнимых чисел Кэли—Диксона $N \in \mathcal{I}_r$, $|N| = 1$, и всех $z \in W \cup \{0\}$.

Продолжим $\text{Res}(a, f).M$ по формуле (1) на $\mathcal{I}_r$ следующим образом:

$$\text{Res}(a, f).M := [\text{Res}(a, f).(M/|M|)]|M| \text{ для всех } M \neq 0, \quad \text{Res}(a, f).0 := 0, \quad (2)$$

когда $\text{Res}(a, f).M$ конечно для любых $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$.

3.2. Определение. Для метрического пространства X с метрикой ρ пусть $\text{dist}(x, A) := \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$ обозначает расстояние от точки x до подмножества A в X . Пусть z — отмеченная точка в алгебре Кэли—Диксона, $\gamma(t) := z + R \exp(2\pi t M)$, где $t \in [0, 1]$, — окружность с центром в z радиуса $0 < R < \infty$ в плоскости $z + (\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R})$, вложенной в $\mathcal{A}_r$. Тогда γ охватывает z в обычном смысле.

Мы скажем, что петля $\psi(t)$ в алгебре Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$ охватывает точку z относительно γ , если существует непрерывная монотонно возрастающая функция $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, являющаяся непрерывно дифференцируемой, такая что

$$|\psi(t) - \gamma(\varphi(t))| < \min(|\psi(t) - z|, R)$$

для любых $t \in [0, 1]$.

Если $\mathcal{A}_m$ — подалгебра в $\mathcal{A}_r$, $m < r$, то существует проекция $P_m: \mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{A}_m$ вещественных линейных пространств.

3.3. Теорема. Пусть f — $\mathcal{A}_r$ -голоморфная функция открытой области U в $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$. Пусть $(\gamma + z_0)$ и ψ представлены как кусочные объединения путей $\gamma_j + z_0$ и ψ_j относительно параметра $\theta \in [a_j, b_j]$ и $\theta \in [c_j, d_j]$ соответственно с $a_j < b_j$ и $c_j < d_j$ для любых $j = 1, \dots, n$ и $\bigcup_j [a_j, b_j] = \bigcup_j [c_j, d_j] = [0, 1]$

гомотопны относительно $U_j \setminus \{z_0\}$, где $U_j \setminus \{z_0\} = (2^r - 1)$ -связная открытая область в алгебре Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$, такая что $\pi_{s,p,t}(U_j \setminus \{z_0\})$ односвязна в $\mathbb{C}$ для любых $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$, $k = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$ (для любых $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ и $P_m(U_j \setminus \{z_0\})$ является $(2^m - 1)$ -связной для любых $4 \leq m \in \mathbb{N}$, если $r = \infty$), любых $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbb{C}_{s,p}$, для которых существует $z = t + u \in \mathcal{A}_r$. Пусть $(\gamma + z_0)$ и ψ — замкнутые спрямляемые пути (петли) в U , такие что $\gamma(\theta) = \rho \exp(2\pi \theta M)$,

$\theta \in [0, 1]$, $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$ и $0 < \rho < \infty$, также $z_0 \notin \psi$, $M = \left[\int_{\psi} d\text{Ln}(\zeta - z) \right] / (2\pi)$ и ψ охватывает z_0 относительно $\gamma + z_0$. Тогда

$$(2\pi)f(z)M = \int_{\psi} f(\zeta) d\text{Ln}(\zeta - z) \quad (1)$$

для любой точки $z \in U$, такой что

$$|z - z_0| < \inf_{\zeta \in \psi([0,1])} |\zeta - z_0|.$$

Если $\mathcal{A}_r$ альтернативна, т. е. $r = 2, 3$, или $f(z) \in \mathbb{R}$ для любых z , то

$$f(z) = (2\pi)^{-1} \left(\int_{\psi} f(\zeta) d\text{Ln}(\zeta - z)^{-1} \right) M^*. \quad (2)$$

Доказательство. Логарифмическая функция является ζ -дифференцируемой, так что

$$d\text{Ln}(\zeta - z) = [D_{\zeta} \text{Ln}(\zeta - z)].d\zeta$$

для отмеченного z и переменной ζ , $\zeta \neq z$. Следовательно, рассматриваемый интеграл существует. Возьмём число Кэли—Диксона z , удовлетворяющее условиям теоремы. Положим $\psi_y(\theta) := z + y(\psi(\theta) - z)$ и $\gamma_y(\theta) = y\rho \exp(2\pi\theta M)$ для любых $\theta \in [0, 1]$ и $0 < y \leq 1$. Рассмотрим $\varphi(\theta) = \theta$ для любых θ , обозначая $\gamma \circ \varphi$ для простоты через γ . Тогда

$$|\psi_y(\theta) - (\gamma_y(\theta) + z)| < |\psi_y(\theta) - z|$$

для любых $0 < y \leq 1$.

Соединим пути $\gamma_y + z$ и ψ_y посредством спрямляемых путей ω_y , таких что $z \notin \omega$, проходимых в прямом и противоположном (обозначим это ω_y^-) направлениях, так, чтобы $\omega_{y,j} \cup \psi_{y,j} \cup \gamma_{y,j} \cup \omega_{y,j+1}$ был гомотопен точке относительно $U_j \setminus \{z_0\}$ для подходящих $\omega_{y,j}$ и $\omega_{y,j+1}$, где $\omega_{y,j}$ соединяет $\gamma_y(a_j) + z$ с $\psi_y(c_j)$ и $\omega_{y,j+1}$ соединяет $\psi_y(d_j)$ с $\gamma_y(b_j) + z$, причём $z, z_0 \notin \omega_j$ для всех j . Тогда равенство

$$\int_{\omega_{y,j}} f(\zeta) d\text{Ln}(\zeta - z) = - \int_{\omega_{y,j}^-} f(\zeta) d\text{Ln}(\zeta - z)$$

выполнено для любых j .

Отметим, что

$$[D_{\zeta} \text{Ln}(\zeta - z)].1 = (\zeta - z)^{-1}$$

для любых $\zeta \neq z$ и функция $f(\zeta)$ является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной в U . Ветвление логарифмической функции $\text{Ln}(\zeta - z)$ по переменной ζ , $\zeta \neq z$ для отмеченного числа Кэли—Диксона z , не зависит от $|\zeta - z| > 0$, как показывает её некоммутативная поверхность Римана, описанная в [6, 21, 26], так как

$$\text{Ln}(y(\zeta - z)) = \ln y + \text{Ln}(\zeta - z)$$

для любых $y > 0$ и $\zeta \neq z$. Поэтому ветви функции $\text{Ln}(\zeta - z)$ индексированы чисто мнимыми числами Кэли—Диксона $M \in \mathcal{I}_r$. Рассмотрим теперь подобласти $U_j \setminus \{z_0\}$ и петли, составленные из фрагментов $\psi([c_j, d_j])$ и $\psi_y([c_j, d_j])$, соединяющие концы спрямляемых путей, проходимых в прямом и обратном направлениях, а также петли, составленные из фрагментов $\gamma([a_j, b_j]) + z$ и $\gamma_y([a_j, b_j]) + z$, соединяющие концы спрямляемых путей, проходимых в определённом направлении. По теореме о гомотопии [21, 26] из условий нашей теоремы мы выводим, что

$$\int_{\psi} f(\zeta) d\text{Ln}(\zeta - z) = \int_{\psi_y} f(\zeta) d\text{Ln}(\zeta - z)$$

и

$$\int_{\gamma+z} f(\zeta) d\text{Ln}(\zeta - z) = \int_{\gamma_y+z} f(\zeta) d\text{Ln}(\zeta - z)$$

для любых $0 < y \leq 1$.

Путь $\gamma_y + z$ — это окружность вокруг z , и её радиус $y\rho > 0$ может быть выбран настолько малым, что $f(\zeta) = f(z) + \alpha(\zeta, z)$, где α — такая непрерывная функция на U^2 , что существует предел $\lim_{\zeta \rightarrow z} \alpha(\zeta, z) = 0$. Поэтому

$$\int_{\gamma_y+z} f(\zeta) d\text{Ln}(\zeta - z) = \int_{\gamma_y+z} f(z) d\text{Ln}(\zeta - z) + \delta(y\rho) = 2\pi f(z)M + \delta(y\rho),$$

где

$$|\delta(y\rho)| \leq \left| \int_{\gamma_y+z} \alpha(\zeta, z) d\text{Ln}(\zeta - z) \right| \leq 2\pi \sup_{\zeta \in \gamma_y} |\alpha(\zeta, z)| C_1 \exp(C_2(y\rho)^m),$$

C_1 и C_2 — положительные константы, $m = 2 + 2^r$ (см. неравенство (2.7.4) в [21, 26]). Следовательно, существует предел $\lim_{y \rightarrow 0, y > 0} \delta(y\rho) = 0$. Аналогичные оценки выполняются, если взять ψ_y вместо $\gamma_y + z$.

Мы имеем равенства

$$M = \frac{\left[\int_{\psi_y} d\text{Ln}(\zeta - z) \right]}{2\pi}, \quad M = \frac{\left[\int_{\gamma_y+z} d\text{Ln}(\zeta - z) \right]}{2\pi}$$

для любых $0 < y \leq 1$ по условиям данной теоремы, так как

$$\text{Ln}(y(\zeta - z)) = \ln(y) + \text{Ln}(\zeta - z)$$

для любых $\zeta \neq z$ и y является положительным параметром, не зависящим от z (здесь $\ln$ — стандартная функция натурального логарифма для положительных чисел). С другой стороны,

$$\text{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}z^n}{n} + \dots$$

для любых чисел Кэли—Диксона с абсолютным значением $|z|$ меньше единицы, так как каждое z можно записать в виде $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$, где $\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$, $\operatorname{Im}(z) = z - \operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ — такое чисто мнимое число, что $(\operatorname{Im}(z))^2 = -|\operatorname{Im}(z)|^2$. Последний ряд равномерно сходится в шаре данного радиуса $0 < R < 1$ с центром в нуле. Поэтому индексы путей (числа оборотов) ψ_y и $\gamma + z$ вокруг точки z одинаковы для всех $0 < y \leq 1$ и равны $\int_{\gamma+z} d\operatorname{Ln}(\zeta - z)/(2\pi M)$. Беря предел при $y > 0$, стремящемся к нулю, завершаем доказательство этой теоремы, так как

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\gamma_y + z} f(\zeta) d\operatorname{Ln}(\zeta - z) = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\psi_y} f(\zeta) d\operatorname{Ln}(\zeta - z).$$

Если $r = 2, 3$ или $f(z) \in \mathbb{R}$ для любых z , то $((2\pi)f(z)M)M^* = 2\pi f(z)$. $\square$

3.4. Определение. Определение 3.1 вычета распространяется также на петли ψ , не обязательно лежащие в определённой плоскости, как ψ в пунктах 3.2 и 3.3. Но тогда чисто мнимое число Кэли—Диксона нужно заменить на среднее значение M , вычисляемое как интеграл для $d\operatorname{Ln}(z)$ вдоль пути ψ , делённый на $2\pi n$, т. е.

$$M = \frac{\int_{\psi} d\operatorname{Ln}(z)}{2\pi n},$$

где $n \in \mathbb{N}$ — индекс петли ψ . Согласно теореме 3.3 оператор Res в отмеченной точке $a = z_0$ одинаков для петель $\gamma + z_0$, $\gamma_y + z_0$, ψ и ψ_y для любых $0 < y \leq 1$, когда петли $\gamma_y + z_0$ охватывают только одну точку z_0 в комплексной плоскости $(z_0 + \mathbb{R} \oplus M\mathbb{R})$ для $\gamma_y + z_0$, в то время как ψ_y охватывает z_0 относительно $\gamma_y + z_0$ в смысле пункта 3.2.

Для бесконечно удалённой точки $a = \infty$ определения индекса и вычета изменяются. Нужно взять вместо окружности γ и петли ψ их же, но с противоположной ориентацией, γ^- и ψ^- соответственно. Таким образом, взятие отображения $z \mapsto 1/z$ сводит полюс в бесконечности в полюс в нуле. Дополнительно в определении вычета мы берём достаточно большой радиус $\rho > 0$, такой что в комплексной плоскости $\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R}$ для отмеченных чисто мнимого числа Кэли—Диксона окружность γ^- с центром в нуле охватывает единственную точку ∞ из W в некоммутативном аналоге $\hat{\mathcal{A}}_r$ сферы Римана. Мы также рассмотрим окружности γ_y^- с $y \geq 1$ и возьмём предел

$$\operatorname{Res}(\infty, f).M := (2\pi)^{-1} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\gamma_y^-} f(z) dz, \quad (1)$$

если он существует.

Если функция f имеет изолированную сингулярность в точке $a \in \hat{\mathcal{A}}_r$, то коэффициенты b_k её ряда Лорана (см. § 3 в [21, 26]) не зависят от $\rho > 0$ в определённых пределах. Общий степенной ряд называется a -лорановским рядом.

Если $a = \infty$, то функция $g(z) := f(z^{-1})$ имеет 0-лорановский ряд с коэффициентами c_k , такими что $c_{-k} = b_k$. Пусть $\beta := \sup_{b_k \neq 0} \eta(k)$, где $\eta(k) = k_1 + \dots + k_m$, $m = m(k)$ при $a = \infty$; $\beta = \inf_{b_k \neq 0} \eta(k)$ для $a \neq \infty$. Мы скажем, что функция f имеет устранимую особенность, полюс, существенно особую точку в ∞ , если $\beta \leq 0$, $0 < \beta < \infty$, $\beta = +\infty$ соответственно. Во втором случае β называется порядком полюса в ∞ . Для конечного a соответствующие случаи таковы: $\beta \geq 0$, $-\infty < \beta < 0$, $\beta = -\infty$. Если f имеет полюс в точке a , то $|\beta|$ называется порядком полюса в точке a .

Значение функции

$$\partial_f(a) := \inf\{\eta(k) : b_k \neq 0\}$$

называется дивизором f в точке $a \neq \infty$,

$$\partial_f(a) := \inf\{-\eta(k) : b_k \neq 0\}$$

для $a = \infty$. Здесь $b_k \neq 0$ означает, что $b_{k,1} \neq 0, \dots, b_{k,m(k)} \neq 0$. Тогда

$$\partial_{f+g}(a) \geq \min\{\partial_f(a), \partial_g(a)\}$$

для любых $a \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ и

$$\partial_{fg}(a) = \partial_f(a) + \partial_g(a).$$

Для функции f , мероморфной на открытом подмножестве U в $\hat{\mathcal{A}}_r$, функция $\partial_f(p)$ по переменной $p \in U$ называется дивизором функции f .

3.5. Пример и замечание. Рассмотрим другой пример многозначной локально аналитической функции. Пусть ξ — некоторое число Кэли—Диксона. Рассмотрим степенную функцию $z = \xi^n$, где $2 \leq n \in \mathbb{N}$, n — натуральное число. Каждое число Кэли—Диксона имеет полярную форму $z = \rho \exp(2\pi\theta M)$, где $\theta \in \mathbb{R}$, M — чисто мнимое число Кэли—Диксона с модулем $|M| = 1$, $\rho := |z|$. Для определённости мы можем рассмотреть M вида $M = M_1 i_1 + \dots + M_k i_k$, где $1 \leq k \leq 2^r - 1$, $M_1, \dots, M_k \in \mathbb{R}$, $M_k > 0$, чтобы исключить повторения, вызванные тождеством $(-\theta)(-M) = \theta M$. Для каждого такого отмеченного M функция $\exp(2\pi\theta M)$ периодична, поэтому $\exp(2\pi(\theta + n)M) = \exp(2\pi\theta M)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому обратная функция $\xi = z^{1/n}$ на $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$ многозначна с n ветвями. Каждая ветвь имеет вид $\xi_j = \rho^{1/n} \exp(2\pi(\theta + (j-1))M/n)$, где $M = M(z)$, $\rho^{1/n} > 0$ обозначает положительное значение корня n -го порядка для любых $b > 0$, $j = 1, \dots, n$. Когда петля, например окружность, с центром в нуле в плоскости $\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R}$ обходит вокруг 0 на 2π , тогда имеется переход с j -й ветви на $(j+1)$ -ю ветвь для всех $1 \leq j < n$, а n -я ветвь переходит в первую ветвь. Таким образом, точка $z = 0$ является точкой ветвления функции $z^{1/n}$. Ветви этой функции индексированы посредством $j = 1, \dots, n$ и зависят от чисто мнимых чисел Кэли—Диксона $M \in \mathcal{I}_r$. Поскольку $z^{1/n} = \exp[(\text{Ln}(z))/n]$, то $z^{1/n}$ является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной на $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$. Это также вытекает из теоремы об обратной функции: если функция f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной на открытом

подмножестве V и имеет обратную функцию f^{-1} , то её обратная функция f^{-1} также $\mathcal{A}_r$ -голоморфна [6, 21, 26].

Некоммутативная риманова поверхность строится из n копий алгебры Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$, разрезанных по подмножеству Q как в § 3.7 в [21, 26], так что они оказываются вложенными в $\mathcal{A}_r^2$. Каждая разрезанная копия Y_j множества $\mathcal{A}_r$ слегка согнута, и каждый край ${}_2Q_j$ склеен с ${}_1Q_{j+1}$ для каждого $j = 1, \dots, n-1$, ${}_2Q_n$ склеен с ${}_1Q_1$ по прямым лучам с исходно (до сгибания) параллельными направляющими векторами. Для такой некоммутативной римановой 2^r -мерной поверхности $\mathcal{R} = \mathcal{R}(z^{1/n})$ функция $z^{1/n}: \mathcal{A}_r \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{R}$ уже однозначна.

В общем случае мы предположим, что $f: (U \setminus W) \rightarrow \mathcal{A}_r$ — это $\mathcal{A}_r$ -голоморфная функция на открытом множестве $(U \setminus W)$ в одноточечной компактификации $\hat{\mathcal{A}}_r$ алгебры Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$ как топологического пространства, т. е. компактификация берётся относительно слабой топологии для $\text{card}(r) \geq \aleph_0$. Тогда $\hat{\mathcal{A}}_r \setminus \mathcal{A}_r = \{\infty\}$. Мы рассмотрим W — замкнутое связное подмножество ко-размерности не менее 2 (см. выше) в алгебре Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$, такое что $W \cap (z + \widehat{\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R}})$ — это множество, состоящее из изолированных точек для всех чисто мнимых $M \in \mathcal{I}_r$ и всех $z \in W \cup \{0\}$. Пусть U открыто в $\mathcal{A}_r$. Мы также предположим, что функция f многозначна и каждая её ветвь определена на $U \setminus W$.

Если $z \in W$ и вдоль каждой петли в $z + \widehat{\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R}}$, охватывающей z и не охватывающей и не содержащей других точек из W , полный обход вокруг петли на 2π приводит к переходу с j -й ветви функции f на другую определённую ветвь $k(j)$ для любых j , то мы скажем, что z является точкой ветвления функции f .

Рассмотрим некоммутативную поверхность $\mathcal{R} = \mathcal{R}(f)$, составленную из копий Y_k , собственно вложенных в подходящее пространство $\mathcal{A}_r^s$, $\text{card}(s) \geq 2$, с подходящим склеиванием Y_j с $Y_{k(j)}$ по соответствующим краям, таким что $f: U \setminus W \rightarrow \mathcal{R}$ становится однозначной и $\mathcal{A}_r$ -голоморфной. Такая поверхность $\mathcal{R}$ называется некоммутативной римановой поверхностью функции f . Если f — такая функция, то для подходящей области U , удовлетворяющей условиям теоремы 3.3 с z_0 , заменённой на W , по теореме 2.41 о монодромии из [6] и теореме 2.15 о гомотопии из [21, 26] ветвление f зависит только от $M \in \mathcal{I}_r$ и не зависит от $|\zeta - z|$ при $z \in W$. Это вытекает из рассмотрения петель γ в плоскостях $z + \widehat{\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R}}$ для $z \in W$ и $\gamma \subset (U_j \setminus W) \cap (z + \widehat{\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R}})$ для любых j .

Отметим, что в общем случае условия теоремы 2.15 из [21, 26] нельзя заменить на локальные гомотопии в каждой области $U_j \setminus W$. Это обусловлено несколькими причинами. Сначала рассмотрим две окружности γ_1 и γ_2 радиусов $0 < R_1 < R_2 < \infty$ с центром в точке z_0 в плоскостях $z_0 + (\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R})$ и $z_0 + (\mathbb{R} \oplus N\mathbb{R})$, где $N = aM + bN_1$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\text{Re}(MN_1) = 0$, $|M| = |N| = |N_1| = 1$, M, N, N_1 — чисто мнимые отмеченные числа Кэли—Диксона. Пусть U и z_0 удовлетворяют условиям теоремы 3.3. Рассмотрим окружно-

сти $\gamma_1(t) = z_0 + R_1 \exp(2\pi t M)$ и $\gamma_2^-(t) = z_0 + R_2 \exp(-2\pi t N)$, $t \in [0, 1]$. Поделим их на дуги согласно разбиению $[(j-1)/n, j/n]$, где $4 \leq n \in \mathbb{N}$ и $j = 1, \dots, n$. Возьмём соответствующие дуги этих окружностей и соединим их соответствующие концы $\gamma_1(j/n)$ с $\gamma_2(j/n)$ для любых j отрезками w_j прямых линий. Мы получим петли η_j , составленные из таких сегментов и дуг γ_1 и γ_2^- , обходимых в соответствии с γ_1 и γ_2^- .

Теперь рассмотрим две окружности γ_1 и γ_2 , вложенные в $z_0 + (\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R} \oplus N_1\mathbb{R})$. Возьмём новые системы координат в последнем трёхмерном многообразии с началом в точке z_0 . Ось e_1 возьмём параллельной i_0 , ось e_2 параллельной M и e_3 параллельной N_1 . Тогда γ_2 в одном полупространстве лежит выше γ_1 и в другом полупространстве ниже γ_1 . Соединим $\gamma_1(t)$ с $\gamma_2(t)$ сегментами прямых линий для любых $t \in [0, 1]$. Мы получим множество L , которое как топологическое подпространство гомеоморфно ленте Мёбиуса, которая является неориентируемой двумерной поверхностью. Предположим, что $L \subset U \setminus W$.

Существует k , при котором w_k обходится дважды в том же направлении, потому что поверхность L неориентируемая. Тогда сумма интегралов по всем j петлям η_j в общем случае не обращается в нуль для $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функции f в $(U \setminus \{z_0\})$ и имеет остаток вида $2c \int_{w_k} f(z) dz$, где $c = 1$ или $c = -1$.

Поверхность Q , разрезающая $\mathcal{A}_r$, имеет единичную коразмерность, следовательно, обе петли γ и $\psi - z_0$ из теоремы 3.3 пересекают Q : $Q \cap \gamma([0, 1]) \neq \emptyset$ и $Q \cap \psi([0, 1]) \neq \emptyset$. Поэтому интеграл по петле η_j может быть отличен от нуля для некоторого j , когда γ и ψ не лежат в одной плоскости $\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R}$, и z_0 является точкой ветвления функции f .

Если f , U , z_0 , ψ и $\gamma + z_0$ те же, что и в теореме 3.3, $\psi([0, 1])$ не пересекает $\gamma([0, 1]) + z_0$ и $\psi([0, 1])$ не содержится в плоскости $z_0 + (\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R})$, то из ψ и γ мы построим петлю $\eta \subset U \setminus W$, принимая в расчёт дуги и соединяющие их концы спрямляемые пути в U . Тогда существует чисто мнимое число Кэли—Диксона $N \in \mathcal{I}_r$, не содержащееся в $M\mathbb{R}$, для которого проекция η на плоскость $z_0 + (\mathbb{R} \oplus N\mathbb{R})$ охватывает точку z_0 . Если f имеет сингулярность в z_0 , которая может быть точкой ветвления, то в общем случае значение $\int_{\gamma+z_0} f(z) dz$

отлично от $\int_{\psi} f(z) dz$, так как ветвление f в общем случае может зависеть от всех чисто мнимых чисел Кэли—Диксона $N \in \mathcal{I}_r$, $|N| = 1$. Это легко можно усмотреть из примера функций $\text{Ln}(\zeta - z_0)$ и $(\zeta - z_0)^{1/n}$ при $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Более того, для области U , удовлетворяющей условиям теоремы 3.3, в общем случае условия теоремы 2.41 о монодромии из [6] могут не выполняться.

В частном случае, когда γ и ψ содержатся в одной и той же плоскости $z_0 + (\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R})$, ситуация $N_1 \perp M$ уже исключена. С другой стороны, ветвление функции f не зависит от $|\zeta - z_0|$ (см. выше). Если нет других сингулярных точек в U , кроме z_0 , U удовлетворяет условиям теоремы 3.3 и $\gamma + z_0$ и ψ гомотопны относительно $U \cap (z_0 + (\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R}))$, то по теореме 2.15 о гомотопии из [21, 26], учитывая, что M фиксировано, мы можем, как и в комплексном

случае, заключить, что $\int_{\gamma+z_0} f(z) dz = \int_{\psi} f(z) dz$. Поэтому условия теоремы 2.15 о гомотопии из [21, 26] существенно сильнее, чем в комплексном случае.

3.6. Теорема. Пусть U — открытая область в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$, с n различными отмеченными точками $p_1, \dots, p_n$, и пусть f — $\mathcal{A}_r$ -голоморфная функция на $U \setminus \{p_1, \dots, p_n\} =: U_0$, ψ — спрямляемая замкнутая кривая, лежащая в U_0 , U_0 удовлетворяет условиям теоремы 3.3 для любых $z_0 \in \{p_1, \dots, p_n\}$. Тогда

$$\int_{\psi} f(z) dz = 2\pi \sum_{j=1}^n \text{Res}(p_j, f) \cdot \hat{I}n(p_j, \psi)$$

и $\text{Res}(p_j, f) \cdot M$ является $\mathbb{R}$ -однородной $\mathcal{I}_r$ -аддитивной (по переменной M в $\mathcal{I}_r$) $\mathcal{A}_r$ -значной функцией для любых j .

Доказательство. В рассматриваемом случае каждая сингулярная точка p_j изолированная, следовательно, в определениях оператора вычета $\text{Res}(p_j, f)$ предел по y можно опустить, так как все интегралы с различными $0 < y \leq 1$ равны, когда γ_y принадлежат одной и той же комплексной плоскости (см. определение 3.1 и § 3.9.3 в [21, 26]).

Для любых p_j рассмотрим главную часть T_j ряда Лорана функции f в окрестности точки p_j , т. е.

$$T_j(z) = \sum_{k, \eta(k) < 0} \{(b_k, (z - p_j)^k)\}_{q(m(k) + \eta(k))},$$

где $\eta(k) = k_1 + \dots + k_n$ при $k = (k_1, \dots, k_n)$ (см. теорему 3.21 в [21, 26]). Поэтому

$$h(z) := f(z) - \sum_j T_j(z) -$$

функция, имеющая $\mathcal{A}_r$ -голоморфное продолжение на U . В силу теоремы 3.3 для $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функции g в окрестности V точки p и спрямляемой замкнутой кривой ζ мы имеем

$$g(p) \hat{I}n(p, \zeta) = (2\pi)^{-1} \int_{\zeta} g(z)(z - p)^{-1} dz$$

(см. § 3.22 [21, 26]). Пусть петля γ и все петли ζ_j лежат в плоскостях, каждая из которых параллельна комплексной плоскости $\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R}$ с отмеченным чисто мнимым M , таким что M и ψ удовлетворяют условиям теоремы 3.3.

Мы можем рассмотреть малую петлю ζ_j вокруг каждой точки p_j , такую что $\hat{I}n(p_j, \zeta_j) = \hat{I}n(p_j, \gamma)$ для любых $j = 1, \dots, n$. Тогда мы выводим, что

$$\int_{\zeta_j} f(z) dz = \int_{\zeta_j} T_j(z) dz$$

для любых j . Представляя U_0 как конечное объединение открытых областей U_j и соединяя ζ_j с γ путями ω_j , проходимыми в прямом и противоположном направлениях, как в теореме 3.3, мы получим

$$\int_{\gamma} f(z) dz + \sum_j \int_{\zeta_j^-} f(z) dz = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_j \int_{\zeta_j} f(z) dz = \sum_j 2\pi \operatorname{Res}(p_j, f) \hat{I}n(p_j, \gamma),$$

где $\hat{I}n(p_j, \gamma)$ и $\operatorname{Res}(p_j, f)$ инвариантны относительно гомотопий, удовлетворяющих условиям теоремы 3.3 в пределах данной комплексной плоскости.

Поскольку интеграл $\int_{\zeta_j} g(z) d\operatorname{Ln}(z - p_j)$ является $\mathbb{R}$ -однородным и $\mathcal{I}_r$ -аддитивным относительно направляющего вектора $M \in \mathcal{I}_r$ петли ζ_j , мы имеем, что вычет $\operatorname{Res}(p_j, f) \cdot M$, заданный формулами (1) и (2) определения 3.1 и (1) определения 3.4, является $\mathbb{R}$ -однородным $\mathcal{I}_r$ -аддитивным по аргументу M в $\mathcal{I}_r$. $\square$

3.7. Теорема. Пусть f — мероморфная функция в V (см. определение 3.1), такая что $f(\zeta) = g(\zeta)[1/v(\zeta)]$ и $1/f(\zeta) = v(\zeta)[1/g(\zeta)]$ для любых $\zeta \in V$, где g и v — две $\mathcal{A}_r$ -голоморфные функции на открытом множестве V , g имеет нули в V , $v^{-1}(0) = W$, $W \subset V$, $2 \leq r < \infty$, $\operatorname{codim}(W) \geq 2$. Тогда $\operatorname{Res}(z, f)$ есть оператор, непрерывно зависящий от $z \in W$.

Доказательство. Множество W замкнуто и связно в $\hat{\mathcal{A}}_r$, и пересечение $W \cap (z + \mathbb{R} \oplus M\mathbb{R})$ состоит из изолированных точек для всех $z \in W \cup \{0\}$ и чисто мнимого $M \in \mathcal{I}_r$. Поэтому $\hat{\mathcal{A}}_r \setminus W$ является открытым в $\hat{\mathcal{A}}_r$. Поскольку функция v непрерывна, $W = v^{-1}(0)$ и g не имеет нулей в V , то каждая точка z в W является сингулярной для f . Используя сдвиг $z \mapsto z + z_0$, мы можем рассмотреть случай, когда 0 и ∞ одновременно не принадлежат множеству W . Для изучения сингулярности на ∞ мы можем использовать преобразование $z \mapsto 1/z$, после которого следует рассматривать сингулярность в нуле. Поэтому мы можем предположить без ограничения общности, что каждая точка $z \in W$ является конечной сингулярной точкой.

Мы можем взять окрестность U точки z , удовлетворяющую условиям теоремы 3.3, и выбрать семейство $\gamma_y + z$ петель в U , охватывающих только одну сингулярную точку z функции f , в комплексной плоскости $z + \mathbb{R} \oplus M\mathbb{R}$ для любых $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$, $0 < y \leq 1$ и $z \in W \cap U$. Интеграл

$$\int_{\gamma_y + z} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_y} f(\zeta + z) d\zeta$$

является непрерывным функционалом относительно f и z , так как f голоморфна на $U \setminus W$, $\gamma_y([0, 1]) + z \subset U \setminus W$ для любых $z \in W \cap U$ и $0 < y \leq 1$.

Если $z_1 \in W$ — сингулярная точка, отличная от z , или какая-либо другая точка $z_1 \in U \setminus \{z\}$, то $|z - z_1| > 0$. Мы выберем $0 < y < |z - z_1|/\rho$, где $0 < \rho < \infty$ — радиус окружности γ . Тогда $\gamma_y + z$ не охватывает z_1 во всей U . Поскольку

$$2\pi \operatorname{Res}(z, f) \cdot M = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\gamma_y + z} f(z) dz,$$

когда M зафиксировано, то вычет $\operatorname{Res}(z, f) \cdot M$ может зависеть от z и не зависит ни от какого z_1 , не равного z .

Функции g и v , будучи $\mathcal{A}_r$ -голоморфными, являются локально ζ -аналитическими в V , и для любых $z \in W$ существует шар с центром в z некоторого конечного положительного радиуса $0 < \delta < \infty$, такой что g и v имеют в нём некоммутативные степенные разложения в ряды. Поскольку $g(\zeta) \neq 0$ для любых $\zeta \in V$, то $g(z) \neq 0$ и $v(z) = 0$ для любых $z \in W$. Тогда $f(z) = \infty$ и $1/f(z) = 0$, и функция $1/f(\zeta) = v(\zeta)[1/g(\zeta)]$ является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной в V и, следовательно, в окрестности V_z , $V_z \subset V$, точки $z \in W$. Таким образом, функция $1/f(\zeta)$ имеет разложение в виде степенного ряда в шаре с центром в точке $z \in W$ некоторого положительного радиуса $0 < \varepsilon < \infty$. Пусть его коэффициенты разложения записаны в виде $A_m = (a_{m,m_1}, \dots, a_{m,m_k})$, $a_{m,j} \in \mathcal{A}_r$ для любых m, j , $m = (m_1, \dots, m_k)$, $m_j \geq 0$ для любых $j = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$, причём

$$\frac{1}{f(\zeta)} = \sum_m \{A_m, (\zeta - z)^m\}_{q(m)}, \quad (1)$$

где $\{A_m, z^m\}_{q(m)} := \{a_{m,m_1} z^{m_1} \dots a_{m,m_k} z^{m_k}\}_{q(m)}$, $q(m)$ — вектор, указывающий порядок умножения.

Будем искать функцию f вида

$$f(\zeta) = \sum_p \{B_p, (\zeta - z)^p\}_{q(p)}, \quad (2)$$

где $p = (p_1, \dots, p_k)$, $k = k(p) \in \mathbb{N}$, $p_j \in \mathbb{Z}$ для всех j , причём для всех p либо $p_j \geq 0$ для всех j , либо $p_j \leq 0$ для всех j . Положим $\eta(m) := m_1 + \dots + m_k$, где $k = k(m)$. Обозначим через

$$Q_n(\xi) := \sum_{\eta(p)=n} \{B_p, \xi^p\}_{q(p)}, \quad P_n(\xi) := \sum_{\eta(m)=n} \{A_m, \xi^m\}_{q(m)}$$

такие однородные члены, что $Q_n(t\xi) = t^n Q_n(\xi)$ и $P_n(t\xi) = t^n P_n(\xi)$ для любых $0 \neq t \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$. Когда $n > 0$, мы имеем $P_n(0) = 0$ и $Q_n(0) = 0$. С другой стороны, для отрицательного числа n член $Q_n(1/\xi)$ определён для любого конечного числа Кэли—Диксона ξ .

Для функции $1/f$ имеем $\eta(m) = n \geq 1$, так как $1/f$ голоморфна и $1/f(z) = 0$. Если бы каждый член $P_n(\xi)$ был тождественно нулевым полиномом, то $1/f$ была бы тождественно равной нулю, что не имеет места. Таким образом, существует максимальное $\alpha > 0$, для которого $P_\alpha(\xi)$ — нетривиальный полином, в то время

как $P_n(\xi)$ тождественно совпадает с нулём для любых $n < \alpha$, т. е. α — порядок нуля z функции $1/f$.

Уравнение

$$f(\zeta) \frac{1}{f(\zeta)} = 1, \quad (3)$$

тождественно выполняется на множестве $B(\mathcal{A}_r, z, \varepsilon) \setminus W$. По непрерывности это уравнение продолжается на весь шар. Поскольку

$$Q_{n_1}(t\xi)P_{n_2}(t\xi) = t^{n_1+n_2}Q_{n_1}(\xi)P_{n_2}(\xi) \quad (4)$$

для любых $0 \neq t \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$, мы получаем неравенство $n_1 \geq -\alpha$. Согласно (4) уравнение (3) даёт систему уравнений

$$\sum_{n_1+n_2=l} Q_{n_1}(\xi)P_{n_2}(\xi) = \delta_{l,0} \quad (5)$$

для любых $0 < |\xi| < \varepsilon$. Здесь $0 \leq l \in \mathbb{Z}$, $\delta_{i,j} = 0$ для любых $i \neq j \in \mathbb{Z}$, $\delta_{j,j} = 1$ для любых $j \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\alpha \leq n_2 \leq l + \alpha$ в каждом l -м уравнении (5).

Алгебра Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$ имеет конечную размерность 2^r над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Следовательно, для любого n число различных $\mathbb{R}$ -линейно независимых членов $\{B_p, \xi^p\}_{q(p)}$ с $\eta(p) = n$ конечно. Также конечно число различных $\mathbb{R}$ -линейно независимых членов $\{A_m, \xi^m\}_{q(m)}$ с $\eta(m) = n$. Таким образом, каждый член Q_n и P_n — конечная сумма и число коэффициентов разложения в них конечно.

Используя таблицу умножения в алгебре Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$, где $2 \leq r < \infty$, и применяя разложение $w = {}_0wi_0 + \dots + {}_{2r-1}wi_{2r-1}$ для каждого $w \in \mathcal{A}_r$, где ${}_0w, \dots, {}_{2r-1}w \in \mathbb{R}$, можно по индукции по $l = 0, 1, \dots$ разрешить систему (5) относительно B_p через A_m . Процедура является следующей. При $l = 0$ мы получим степенное по переменным ${}_0\xi, \dots, {}_{2r-1}\xi$ уравнение (5), выражающее векторы B_p с $\eta(p) = -\alpha$ через векторы A_m с $\eta(m) = \alpha$. При $l = 1$ уравнение (5) вместе с предыдущим уравнением выражает векторы B_p с $\eta(p) = -\alpha + 1$ через векторы A_m с $\eta(m) \in \{\alpha, \alpha + 1\}$. По индукции уравнения (5) при $l = 0, \dots, \beta$ выражают векторы B_p с $\eta(p) = \beta$ через векторы A_m с $\eta(m) \in \{\alpha, \dots, \alpha + \beta\}$. Таким образом, каждый вектор B_p является непрерывной функцией конечного числа $A_m = A_m(z)$. В то же время каждый вектор $A_m(\xi)$ является непрерывной функцией от ξ в $B(\mathcal{A}_r, z, \varepsilon/2)$, так как функция $1/f(\zeta - z)$ является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной по $\zeta, z \in \mathcal{A}_r$, где $\zeta - z \in V$ и V открыто в алгебре Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$ по условиям теоремы. Итак, каждый вектор $B_p(\xi)$ является непрерывной функцией по ξ в шаре $B(\mathcal{A}_r, z, \varepsilon/2)$.

Очевидно, мы имеем

$$\int_{\gamma_y} \{B_p, (\zeta - z)^p\}_{q(p)} d\zeta = 0$$

для любых $\eta(p) \neq -1$ и $0 < y \leq 1$, так что z здесь равны a в определении вычета в определениях 3.1 и 3.4. Поэтому предел

$$\begin{aligned}
2\pi \operatorname{Res}(z, f).M &:= \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\gamma_y} f(\zeta) d\zeta = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \sum_{p, \eta(p)=-1} \int_{\gamma_y} \{B_p, (\zeta - z)^p\}_{q(p)} d\zeta = \sum_{p, \eta(p)=-1} \int_{\gamma} \{B_p, (\zeta - z)^p\}_{q(p)} d\zeta
\end{aligned}$$

существует, так как $\int_{\gamma_y}$ является аддитивным функционалом по интегрируемым функциям и непрерывен на пространстве ограниченных непрерывных функций (см. теорему 2.7 в [21, 26]) и γ_y и γ гомотопны в той же комплексной плоскости $z + \mathbb{R} \oplus M\mathbb{R}$ относительно $(V \setminus W) \cap (z + \mathbb{R} \oplus M\mathbb{R})$ (см. теорему 3.3 и пункт 3.9.3 в [21, 26]).

Таким образом, вычет $\operatorname{Res}(z, f)$ полностью определён разложением функции $f(z)$ в степенной ряд, а именно векторными коэффициентами B_p с $\eta(p) = -1$. Семейство коэффициентов с $\eta(p) = -1$ является конечным для конечного $2 \leq r < \infty$. Поэтому мы получаем, что $\operatorname{Res}(z, f).M$ есть непрерывная операторно-значная функция по переменной $z \in W$. $\square$

3.8. Следствие. Пусть U — открытая область в множестве $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$, $p_1, \dots, p_n$ — n различных точек в U . Пусть также f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией на $U \setminus \{p_1, \dots, p_n\} =: U_0$, $p_n = \infty$ и U_0 удовлетворяет условиям теоремы 3.3 для некоторых путей ψ , γ и всех $z_0 \in \{p_1, \dots, p_n\}$. Тогда

$$\sum_{p_j \in U} \operatorname{Res}(p_j, f).M = 0.$$

Доказательство. Если γ — замкнутая кривая, охватывающая точки $p_1, \dots, p_{n-1}$, то $\gamma^-(t) := \gamma(1 - t)$, где $t \in [0, 1]$, охватывает $p_n = \infty$ с положительным обходом относительно p_n . Поскольку

$$\int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma^-} f(z) dz = 0,$$

то мы получим из теоремы 3.6, что

$$\sum_{p_j \in U} \operatorname{Res}(p_j, f).M = 0$$

для любых $M \in \mathcal{I}_r$. Следовательно,

$$\sum_{p_j \in U} \operatorname{Res}(p_j, f).M = 0 -$$

это нулевой $\mathbb{R}$ -однородный $\mathcal{I}_r$ -аддитивный $\mathcal{A}_r$ -значный функционал на $\mathcal{I}_r$. $\square$

3.9. Замечание. Если спрямляемая петля ψ такая, как в определении 3.1, то существует такая последовательность ψ_p спрямляемых петель, составленная из дуг окружностей, центрированных в z_0 , и отрезков прямых линий, содержащих точку z_0 , что ψ_p равномерно сходится к ψ при p , стремящемся к бесконечности.

Поэтому если f является $\mathcal{A}_r$ (супер)дифференцируемой функцией на открытом множестве U , такой что $\psi \subset U$ и $\psi_p \subset U$ для любых p , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\psi_p} f(z) dz = \int_{\psi} f(z) dz.$$

В октонионной алгебре выполняются полезные тождества Муфанг:

$$\text{M1)} \quad (xyx)z = x(y(xz));$$

$$\text{M2)} \quad z(xyx) = ((zx)y)x;$$

$$\text{M3)} \quad (xy)(zx) = x(yz)x \text{ для любых } x, y, z \in \mathbf{O}$$

(см. [15, с. 120]). Для расчётов также полезны соотношения $a\tilde{a} = \tilde{a}a = |a|^2$ и соотношения, отражающие симметричность вещественнозначного скалярного произведения:

$$\text{Re}(a\tilde{b}) = \text{Re}(\tilde{b}a) = \text{Re}(\tilde{a}b) = \text{Re}(b\tilde{a}),$$

где $a^* = \tilde{a}$ обозначает сопряжённое число Кэли—Диксона.

Мы отметим также, что

$$\left(\frac{de^z}{dz}\right).h = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z^j h z^{n-j-1}}{n!}$$

для всех $z, h \in \mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$. Следовательно, $(de^z/dz).h$ не сводится просто к $e^z h$, кроме случая $\text{Im}(h) \in \text{Im}(z)\mathbb{R}$, где $\text{Im}(z) = z - \text{Re}(z)$, и порядок умножения в каждом аддитивном ряду соответствует порядку умножения справа налево (правый порядок скобок). Согласно тождествам Муфанг любой порядок умножений, левый $((z^j)h)(z^{n-j-1})$ или правый $(z^j)(h(z^{n-j-1}))$, даёт один и тот же результат.

Обратный к de^z/dz оператор $(de^z/dz)^{-1}$ даёт $d\text{Ln}(y)/dy$ при $y = e^z$. Оператор de^z/dz является $\mathcal{A}_r$ -аддитивным и $\mathbb{R}$ -однородным, следовательно, его обратный оператор также обладает этими свойствами. В частности, если $\text{Im}(h) \in \text{Im}(y)\mathbb{R}$, где $y \neq 0$, то $(d\text{Ln}(y)/dy).h = y^{-1}h$. Поэтому

$$\int_{\gamma_k} d\text{Ln}(y) = \int_{\gamma_k} y^{-1} dy$$

для любых γ_k (или дуги окружности с центром в нуле, или сегмента прямой линии, содержащей 0), следовательно,

$$\int_{\psi_p - z_0} d\text{Ln}(y) = \int_{\psi_p - z_0} y^{-1} dy$$

для любых p (см. также замечание 3.12).

Таким образом, учитывая определение 3.1, мы выводим, что теоремы 3.3 и 3.7 и следствие 3.8 распространяются на более общие спрямляемые петли ψ ,

но M в формулах заменяется на среднее значение M , рассчитанное по формуле

$$M = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\psi_p - z_0} \frac{d \operatorname{Ln}(z)}{2\pi j} = \int_{\psi - z_0} \frac{d \operatorname{Ln}(z)}{2\pi j}, \quad (1)$$

где $j \in \mathbb{N}$ — индекс петли ψ (см. определения 3.1, 3.2 и теорему 3.3). Эта формула для M существенна, так как в общем случае логарифмическая функция над алгеброй Кэли—Диксона имеет более сложную некоммутативную риманову поверхность, чем в коммутативном комплексном случае. Если a, b, c, e — константы из $\mathcal{A}_r$, такие что $\{abMce\}_{q_1(5)} = \{abce\tilde{M}\}_{q_2(5)}$, то

$$\int_{\psi} \frac{d\{ab \operatorname{Ln}(z)ce\}_{q_1(5)}}{2\pi n} = \{abce\tilde{M}\}_{q_2(5)}, \quad (2)$$

где векторы $q_1(5)$ и $q_2(5)$ определяют порядок умножения в скобках, $\tilde{M} = -M$ для чисто мнимого числа Кэли—Диксона M . С другой стороны, если f — (супер)дифференцируемая функция в окрестности γ , то

$$\int_{\gamma} \{abf(z)ce\}_{q_1(5)} dz = \left\{ ab \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) ce \right\}_{q_1(5)}$$

по определению некоммутативного интеграла вдоль спрямляемого пути [21, 26]. Если N и M — два ортогональных чисто мнимых октониона, $\operatorname{Re}(MN) = 0$ и $\operatorname{Im}(z) \in M\mathbb{R}$, то $N(zN^*) = (Nz)N^* = \tilde{z}$. Поэтому если для констант $a_1, \dots, b_{k+1} \in \mathcal{A}_r$ на открытой окрестности спрямляемой петли ψ для $z_0 = 0$ с индексом j выполняется тождество

$$\{a_1 z^{n_1} \dots a_k z^{n_k} a_{k+1}\}_{q_1(2k+1)} = \{b_1 \dots b_{k+1} (z^s \tilde{z}^m)\}_{q_2(k+2)}, \quad (3)$$

где $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_k, s, m \in \mathbb{Z}$, то

$$(2\pi j)^{-1} \int_{\psi} \{a_1 z^{n_1} \dots a_k z^{n_k} a_{k+1}\}_{q_1(2k+1)} dz = \{b_1 \dots b_{k+1} M\}_{q_2(k+2)} \quad (4)$$

при $m - s = 1$ и $n = -1$;

$$(2\pi j)^{-1} \int_{\psi} \{a_1 z^{n_1} \dots a_k z^{n_k} a_{k+1}\}_{q_1(2k+1)} dz = \{b_1 \dots b_{k+1} \tilde{M}\}_{q_2(k+2)} \quad (5)$$

при $s - m = 1$ с $n = -1$;

$$(2\pi j)^{-1} \int_{\psi} \{a_1 z^{n_1} \dots a_k z^{n_k} a_{k+1}\}_{q_1(2k+1)} dz = 0 \quad (6)$$

для $|m - s| \neq 1$ или $n \neq -1$, где $n = n_1 + \dots + n_k$. Поскольку $s + m = n$, случай (4) влечёт $m = 0$ и $s = -1$, случай (5) влечёт $s = 0$ и $m = -1$.

3.10. Определение. Пусть f — $\mathcal{A}_r$ -голоморфная функция на окрестности V точки $z \in \mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$. Тогда инфимум

$$\eta(z; f) := \inf \{k : k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(z) \neq 0\}$$

называется кратностью f в точке z . Пусть f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией на открытом подмножестве U в множестве $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$. Предположим, что $w \in \hat{\mathcal{A}}_r$. Тогда валентность $\nu_f(w)$ функции f в точке w определяется следующим образом:

$$\nu_f(w) := \begin{cases} \infty, & \text{когда множество } \{z : f(z) = w\} \text{ бесконечно,} \\ \sum_{z, f(z)=w} \eta(z; f) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

3.11. Теорема. Пусть γ и ψ — два спрямляемых пути в $\mathcal{A}_r$, содержащиеся в открытых множествах U_γ и U_ψ соответственно, и пусть существует (супер)дифференцируемый диффеоморфизм $\xi : U_\psi \rightarrow U_\gamma$ с (супер)дифференцируемым обратным, такой что $\xi(\psi([0, 1])) = \gamma([0, 1])$. Если f — непрерывная $\mathcal{A}_r$ -значная функция на U_γ , то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\psi} f(\xi(y)) \cdot (\xi'(y) \cdot dy). \quad (1)$$

Доказательство. Для f в канонической замкнутой ограниченной окрестности V пути γ , такой что $V \subset U$, мы возьмём последовательность (супер)дифференцируемых функций f_n , сходящуюся равномерно на V к f с соответствующими фразами η_n , фиксирующими z -представления функций f_n и f (см. § 2 в [21, 26]). Тогда существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

(см. теорему 2.7 в [21, 26]). Поэтому достаточно доказать эту теорему для f_n или для случая, когда f является (супер)дифференцируемой.

Согласно предложению 2.6 из [21, 26] возьмём функцию $g(z)$ и её фразу ν , даваемую левым или правым алгоритмом, такие что $g'(z) \cdot 1 = f(z)$ и $\nu'(z) \cdot 1 = \eta(z)$ для любых $z \in V$, где $g'(z) = dg(z)/dz$, $\eta(z)$ — фраза для функции f . Это задаёт ветвь некоммутативного интеграла вдоль пути

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m \left(\frac{dg(z)}{dz} \right) \Big|_{z=z_j} \cdot \Delta_j z, \quad (2)$$

где P обозначает разбиение отрезка $[0, 1]$ с заданными точками $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ и $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ для всех $j = 1, \dots, m$, $\Delta_j z := \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})$, $z_j := \gamma(\tau_j)$, $\delta(P) := \max_{j=1, \dots, m} (t_j - t_{j-1})$.

Поскольку согласно цепному правилу

$$\left(\frac{dg(\xi(y))}{dy}\right) \cdot h = \left(\frac{dg(z)}{dz}\right) \Big|_{z=\xi(y)} \cdot \left(\left(\frac{d\xi(y)}{dy}\right) \cdot h\right)$$

для любых $y \in U_\psi$ и $h \in \mathcal{A}_r$ (см. также § 2 в [21, 26]), то

$$\left(\frac{dg(z)}{dz}\right) \Big|_{z=\xi(y_j)} \cdot \left(\left(\frac{d\xi(y)}{dy}\right) \cdot \Delta_j y\right) = \left(\frac{dg(z)}{dz}\right) \Big|_{z=z_j} \cdot \Delta_j z + o(\Delta_j z),$$

где $y_j = \psi(\tau_j)$, $\Delta_j y = \psi(t_j) - \psi(t_{j-1})$, $z_j = \xi(y_j)$, $\Delta_j z = \xi(\psi(t_j)) - \xi(\psi(t_{j-1}))$. Поэтому

$$\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m \left(\frac{dg(z)}{dz}\right) \Big|_{z=z_j} \cdot \Delta_j z = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m \left(\frac{dg(z)}{dz}\right) \Big|_{z=\xi(y_j)} \cdot (\xi'(y_j) \cdot \Delta_j y), \quad (3)$$

так как пути γ и ψ спрямляемы. Таким образом, формула (1) вытекает из (2) и (3). $\square$

3.12. Замечание. Отметим, что $\int_\gamma f(z) dz$ не зависит от параметризации пути γ

в следующем смысле. Два пути $\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow \mathcal{A}_r$ и $\gamma_2: [a_2, b_2] \rightarrow \mathcal{A}_r$ называются эквивалентными, $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если существует непрерывная монотонно возрастающая функция $\varphi: [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$, такая что $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$ для любых $t \in [a_1, b_1]$, где $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$. Это отношение рефлексивно ($\gamma \sim \gamma$), симметрично (если $\gamma_1 \sim \gamma_2$, то $\gamma_2 \sim \gamma_1$), транзитивно (если $\gamma_1 \sim \gamma_2$ и $\gamma_2 \sim \gamma_3$, то $\gamma_1 \sim \gamma_3$). Класс эквивалентных путей называется кривой.

Если $\gamma_1 \sim \gamma_2$ — два спрямляемых пути, то отображение φ даёт биективное соответствие между разбиениями для γ_1 и γ_2 и между соответствующими интегральными суммами. Из определения некоммутативного интеграла вдоль пути вытекает, что если $\gamma_1 \sim \gamma_2$, то

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

для непрерывной функции f . Таким образом, некоммутативный интеграл вдоль пути зависит от кривых.

3.13. Теорема. Пусть U — открытое подмножество в алгебре Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{A}_r$ — спрямляемый путь в $\mathcal{A}_r$, $\gamma \subset U$, $-\infty < a < b < \infty$, $f: U \rightarrow \mathcal{A}_r$ — непрерывная функция. Тогда некоммутативный интеграл вдоль пути сводится к некоммутативному интегралу Лебега—Стилтьеса:

$$\int_\gamma f(z) dz = (\text{L-S}) \int_a^b \hat{f}(\gamma(t)) \cdot d\gamma(t). \quad (1)$$

Более того, если функция $\gamma(t)$ абсолютно непрерывна, то некоммутативный интеграл вдоль пути сводится к некоммутативному интегралу Лебега:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = (L) \int_a^b \hat{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt. \quad (2)$$

Доказательство. Напомним, что функция $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{A}_r$ обладает конечной вариацией, если существует такая константа $C > 0$, что

$$V_a^b := \sup \sum_{j=1}^m |f(t_j) - f(t_{j-1})| \leq C,$$

где супремум берётся по всем конечным разбиениям отрезка $[a, b]$, $m \in \mathbb{N}$; $V_a^b(f)$ называется вариацией функции f на $[a, b]$. Если $f(t) = {}_0f(t)i_0 + \dots + {}_{2^r-1}f(t)i_{2^r-1}$, ${}_jf(t) \in \mathbb{R}$ для любых $j = 0, \dots, 2^r - 1$ и $t \in [a, b]$, и $f(t)$ имеет конечную вариацию, то все f_j также имеют конечную вариацию.

Путь $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{A}_r$ называется спрямляемым, если он непрерывен и имеет конечную вариацию.

Функция $g: [a, b] \rightarrow \mathcal{A}_r$ называется абсолютно непрерывной, если для каждого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых систем попарно дизъюнктивных интервалов (a_j, b_j) , $j = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$, в $[a, b]$ выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Непрерывная функция называется сингулярной, если её производная почти всюду относительно меры Лебега равна нулю.

В силу [3, § VI.4] каждая функция f конечной вариации может быть представлена в виде $f = H + \psi + \chi$, где H — функция скачков, ψ — абсолютно непрерывная функция и χ — сингулярная функция. Для спрямляемого пути γ имеем $H = 0$. В силу [3, теорема VI.4.2] для интегрируемой по Лебегу функции $p(t)$ на отрезке $[a, b]$ функция

$$F(x) = (L) \int_a^x p(t) dt$$

где $(L) \int_a^b p(t) dt$ — интеграл Лебега, абсолютно непрерывна. В силу [3, теорема IV.4.3] производная $p' = P$ абсолютно непрерывной функции p на отрезке $[a, b]$ является на нём интегрируемой по Лебегу и

$$(L) \int_a^x p(t) dt = P(x) - P(a)$$

для любых $a \leq x \leq b$. Таким образом, γ почти всюду на $[a, b]$ дифференцируема.

Оператор $\hat{f}$, где $\hat{f}.h := g'(z).h$ для любых $z \in V$, $h \in \mathcal{A}_r$, определён для любых (супер)дифференцируемых функций с помощью левого или правого алгоритма. Более того, $\hat{f}$ является (супер)дифференцируемой, если f (супер)дифференцируема. Тогда мы используем непрерывное продолжение непрерывного функционала $\int$ на пространство непрерывных функций на V , выделяя ветвь некоммутативного интеграла, и получаем оператор $\hat{f}$ для выбранной последовательности (супер)дифференцируемых функций f_n и их фраз η_n , сходящихся равномерно на V к f (см. [21, 26] и теорему 3.11).

Каждый $\mathcal{A}_r$ -аддитивный $\mathbb{R}$ -однородный оператор A на $\mathcal{A}_r$ может быть записан в виде

$$A.h = \sum_{k=0}^{2^r-1} A.[_k h i_k] = \sum_{j,k=0}^{2^r-1} {}_{j,k}A.[_k h] i_j,$$

где ${}_{j,k}A$ — линейные функционалы на $\mathbb{R}$ для всех j, k . Аналогичное разложение имеется для $\mathcal{A}_r$ -аддитивной $\mathbb{R}$ -однородной операторнозначной функции $A(t).h$, $t \in [a, b]$. Если каждая функция ${}_{j,k}A(t)$ является интегрируемой по Лебегу—Стилтьесу на отрезке $[a, b]$ относительно каждой функции ${}_kP$ ограниченной вариации, то определён некоммутативный интеграл Лебега—Стилтьеса

$$(\text{L-S}) \int_a^b A(t).dP = \sum_{j,k} \left[\int_a^b {}_{j,k}A(t).d{}_kP(t) \right] i_j.$$

С другой стороны, если $v(t) = {}_0v i_0 + \dots + {}_{2^r-1}v i_{2^r-1}$ — такая функция, что каждая функция ${}_jv(t)$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[a, b]$, то определён некоммутативный интеграл Лебега

$$(\text{L}) \int_a^b v(t) dt = \sum_{j=0}^{2^r-1} \int_a^b {}_jv(t) dt.$$

Итак,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = (\text{L-S}) \int_a^b \hat{f}(\gamma(t)).d\gamma(t),$$

где $\hat{f}$ — $\mathcal{A}_r$ -аддитивный $\mathbb{R}$ -однородный оператор соответствующий функции f , $(\text{L-S}) \int_a^b \hat{f}(\gamma(t)).d\gamma(t)$ обозначает некоммутативный интеграл Лебега—Стилтьеса.

Если $\gamma(t)$ абсолютно непрерывна, то некоммутативный интеграл Лебега—Стилтьеса сводится к некоммутативному интегралу Лебега:

$$(\text{L-S}) \int_a^b \hat{f}(\gamma(t)).d\gamma(t) = (\text{L}) \int_a^b \hat{f}(\gamma(t)).\gamma'(t) dt,$$

так как

$$(\text{L-S}) \int_a^b \int_{j,k} A(t) d_k \gamma(t) = (\text{L}) \int_a^b \int_{j,k} A(t)_k \gamma'(t) dt$$

для любых j, k (см. также [3, § VI.6.2]). $\square$

3.14. Частные случаи интегралов и вычетов. Для удобства мы можем выбрать параметризацию кривой так, чтобы для пути $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{A}_r$, где $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ — это числа Кэли—Диксона, выполнялось $[\alpha, \beta] = [0, 1]$, если иное не оговорено.

При расчёте некоммутативных интегралов вдоль путей $\mathcal{A}_r$ -(супер)дифференцируемых функций $f: U \rightarrow \mathcal{A}_r$, где U — область в $\mathcal{A}_r$, удовлетворяющая условиям теоремы 2.15 (о гомотопии) из [21, 26], для спрямляемого пути γ в U , содержащегося в комплексной плоскости $\mathbb{R} \oplus M\mathbb{R}$ с отмеченным чисто мнимым числом Кэли—Диксона M , $|M| = 1$, алгоритмы можно сделать проще. Для этого мы выберем генераторами в $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \in \mathbb{N}$, чисто мнимые числа Кэли—Диксона $N_1, \dots, N_{2^r-1}$, такие что $N_1 = M$, $|N_1| = 1, \dots, |N_{2^r-1}| = 1$, $N_j \perp N_k$ для всех $1 \leq j \neq k \leq 2^r - 1$, т. е. $\text{Re}(N_j N_k) = 0$, следовательно, $N_j N_k = -N_k N_j$ для всех $1 \leq j \neq k \leq 2^r - 1, \dots, N_0 = 1$, $N_0 N_j = N_j N_0$ для всех j . Это можно сделать стандартно по индукции, используя генераторы процедуры удвоения $N_2, N_4, \dots, N_{2^{r-1}}$, чтобы $N_3 = N_1 N_2, \dots, N_{2^{r-1}+p} = N_p N_{2^{r-1}}$ для любых $p = 1, \dots, 2^{r-1} - 1$. При процедуре удвоения при получении алгебры $\mathcal{A}_{s+1}$ из $\mathcal{A}_s$, $1 \leq s$, правило умножения задаётся формулой

$$(u + vl)(w + xl) = (uw - \tilde{x}v) + (xu + v\tilde{w})l \quad (1)$$

для любых $u, v, w, x \in \mathcal{A}_s$, где $l = N_{2^s}$, $u + vl, w + xl \in \mathcal{A}_{s+1}$ (см. [4, 10, 17]).

С этим новым базисом генераторов мы запишем f в виде

$$f(z) = {}_0g(z)N_0 + {}_1g(z)N_2 + \dots + {}_{2^{r-1}-1}g(z)N_{2^r-2}, \quad (2)$$

где ${}_pg(z) \in \mathbb{C}_M$ для любых $z \in U$ и $p = 0, \dots, 2^{r-1} - 1$; $\mathbb{C}_M := \mathbb{R} \oplus M\mathbb{R}$ обозначает комплексную плоскость, вложенную в $\mathcal{A}_r$. Если z — произвольное число Кэли—Диксона из $\mathcal{A}_r$, его можно записать в виде

$$z = x + yN_z, \quad (3)$$

где $x = x_z \in \mathbb{C}_M$, $y = y_z \in \mathbb{R}$, N_z — чисто мнимое число Кэли—Диксона, может быть зависящее от z , $|N_z| = 1$, $N_z \perp M$, что вытекает также из (2). Поскольку $N_z \perp M$ и числа являются чисто мнимыми, $N_z M = -M N_z$. Таким образом, $z^k = x_k + y_k N_{z^k}$ для любого $k \in \mathbb{Z}$, где $x_k \in \mathbb{C}_M$ и $y_k \in \mathbb{R}$, N_{z^k} чисто мнимые, $N_{z^k} \perp M$.

Каждая функция ${}_pg$ является $\mathbb{C}_M$ -значной, следовательно, с точностью до изоморфизма она является комплексной локально аналитической функцией. Поэтому её ограничение на $\mathbb{C}_M$ можно записать в виде

$${}_pg(x)|_{\mathbb{C}_M} = \sum_k c_{k,p} (x - x_0)^k, \quad (4)$$

где $x_0 \in \mathbb{C}_M$ — отмеченная точка и $c_{k,p} \in \mathbb{C}_M$ для любых k . Предположим, что ν — некоторая фраза для функции f в z -представлении для f на U , предписываемом уравнениями (2), (4), на всей области U с общей точкой $x_0 \in \mathbb{C}_M$, не зависящей от p , такая что ряд сходится равномерно на U . Предполагая замену $z \mapsto z - z_0$, мы можем для простоты считать, что $x_0 = 0$. Тогда

$$\int_{\gamma} \sum_{k,p} c_{k,p} x^k N_p dx = \sum_{k,p} \frac{c_{k,p}}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1}) N_p, \quad (5)$$

где $a = \gamma(0)$, $b = \gamma(1)$, $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, — спрямляемый путь в $\mathbb{C}_M$, если f не содержит никакой сингулярности в U , т. е. $\mathcal{A}_r$ -(супер)дифференцируема на U .

Если $z_0 \in \mathbb{C}_M \cap U$ — изолированный полюс функции f , охватываемый петлёй γ , то

$$\text{Res}(z_0, \nu) \cdot M = \sum_p (c_{-1,p} M) N_p. \quad (6)$$

В самом деле, каждое число Кэли—Диксона можно записать в полярной форме

$$z = |z| \exp(\text{Arg}(z)), \quad (7)$$

где $\text{Arg}(z)$ — чисто мнимое число Кэли—Диксона, такое что $\text{Arg}(z) = \alpha M + \beta N_z$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, следовательно, $z^k = |z|^k \exp(k \text{Arg}(z))$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому $z^k = |z|^k \exp(kM\varphi)$ для любого $z \in \mathbb{C}_M$, где $\varphi = \varphi(z) \in \mathbb{R}$. Некоммутативный интеграл вдоль пути аддитивен, следовательно,

$$\int_{\gamma} \sum_p p g(z) N_p dz = \sum_p \left(\int_{\gamma} p g(z) dz \right) N_p.$$

Тогда каждый член вида $\eta(z) = \{az^k b\}_{q(3)}$ на U с целым $k \neq -1$ имеет функцию $v(z)$, задаваемую левым или правым алгоритмом как $v(z) = \{az^{k+1} b\}_{q(3)}$, причём $(dv(z)/dz) \cdot 1 = \{az^k b\}_{q(3)}$, так как $dv(z)/dz = \sum_{j=0}^k \{a((z^j 1)z^{k-j})b\}_{q(3)}$,

где 1 обозначает единичный оператор на $\mathcal{A}_r$, $q(3)$ указывает на порядок умножения при $r \geq 3$, при $r = 2$ алгебра кватернионов ассоциативна. В каждой комплексной плоскости $\mathbb{C}_M$ для η с $k = -1$ функция v имеет ограничение $v|_{\mathbb{C}_M} = \{a \text{Ln}(z)b\}_{q(3)}$ для $z \neq 0$, так как $(de^z/dz) \cdot h = e^z h$ и $(d \text{Ln}(z)/dz) \cdot h = z^{-1} h$ для любых $0 \neq z \in \mathbb{C}_M$, $h \in \mathbb{C}_M$, и логарифмическая функция $\text{Ln}(z)$ является обратной функцией к экспоненциальной функции (см. также [21, 25, 26]). Таким образом, $\text{Res}(z_0, \{a(z-z_0)^{-1}b\}_{q(3)}) \cdot M = \{aMb\}_{q(3)}$ для всякого чисто мнимого числа Кэли—Диксона M . Другие полезные тождества для расчёта вычетов вытекают из формул (3)—(6).

Рассмотрим слово $\eta(z) = \{a_1 z^{n_1} \dots a_k z^{n_k} a_{k+1}\}_{q_1(2k+1)}$, ограничение которого на $\mathbb{C}_M$ имеет вид $\{b_1 \dots b_{k+1}(z^s z^m)\}_{q_2(k+2)}$, где постоянные $a_1, \dots, b_{k+1}$ принадлежат алгебре Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq 3$, $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_k, s, m \in \mathbb{Z}$. Тогда для спрямляемой петли γ , охватывающей нуль в $\mathbb{C}_M$ с индексом j , мы выводим,

что

$$(2\pi j)^{-1} \int_{\gamma} \{a_1 z^{n_1} \dots a_k z^{n_k} a_{k+1}\}_{q_1(2k+1)} dz = \{b_1 \dots b_{k+1} M\}_{q_2(k+2)} \quad (8)$$

при $m - s = 1$ с $n = -1$,

$$(2\pi j)^{-1} \int_{\gamma} \{a_1 z^{n_1} \dots a_k z^{n_k} a_{k+1}\}_{q_1(2k+1)} dz = \{b_1 \dots b_{k+1} \tilde{M}\}_{q_2(k+2)} \quad (9)$$

при $s - m = 1$ с $n = -1$,

$$(2\pi j)^{-1} \int_{\psi} \{a_1 z^{n_1} \dots a_k z^{n_k} a_{k+1}\}_{q_1(2k+1)} dz = 0 \quad (10)$$

при $|m - s| \neq 1$ или $n \neq -1$, где $n = n_1 + \dots + n_k$, $s + m = n$, так как $\exp(-2\pi Mt)M \exp(2\pi Mt) = M$ для чисто мнимого M из алгебры Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$. Также имеем $(de^z/dz) \cdot h = e^z h$ при $\text{Im}(h) \in \text{Im}(z)\mathbb{R}$.

Если $z_1 = a + bM$, где $a, b \in \mathbb{R}$, M — чисто мнимое число, — это некоторое число Кэли—Диксона, то любое другое $z_2 \in \mathcal{A}_r$ можно записать в виде $z_2 = \alpha + \beta M + \varphi N$, где $\alpha, \beta, \varphi \in \mathbb{R}$, N — чисто мнимое число, ортогональное M , $N \perp M$. Поэтому

$$z_1 z_2 = (\alpha + \beta M) z_1 + \varphi N \tilde{z}_1, \quad (11)$$

так как $NM = -MN$. Это тождество и формулы, приведённые выше, вместе с аддитивностью и $\mathbb{R}$ -однородностью некоммутативного интеграла вдоль пути над $\mathcal{A}_r$ можно использовать для вычислений интегралов вдоль путей в плоскостях $\mathbb{C}_M$ и соответствующих вычетов $\text{Res}(z_0, \mu) \cdot M$.

В общем случае, если даны функция f и её фраза μ , преобразования вида (2), (4) могут изменить фразу. Поэтому μ может быть не равна ν . Если $\int_{\gamma} \nu(z) dz$

или $\text{Res}(z_0, \nu) \cdot M$ вычислены, то, используя формулы перехода от μ к ν и обратно, можно вычислить эти величины для μ , если эти преобразования формул не меняют таких интегралов и вычетов, что в общем случае может не иметь места. Также мы отметим, что $K \exp(Mt) = K \cos(t) + KM \sin(t) =: N(t)$ для чисто мнимых октонионов K и M с $|M| = 1$ и вещественной переменной t . Если K и M перпендикулярны, т. е. $\text{Re}(KM) = 0$ и $|K| = 1$, то $K \exp(Mt) = \exp(\pi N(t)/2)$ и, следовательно, $\text{Ln}(K \exp(Mt)) = \pi N(t)/2 + 2\pi N(t)k$, $k \in \mathbb{Z}$, в зависимости от ветви функции (натурального) логарифма Ln над $\mathcal{A}_r$, так как $|N(t)| = 1$.

Имеется также интересный частный случай членов вида

$$\eta(z) = \{c_{1,n_1} z^{n_1} \dots c_{k,n_k} z^{n_k} c_{k+1,n_{k+1}}\}_{q(2k+1)},$$

когда существуют чисто мнимые числа Кэли—Диксона K и M и константы c_{j,n_j} в алгебре Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq 3$, такие что $\text{Im}(c_{j,n_j}) \perp K\mathbb{C}_M$ для любых j , где $|K| = |M| = 1$, $K \perp M$, $\text{Im}(z) := (z - \bar{z})/2$, $n_j \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ для любых j , $n = n_1 + \dots + n_k > 0$. Поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ есть центр алгебры

Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$, и каждое чисто мнимое число S , ортогональное $K\mathbb{C}_M$, антикоммутирует с каждым $z \in K\mathbb{C}_M$. Тогда, используя умножения генераторов и дистрибутивность умножения $(a+b)z = az + bz$ в $\mathcal{A}_r$, мы находим ограничение $v(z)|_{K\mathbb{C}_M}$ функции $v(z)$, которое можно привести к виду $\alpha z^{n+1}/(n+1)$. Эта функция имеет продолжение на $\mathcal{A}_r$, такое что

$$\left(\frac{dv(z)}{dz}\right).h = \sum_{j=0}^n \alpha \frac{(z^j h) z^{n-j}}{n+1}$$

для любых z и $h \in \mathcal{A}_r$, где константа α принадлежит $\mathcal{A}_r$, $\text{Im}(\alpha) \perp K\mathbb{C}_M$, так как октонионная алгебра альтернативна и тело кватернионов ассоциативно. Поэтому $(dv(z)/dz).1 = \eta(z)$ для любых $z \in K\mathbb{C}_M$. С другой стороны, каждая функция, даваемая левым или правым алгоритмом некоммутативного интегрирования вдоль пути, имеет полную степень по z , равную $n+1$, и может быть приведена к форме $\alpha z^{n+1}/(n+1)$ на $K\mathbb{C}_M$. Очевидно, что $(v(b) + w(x)) - (v(a) + w(x)) = v(b) - v(a)$ для любой функции $w(x)$ со значениями в алгебре Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$ и аргумент удовлетворяет следующим ограничениям: $x \in \mathcal{A}_r \ominus K\mathbb{C}_M \ominus \mathbb{R}$, $\text{Im}(x) \perp K\mathbb{C}_M$. Это предполагает, что

$$\int_{\gamma} \eta(z) dz = \alpha \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \quad (12)$$

когда $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in K\mathbb{C}_M$, и или выполнены условия теоремы 2.15 (о гомотопии) из [21, 26], или $\gamma([0, 1]) \subset K\mathbb{C}_M$.

Другой пример — функция f , которая может быть записана в форме

$$f(z) = \left(a(z) \left(\left(b(z) \frac{1}{z-y} \right) c(z) \right) \right) e(z)$$

в окрестности числа Кэли—Диксона $y \in \mathcal{A}_r$, где $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ и $e(z)$ являются $\mathcal{A}_r$ -голоморфными и $a(y) \neq 0$, $b(y) \neq 0$, $c(y) \neq 0$ и $e(y) \neq 0$, $2 \leq r \leq 3$. Тогда оператор вычета имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Res}(y, f).N &= (2\pi)^{-1} \lim_{0 < \beta \rightarrow 0} \int_{\gamma_\beta} a(z) \left(\left(b(z) \left(\frac{1}{z-y} \right) c(z) \right) \right) e(z) dz = \\ &= a(y) ((b(y)N)c(y))e(y), \end{aligned} \quad (13)$$

где a из формулы (1) здесь соответствует y , а y из (1) здесь соответствует β .

Для слов и фраз также имеются некоторые полезные тождества. Пусть $q(n+2)$ — вектор, указывающий на порядок умножения $n+2$ множителей. Тогда

$$\left(\frac{d\{az^n b\}_{q(n+2)}}{dz}\right).h = \sum_{j=0}^{n-1} \{az^j h z^{n-j-1} b\}_{q(n+2)} \quad (14)$$

для любых $h \in \mathcal{A}_r$, где z^n рассматривается как произведение n множителей z . Поскольку алгебра Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$, $r \geq 2$, ассоциативна со степенями, т. е.

$z^m z^n = z^{n+m}$ для любых натуральных чисел n и m , то

$$\left(\frac{d\{z^n\}_{q(n)}}{dz} \right) .h = \sum_{j=0}^{n-1} \{z^j h z^{n-j-1}\}_{q(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \{z^j h z^{n-j-1}\}_{q_l(n)} \quad (15)$$

для каждого $q(n)$, но $q(n)$ здесь одно и то же для всех слагаемых в сумме независимо от j , где $q_l(n)$ соответствует левой расстановке скобок,

$$\{a_1 \dots a_n\}_{q(n)} = ((\dots (a_1 a_2) \dots) a_{n-1}) a_n.$$

В октонионной алгебра порядок умножений в членах $\{z^j h z^{n-j-1}\}_{q(n)}$ не так уж существен (см. замечание 3.9) благодаря тождествам Муфанг.

Полный дифференциал связан с частными (супер)дифференциалами:

$$(D\eta(z, \tilde{z})) .h = \left(\frac{\partial \eta(z, \tilde{z})}{\partial z} \right) .h + \left(\frac{\partial \eta(z, \tilde{z})}{\partial \tilde{z}} \right) .h$$

для $(z, \tilde{z})$ (супер)дифференцируемой фразы $\eta(z, \tilde{z})$. В частности, для $\eta(z, \tilde{z}) = z^n \tilde{z}^m$ полный дифференциал тот же, что и для $\tilde{z}^m z^n$, так как z и $\tilde{z}$ коммутируют. Это означает, что

$$\left(\left(\frac{dz^n}{dz} \right) .h \right) \tilde{z}^m + z^n \left(\left(\frac{d\tilde{z}^m}{d\tilde{z}} \right) .h \right) = \tilde{z}^m \left(\left(\frac{dz^n}{dz} \right) .h \right) + \left(\left(\frac{d\tilde{z}^m}{d\tilde{z}} \right) .h \right) z^n \quad (16)$$

для всех $z, h \in \mathcal{A}_r$.

Формулы (1)–(16) данного пункта и формулы M1)–M3), (1)–(6) замечания 3.9 могут служить для практических вычислений вычетов.

В случае алгебр Кэли–Диксона из-за некоммутативности, неассоциативности и возможного неудобного поведения функций вокруг точек ветвления z_0 , ветви которой в общем случае могут зависеть от $M/|M|$ для $M = \text{Im}(z - z_0) \neq 0$, интегралы вдоль путей более сложны, чем над полем комплексных чисел.

Теперь вычислим некоторые полезные интегралы. В обозначениях работ [21, 26] пусть $\hat{f}$ – такой оператор, что $\hat{f}(z).dz = (dg(z)/dz).dz$ для (супер)дифференцируемой функции $f(z)$, $(dg(z)/dz).1 = f(z)$ в открытом подмножестве U , g рассчитывается с помощью левого или правого алгоритма для любого степенного ряда. Тогда

$$(z^n)^\wedge .\Delta z = \Delta \left(\frac{z^{n+1}}{n+1} \right) + o(\Delta z),$$

где $n \in \mathbb{N}$ и

$$(e^z)^\wedge .\Delta z = \Delta(e^z) + o(\Delta z)$$

для любых $z \in \mathcal{A}_r$,

$$\left(\frac{1}{1+y} \right)^\wedge .\Delta y = \Delta(\text{Ln}(1+y)) + o(\Delta y)$$

при $|y| < 1$, $y \in \mathcal{A}_r$, так как степенной ряд

$$\text{Ln}(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} y^n}{n}$$

имеет вещественные коэффициенты разложения и равномерно сходится в каждом шаре радиуса $0 < \rho < 1$ с центром в нуле, где Δy — достаточно малое приращение y . Таким образом,

$$\int_{\gamma} z^n dz = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \quad (17)$$

$$\int_{\gamma} e^z dz = e^b - e^a \quad (18)$$

для любого спрямляемого пути γ , что $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = b$,

$$\int_{\gamma} d\operatorname{Ln}(1+y) = \int_{\gamma} (1+y)^{-1} dy = \operatorname{Ln}(1+b) - \operatorname{Ln}(1+a) \quad (19)$$

для пути γ , такого что $|\gamma(t)| < 1$ для любых $t \in [0, 1]$. С другой стороны, если $\operatorname{Im}(z)$ и $\operatorname{Im}(y) \in M\mathbb{R}$ для некоторого отмеченного чисто мнимого числа Кэли—Диксона M , то z и y коммутируют. Следовательно, $\operatorname{Ln}(z(1+y)) = \operatorname{Ln}(z) + \operatorname{Ln}(1+y)$ для таких y и z . Поэтому формула (19) выполняется также для любых спрямляемых путей γ в $(\mathbb{C}_M \setminus \{z \in \mathcal{A}_r : z \leq 0\}) - 1$, где $\mathbb{C}_M = \mathbb{R} \oplus M\mathbb{R}$ есть комплексная плоскость, вложенная в алгебру Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$.

Тогда для всякого данного спрямляемого пути γ в $\mathcal{A}_r \setminus Q$, где Q — подмногообразие, по которому производился разрез, использованный для построения некоммутативного аналога римановой поверхности над $\mathcal{A}_r$, можно выбрать последовательность спрямляемых путей γ_n в $\mathcal{A}_r \setminus Q$, такую что γ_n является комбинацией путей $\gamma_{n,j} : [b_{j-1}, b_j] \rightarrow \mathcal{A}_r$ в $\mathbb{C}_{M_{n,j}}$, $\gamma_n(t) = \gamma_{n,j}(t)$ для каждого $t \in [b_{j-1}, b_j]$, $j = 1, \dots, m(n) \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $b_0 = 0 < b_1 < \dots < b_{m(n)} = 1$. Тогда для любых $\gamma_{n,j}$ и, следовательно, для любых γ_n формула (19) также выполняется в $(\mathcal{A}_r \setminus Q) - 1$. Взятие предела по n тогда даёт

$$\int_{\gamma} d\operatorname{Ln}(z) = \int_{\gamma} z^{-1} dz = \operatorname{Ln}(b) - \operatorname{Ln}(a) \quad (20)$$

для любого спрямляемого пути γ в $\mathcal{A}_r \setminus Q$ с выбранной ветвью функции (натурального) логарифма Ln над алгеброй Кэли—Диксона. Это естественно, так как $(d\operatorname{Ln}(z)/dz) \cdot 1 = 1/z$ для любых $z \neq 0$ в $\mathcal{A}_r$.

Если $f(z)$ — однозначная функция на открытой области U в $\mathcal{A}_r$, имеющая разложение в степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, равномерно сходящийся на U , с вещественными коэффициентами разложения a_n , то из (17) мы выводим, что

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (b^{n+1} - a^{n+1})}{n+1}, \quad (21)$$

где $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ — спрямляемый путь в U с $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = b$. В частности, отсюда получаем

$$\int_{\gamma} \sin(z) dz = \cos(a) - \cos(b), \quad (22)$$

$$\int_{\gamma} \cos(z) dz = \sin(b) - \sin(a), \quad (23)$$

где

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Если f является (супер)дифференцируемой функцией октонионной переменной, не равной нулю на открытом множестве U , то $f(z)(1/f(z)) = 1$ на U и $((df(z)/dz).h)(1/f(z)) = f(z)((d[1/f(z)]/dz).h)$ для любых $z \in U$ и $h \in \mathbf{O}$, следовательно, $(d[1/f(z)]/dz).h = -[1/f(z)]((df(z)/dz).h)[1/f(z)]$ на соответствующей области (см. [21, предложение 3.8.2]). Алгебра Кэли—Диксона ассоциативна со степенями, поэтому, повторяя рассуждения для z^n с $n \in \mathbb{N}$ вместо f , мы получим, что $(dz^{-n}/dz).h = -z^{-n}((dz^n/dz).h)z^{-n}$ для любых $z \neq 0$ и h из $\mathcal{A}_r$, где $\text{Im}(z), \text{Im}(h) \in M\mathbb{R}$ для некоторого отмеченного чисто мнимого числа M . В частности, $(dz^n/dz).1 = nz^{n-1}$ для каждого целого числа n , $z \neq 0$, когда $n < 0$, $dz^0/dz = 0$. Таким образом,

$$\int_{\gamma} z^n dz = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \quad (24)$$

для любого целого числа, не равного -1 , для всякого спрямляемого пути γ , для которого $a = \gamma(0)$, $b = \gamma(1)$ и $\gamma([0, 1])$ не содержит 0 , когда $n < 0$.

Если $\alpha \in \mathcal{A}_r$, то мы определим $z^\alpha := \exp(\alpha \text{Ln}(z))$ для любых $z \neq 0$. Поэтому мы рассчитаем его производную

$$\left(\frac{dz^\alpha}{dz}\right).h = \frac{de^y}{dy} \Big|_{y=\alpha \text{Ln}(z)} \cdot \left(\alpha \left[\left(\frac{d \text{Ln}(z)}{dz}\right).h\right]\right)$$

для любых $h \in \mathcal{A}_r$. В частности,

$$\left(\frac{dz^\alpha}{dz}\right).1 = \left(\frac{de^y}{dy}\right) \Big|_{y=\alpha \text{Ln}(z)} \cdot (\alpha z^{-1}).$$

Возьмём $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $(dz^\alpha/dz).1 = \alpha z^{\alpha-1}$, следовательно,

$$\int_{\gamma} z^\alpha dz = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (25)$$

для любого вещественного $\alpha \neq -1$ и спрямляемого пути в $\mathcal{A}_r \setminus Q$.

Если $\alpha \in \mathbb{R}$, мы получим разложение в виде степенного ряда

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

для всех $|z| < 1$, где

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

В частности, для $\alpha = -1/2$ и $z = -y^2$ мы получаем, что

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \arcsin(b) - \arcsin(a) \quad (26)$$

для $\gamma([0, 1]) \subset [\mathcal{A}_r \setminus \{z \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(z) = 0\}]$, где ветвь квадратного корня берётся с $\sqrt{x} > 0$ для любых $x > 0$, $|\gamma(t)| < 1$ для любых $t \in [0, 1]$.

Для функции тангенса его степенной ряд имеет вид

$$\operatorname{tg}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!},$$

функция котангенса имеет разложение в виде ряда

$$z \operatorname{ctg}(z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} B_n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

где B_n — это числа Бернулли. Эти ряды абсолютно сходятся в шаре $|z| < \pi/2$ и $|z| < \pi$ соответственно. Числа Бернулли появляются из производящей функции

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{x^n}{n!}$$

для $x \in (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}$ с достаточно малым $\delta > 0$, где $\beta_{2n} = (-1)^{n-1} B_n$, $\beta_{2n+1} = 0$ для каждого $n \geq 1$ (см. [8, § XII.4, п. 445, 449]). По формуле (25), учитывая периодичность тригонометрических функций, получаем

$$\int_{\gamma} \cos^{-2}(z) dz = \operatorname{tg}(b) - \operatorname{tg}(a), \quad (27)$$

когда $|\gamma(t) - \pi m| < \pi/2$ для любых $t \in [0, 1]$ для некоторого отмеченного $m \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{\gamma} \sin^{-2}(z) dz = \operatorname{ctg}(a) - \operatorname{ctg}(b), \quad (28)$$

когда $|\gamma(t) - \pi m - \pi/2| < \pi/2$ для любых $t \in [0, 1]$ для некоторого отмеченного $m \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, $\operatorname{tg}(z)$ и $\operatorname{ctg}(z)$ являются мероморфными функциями,

$$\left(\frac{d \operatorname{tg}(z)}{dz} \right) \cdot 1 = \cos^{-2}(z)$$

для любых

$$z \in V := \{y \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(y) \neq \pi(m + 1/2), m \in \mathbb{Z}\},$$

а также

$$\left(\frac{d \operatorname{ctg}(z)}{dz} \right) .1 = -\sin^{-2}(z)$$

для любых

$$z \in U := \{y \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(y) \neq \pi m, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Поэтому формулы (27), (28) распространяются на любой спрямляемый путь γ в V или U соответственно.

Мы отметим также, что из формулы (18) следует, что

$$\int_{\gamma} \operatorname{ch}(z) dz = \operatorname{sh}(b) - \operatorname{sh}(a), \quad (29)$$

$$\int_{\gamma} \operatorname{sh}(z) dz = \operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a), \quad (30)$$

где $\operatorname{ch}(z) = (e^z + e^{-z})/2$, $\operatorname{sh}(z) = (e^z - e^{-z})/2$. Для $\operatorname{cth}(z) = \operatorname{ch}(z)/\operatorname{sh}(z)$ степенной ряд

$$z \operatorname{cth}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{2n} B_n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

абсолютно сходится в шаре $|z| < \pi$, следовательно,

$$\int_{\gamma} \operatorname{sh}^{-2}(z) dz = \operatorname{cth}(a) - \operatorname{cth}(b) \quad (31)$$

для $0 < |\gamma(t)| < \pi$ для любых $t \in [0, 1]$. Мы отметим, что если y записано в полярной форме $y = \rho e^S$, где $\rho = |y| \geq 0$, и S — чисто мнимое число Кэли—Диксона, то $y^2 = -1$ тогда и только тогда, когда $\rho = 1$ и $|S| = \pi(m + 1/2)$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Поскольку $\operatorname{th}(z)$ и $\operatorname{cth}(z)$ локально аналитичны и

$$\left(\frac{d \operatorname{th}(z)}{dz} \right) .1 = \operatorname{ch}^{-2}(z)$$

для любых

$$z \in V := \mathcal{A}_r \setminus \left\{ y : \operatorname{Re}(y) = 0, |\operatorname{Im}(y)| = \pi \left(m + \frac{1}{2} \right), m = 0, 1, 2, 3, \dots \right\}$$

и

$$\left(\frac{d \operatorname{cth}(z)}{dz} \right) .1 = -\operatorname{sh}^{-2}(z)$$

для любых

$$z \in U := \mathcal{A}_r \setminus \{y : \operatorname{Re}(y) = 0, |\operatorname{Im}(y)| = \pi m, m = 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

то (31) продолжается на $\gamma \subset U$ и

$$\int_{\gamma} \operatorname{ch}^{-2}(z) dz = \operatorname{th}(b) - \operatorname{th}(a) \quad (32)$$

для любых $\gamma \subset V$.

Ряд

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1/2}{n} \frac{z^{2n}}{n!}$$

абсолютно сходится для $|z| < 1$, и его интеграл даёт arctg в этом шаре. Функция $\operatorname{arctg}(z)$ локально аналитична, и

$$\left(\frac{d \operatorname{arctg}(z)}{dz} \right) .1 = \frac{1}{1+z^2}$$

при $z^2 \neq -1$, так как

$$\left(\frac{d \operatorname{tg}(z)}{dz} \right) .1 = \frac{1}{\cos^2(z)}, \quad \left(\frac{df^{-1}(z)}{dz} \right) \Big|_{z=f(y)} = \left(\frac{df(y)}{dy} \right)^{-1}$$

на соответствующих областях (см. [21, предложение 3.8.1]). Таким образом,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz = \operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a) \quad (33)$$

при

$$\gamma \subset \{y \in \mathcal{A}_r : y^2 \neq -1\}.$$

В октонионной алгебре из-за её альтернативности

$$\left(\frac{d \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + \alpha})}{dz} \right) .1 = \frac{1}{\sqrt{z^2 + \alpha}}$$

для ненулевого вещественного числа α и каждого $z^2 \neq -\alpha$ из $\mathbf{O}$, где $\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + \alpha})$ и $\sqrt{z^2 + \alpha}$ локально аналитичны. Поэтому из формулы (20) мы выводим

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{z^2 + \alpha}} dz = \int_{\gamma} d \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + \alpha}) = \operatorname{Ln}(b + \sqrt{b^2 + \alpha}) - \operatorname{Ln}(a + \sqrt{a^2 + \alpha}) \quad (34)$$

для любого пути γ в области

$$U := \{y \in \mathbf{O} : y^2 \neq -\alpha, \operatorname{Re}(y) \neq 0\},$$

так как в ней ветви функций $1/\sqrt{z^2 + \alpha}$ и $\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + \alpha})$ заданы. Можно также отметить, что $y^2 = -\alpha$ тогда и только тогда, когда $\rho^2 = |\alpha|$ и $|S| = \pi(m + \kappa(\alpha)/2)$ при $m \in \mathbb{Z}$, где $y = \rho e^S$, $\rho = |y|$, $\operatorname{Re}(S) = 0$, $\kappa(\alpha) = 1$ при $\alpha > 0$, $\kappa(\alpha) = 0$ при $\alpha \leq 0$.

Рассмотрим теперь общий алгоритм более подробно. Пусть f_1 и f_2 — две аналитические функции переменной z на области U . Введем обозначения: $f^0 = f$, $f^{-n} = f^{(n)}$, $f^{(n)}(z) := (d^n f(z)/dz^n) \cdot 1^{\otimes n}$, функция f^n такова, что $(df^n(z)/dz) \cdot 1 = f^{n-1}(z)$ для любых $n \in \mathbb{N}$. В частности, $(\{az^k b\}_{q(3)})^n = \{az^{k+n} b\}_{q(3)} [(k+1) \dots (k+n)]^{-1}$ для констант $a, b \in \mathcal{A}_r$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где z^0 также интегрируется для единообразия, так что в каждой фразе по z (супер)дифференцируемая функция является рядом слагаемых, обязательно имеющих компоненты z^n или $e = \mathbf{1}(1)$ (см. также [6, § 2.14]). Поэтому $(df^1(z)/dz) \cdot h = \hat{f} \cdot h$ и $f \mapsto f^l$ — операция антидифференцирования порядка l , $l \in \mathbb{N}$. Тогда левый алгоритм таков:

$$(f_1 f_2)^1 = \sum_{s=0}^{n_2} (-1)^s f_1^{1+s} f_2^{-s}, \quad (35)$$

где n_2 — наименьшее натуральное число, такое что $f_2^{-n_2-1} = 0$. Правый алгоритм симметричен левому. Работа с фразами и степенными рядами сводится к умножению и сложению полиномов, поэтому мы рассмотрим этот алгоритм для члена $(\{f_1 \dots f_k\})^l$, где $l \in \mathbb{N}$, $f_2, \dots, f_k$ — многочлены от z степеней $n_2, \dots, n_k$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} (f_1 f_2)^2 &= \sum_{s_1=0}^{n_2} (-1)^{s_1} (f_1^{1+s_1} f_2^{-s_1})^1 = \\ &= \sum_{s_1=0}^{n_2} \sum_{s_2=0}^{n_2-s_1} (-1)^{s_1+s_2} f_1^{2+s_1+s_2} f_2^{-s_1-s_2} = \sum_{s=0}^{n_2} (-1)^s (s+1) f_1^{2+s} f_2^{-s}. \end{aligned} \quad (36)$$

Продолжим вычисление по индукции, используя то, что

$$\sum_{s_1=0}^s \sum_{s_2=0}^{s-s_1} \dots \sum_{s_p=0}^{s-s_1-\dots-s_{p-1}} 1 = \binom{s+p-1}{s},$$

где $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальный коэффициент. Тогда

$$(f_1 f_2)^l = \sum_{s=0}^{n_2} (-1)^s \binom{s+l-1}{s} f_1^{s+l} f_2^{-s}. \quad (37)$$

Применяя формулу (37) к произведению k членов, мы выводим, что

$$\begin{aligned} (\{f_1 f_2 \dots f_k\}_{q(k)})^l &= \sum_{s_k=0}^{n_k} (-1)^{s_k} \binom{s_k+l-1}{s_k} \{[f_1 \dots f_{k-1}]^{s_k+l} f_k^{-s_k}\}_{q(k)} = \\ &= \sum_{s_k=0}^{n_k} \sum_{s_{k-1}=0}^{n_{k-1}} \dots \sum_{s_2=0}^{n_2} (-1)^{s_2+\dots+s_k} \binom{s_k+l-1}{s_k} \binom{s_{k-1}+s_k+l-1}{s_{k-1}} \times \dots \times \\ &\times \binom{s_2+\dots+s_k+l-1}{s_2} \{f_1^{s_2+\dots+s_k} f_2^{-s_2} \dots f_k^{-s_k}\}_{q(k)}, \end{aligned} \quad (38)$$

где обозначение $[f_1 \dots f_{k-1}]^{s_k+l}$ не предполагает определённого порядка умножения, показывая лишь, что оператор антидифференцирования имеет порядок $s_k + l$ по множеству членов в квадратных скобках. Для тела кватернионов фигурные скобки можно опустить из-за ассоциативности. Таким образом левый или правый алгоритм задаёт ветвь некоммутативного интеграла вдоль пути для функции f (см. также [6, 21, 26]), для этого используются формулы (35)–(37).

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция на шаре B с центром в нуле, равномерно сходящийся степенной ряд для функции f имеет вещественные коэффициенты разложения, $\alpha \in \mathbf{O}$, $\alpha \neq 0$. Тогда отображение $z \mapsto \alpha z \alpha^{-1}$ в $\mathbf{O}$ индуцирует отображение $f(z) \mapsto \alpha f(z) \alpha^{-1}$, такое что $\alpha f(z) \alpha^{-1} = f(\alpha z \alpha^{-1})$. Но некоммутативный интеграл вдоль пути изменяется как

$$\alpha \left(\int_{\gamma} f(z).dz \right) \alpha^{-1} = \int_{\gamma} f(\alpha z \alpha^{-1}).(\alpha dz \alpha^{-1}) = \int_{\psi} f(y).dy, \quad (39)$$

где $\psi(t) = \alpha \gamma(t) \alpha^{-1}$ для любых $t \in [0, 1]$, для такой функции f , так как октонионная алгебра альтернативна и $\mathbb{R}$ — её центр. Если f — многозначная функция, например $\text{Ln}(z)$ или $\sqrt[n]{z}$, $n \geq 2$, то отображение $z \mapsto \alpha z$ или $z \mapsto z \alpha$ может вызвать переход с одной ветви функции f на другую.

3.15. Предложение. Пусть f_1 и f_2 — две (супер)дифференцируемые однозначные функции на открытом множестве U в алгебре Кэли—Диксона $\mathcal{A}_r$ и γ — спрямляемый путь в U . Тогда

$$\int_{\gamma} f_1(z) \left[\left(\frac{df_2(z)}{dz} \right) .1 \right] dz = f_1(z) f_2(z)|_a^b - \int_{\gamma} \left[\left(\frac{df_1(z)}{dz} \right) .1 \right] f_2 dz.$$

Доказательство. Рассмотрим (супер)производную

$$\left(\frac{df_1(z) f_2(z)}{dz} \right) .h = \left[\left(\frac{df_1(z)}{dz} \right) .h \right] f_2(z) + f_1(z) \left[\left(\frac{df_2(z)}{dz} \right) .h \right],$$

где $z \in U$ и $h \in \mathcal{A}_r$. Тогда мы возьмём интегральные суммы $\sum_{j=1}^n$, соответствующие разбиениям P пути γ . Тогда в обозначениях теоремы 3.11 получим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \left[\left(\frac{df_1(z) f_2(z)}{dz} \right) .1 \right] dz &= \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \left(\frac{df_1(z) f_2(z)}{dz} \right) \Big|_{z=z_j} .\Delta_j z = \\ &= f_1(z) f_2(z)|_a^b = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \left(\left[\left(\frac{df_1(z)}{dz} \right) .1 \right] f_2(z) \right) .\Delta_j z + \\ &+ \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \left(f_1(z) \left[\left(\frac{df_2(z)}{dz} \right) .1 \right] \right) .\Delta_j z = \\ &= \int_{\gamma} \left[\left(\frac{df_1(z)}{dz} \right) .1 \right] f_2(z) dz + \int_{\gamma} f_1(z) \left[\left(\frac{df_2(z)}{dz} \right) .1 \right] dz. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{\gamma} f_1(z) \left[\left(\frac{df_2(z)}{dz} \right) .1 \right] dz = f_1(z) f_2(z) |_a^b - \int_{\gamma} \left[\left(\frac{df_1(z)}{dz} \right) .1 \right] f_2 dz. \quad \square$$

4. Аффинная алгебры над октонионами

4.1. Определение. Если у обобщённой картановской матрицы A все собственные главные миноры положительные и $\det(A) = 0$, то говорят, что A имеет аффинный тип. Алгебра $\mathfrak{g}(A)$ (см. замечание 2.7), соответствующая обобщённой картановской матрице A аффинного типа называется аффинной алгеброй над $\mathcal{A}_r$.

4.2. Замечание. Пусть f и g — две мероморфные функции на открытом множестве V в алгебре Кэли—Диксона с сингулярностями на множестве W , удовлетворяющем условиям R1)—R3) определения 3.1. Тогда

$$\left(\frac{df(z)g(z)}{dz} \right) .h = \left[\left(\frac{df(z)}{dz} \right) .h \right] g(z) + f(z) \left[\left(\frac{dg(z)}{dz} \right) .h \right]$$

для любых $h \in \mathcal{A}_r$ и каждого $z \in V \setminus W =: U$. В частности, возьмём $h = 1$. С другой стороны, $\int_{\gamma} [(df(z)g(z)/dz).1] dz = 0$ для любой спрямляемой петли γ в U , и мы получаем

$$\text{Res}(z_0, (f'(z).1)g(z)).M = -\text{Res}(z_0, f(z)(g'(z).1)).M \quad (1)$$

для любых $z_0 \in V$ и любого чисто мнимого числа Кэли—Диксона M (см. также определение 3.1, теорему 3.6, предложение 3.15). В обозначениях $\psi_{z_0}(f', g) := \text{Res}(z_0, (f'(z).1)g(z))$ формула (1) принимает вид

$$\psi_{z_0}(f', g) = -\psi_{z_0}(f, g') \quad (2)$$

для любых $z_0 \in U$, где $\psi_{z_0}(f', g).M$ — $\mathcal{A}_r$ -аддитивный оператор по f и по g и по чисто мнимому числу Кэли—Диксона M , более того, он $\mathbb{R}$ -однороден по f , по g и по M , что вытекает из свойств оператора вычета (см. также теорему 3.6).

Рассмотрим теоретико-множественную композицию отображений $f_1 \circ f_2(y) = f_1(f_2(y))$. Согласно [21, предложение 2.2.1, теоремы 2.11, 2.15, 2.16, 3.10] мы можем переформулировать результат.

4.3. Предложение. Пусть $g: U \rightarrow \mathcal{A}_r^m$, $r \geq 2$, и $f: W \rightarrow \mathcal{A}_r^n$ — две (супер)дифференцируемые функции на U и W соответственно, такие что $g(U) \subset W$, множество U открыто в $\mathcal{A}_r^k$, множество W открыто в $\mathcal{A}_r^m$, $k, n, m \in \mathbb{N}$, где f и g одновременно или $(z, \tilde{z})$ -, или z -, или $\tilde{z}$ -дифференцируемы. Тогда сложная функция $f \circ g(z) := f(g(z))$ является (супер)дифференцируемой на U и

$$(Df \circ g(z)).h = (Df(g)).((Dg(z)).h) \quad (1)$$

для любых $z \in U$ и $h \in \mathcal{A}_r^k$, следовательно, $f \circ g$ имеет тот же тип дифференцируемости, что f и g .

4.4. Умножения операторов. Теоретико-множественная композиция служит как забывающий функтор на порядках производных:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d(f_3 \circ f_2) \circ f_1(x)}{dx} \right) . h &= \left(\frac{df_3 \circ f_2(y)}{dy} \right) \Big|_{y=f_1(x)} \cdot \left[\left(\frac{df_1(x)}{dx} \right) . h \right] = \\
 &= \left(\frac{df_3 \circ f_2(y)}{dy} \right) \Big|_{y=f_1(x)} . v|_{v=(df_1(x)/dx) \cdot h} = \\
 &= \left(\frac{df_3(z)}{dz} \right) \Big|_{z=f_2(y)} \cdot \left[\left(\frac{df_2(y)}{dy} \right) \Big|_{y=f_1(x)} . v \right] \Big|_{v=(df_1(x)/dx) \cdot h} = \\
 &= \left(\frac{df_3(z)}{dz} \right) \Big|_{z=f_2(y)} \cdot \left[\left(\frac{df_2(y)}{dy} \right) \Big|_{y=f_1(x)} \cdot \left[\left(\frac{df_1(x)}{dx} \right) . h \right] \right] = \\
 &= \left(\frac{df_3(f_2(f_1(x)))}{dx} \right) . h
 \end{aligned} \tag{1}$$

для всех $h \in \mathcal{A}_r^{n_1}$ и открытых областей U_j в $\mathcal{A}_r^{n_j}$ при $j = 1, 2, 3$, где $f_j: U_j \rightarrow U_{j+1}$ при $j = 1, 2$, $f_3: U_3 \rightarrow \mathcal{A}_r^n$, $n_1, n_2, n_3, n \in \mathbb{N}$, f_j является z -дифференцируемой на U_j для любых $j = 1, 2, 3$. Если рассматривать $\mathcal{A}_r$ -аддитивные $\mathbb{R}$ -однородные операторы A_j на квазивекторных пространствах X_j над $\mathcal{A}_r$, $A_j: X_j \rightarrow X_{j+1}$, с другой композицией $A_2 \diamond A_1$, индуцированной умножением на матрицах с элементами из $\mathcal{A}_r$, умножением чисел Кэли—Диксона и умножением матриц на соответствующие векторы, то нужно описывать порядок такого нового умножения, указывая вектор $q(m)$, задающий порядок $\{A_m \diamond \dots \diamond A_1\}_{q(m)}$, где $A_j \diamond h_j := A_j(h_j)$ для любых $h_j \in X_j$. Теоретико-множественная композиция операторов

$$\begin{aligned}
 (A_3 \circ A_2) \circ A_1(h) &= (A_3 \circ A_2)(v)|_{v=A_1(h)} = \\
 &= A_3(A_2(v))|_{v=A_1(h)} = A_3(A_2(A_1(h)))
 \end{aligned} \tag{2}$$

для любых $h \in X_1$ всегда ассоциативна, ей соответствует композиция

$$A_m \circ \dots \circ A_1(h) = A_m \diamond (A_{m-1} \diamond \dots \diamond (A_2 \diamond (A_1 \diamond h)) \dots) \tag{3}$$

для любых $h \in X_1$, в частности

$$(A_2 \circ A_1)(h) = A_2 \diamond (A_1 \diamond h), \tag{4}$$

поэтому теоретико-множественная композиция операторов может рассматриваться как частный случай более общего умножения операторов с правой композицией в правых частях формул (3), (4). Можно отметить, что в общем случае $(A_2 \diamond A_1) \diamond h$ может не равняться $A_2 \diamond (A_1 \diamond h)$ над $\mathbf{O}$. Над телом кватернионов $\mathbf{H}$ скобки можно опустить, так как $\mathbf{H}$ ассоциативно.

4.5. Рассмотрим алгебру $\mathcal{M}(V, W)$ всех мероморфных функций на V с сингулярностями, содержащимися в W , где V открыто в $\hat{\mathcal{A}}_r$ и W удовлетворяют

условиям R1)–R3) определения 3.1, $W \subset V$. В частности, если взять одноточечное множество $\{0\}$ вместо W , получим алгебру $\mathcal{L}(V)$ всех рядов Лорана на множестве $V \setminus \{0\}$, открытом в $\mathcal{A}_r$,

$$\eta(z) = \sum_{m,j,p} \{A_{m,j}, z^m\}_{q(2p)}, \quad (1)$$

с центром в нуле, где

$$\{A_{m,j}, z^m\}_{q(2p)} := \{a_{m,m_1,1} z^{m_1} \cdots a_{m,m_p,p} z^{m_p}\}_{q(2p)}, \quad (2)$$

$a_{m,k,p} \in \mathcal{A}_r$, $m_k \in \mathbb{Z}$ для любых $k \in \mathbb{N}$, $j, p \in \mathbb{N}$, $m = (m_1, \dots, m_p)$ (см. [21, 26]). Каждой фразе $\eta(z)$ соответствует функция $f_\eta(z) = ev_z(\eta) = \eta(z)$, где ev_z обозначает операцию вычисления в точке $z \in U$.

Имеется естественное отношение эквивалентности фраз, описываемое правилами

$$b\eta_1\eta_2 = \eta_1 b\eta_2 = \eta_1\eta_2 b \quad (3)$$

для любого вещественного числа b ,

$$(z^l z^n) = (z^{n+l}) \quad (4)$$

для всех целых чисел l, n ,

$$(\eta_1 + \eta_2) - \eta_2 = \eta_1 \quad (5)$$

для всех фраз η_1 и η_2 , так как $\mathcal{A}_r$ является степенной ассоциативной алгеброй с центром $\mathbb{R}$. Другие отношения эквивалентности возникают из-за ассоциативности тела кватернионов **H** и альтернативности октонионной алгебры **O**. Над **H** скобки во фразах можно опустить.

Если W не является одноточечным множеством, то ограничение $f \in \mathcal{M}(V, W)$ на $z_0 + \mathbb{C}_M$ имеет ряд Лорана (2) по переменной $z - z_0 \in \mathbb{C}_M$ вместо z для любых $z_0 \in W$ и любого чисто мнимого числа Кэли–Диксона $M \in \mathcal{A}_r$. Это вытекает из формул (3.22), (3.23) из [21, 26], применённых к спрямляемым петлям γ_1 и γ_2 в плоскости $z_0 + \mathbb{C}_M$, с учётом условий R1)–R3) определения 3.1.

4.6. Определение. Для обобщённой картановской матрицы A рассмотрим матрицу $\check{A}$, полученную из A исключением её нулевых столбцов и нулевых строк, и положим $\check{g} = g(\check{A})$. Определим квазиалгебру обёрток

$$\mathcal{M}(\check{g}) := \mathcal{M}(V, W) \otimes_{\mathcal{A}_r} \check{g}$$

с умножением

$$[P \otimes x, Q \otimes y]_0 := PQ \otimes [x, y]$$

для всех $P, Q \in \mathcal{M}(V, W)$ и $x, y \in \check{g}$.

Продолжим форму $(x | y)$ с $\check{g}$ на $\mathcal{M}(\check{g})$ по формуле

$$(P \otimes x | Q \otimes y)_z = PQ(x | y).$$

4.7. Предложение. Существует $\mathcal{A}_r$ -значный градуированный 2-коцикл на квазиалгебре обёрток $\mathcal{M}(\check{g})$ над $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq 3$.

Доказательство. Дифференцирование

$$DP(z) := \left(\frac{dP(z)}{dz} \right) . 1 \quad (1)$$

квазиалгебры $\mathcal{M}(V, W)$ для $z \in V \setminus W$ мы продолжим до дифференцирования квазиалгебры $\mathcal{M}(\check{g})$ по формуле

$$D(P \otimes x) := (DP) \otimes x. \quad (2)$$

Определим отображение

$$\omega(z_0; P \otimes x, Q \otimes y) := \text{Res}(z_0, (DP)Q) \cdot (x | y) \quad (3)$$

для любых $x, y \in \check{g}$, $P, Q \in \mathcal{M}(V, W)$, $z_0 \in W$, где форма $(* | *)$ введена в теореме 2.21. Ограничение $(* | *)|_{0g}$ на $0g$ вещественнозначно. Мы имеем

$$\text{Res}(z_0, f) \cdot b = 0, \quad z_0 \in V, \quad (4)$$

для любых вещественных чисел b и любой функции $f \in \mathcal{M}(V, W)$, так как в этом случае некоммутативный интеграл рассчитывается вдоль спрямляемой петли γ , содержащейся в $\mathbb{R}$. Следовательно,

$$\text{Res}(z_0, f) \cdot h = \text{Res}(z_0, f) \cdot (\text{Im}(h)) \quad (5)$$

для любых чисел Кэли—Диксона $h \in \mathcal{A}_r$. Для определённости с вычетами мы рассмотрим их для заданных фраз функций. Возьмём упорядоченное произведение $\{f_1 f_2 f_3\}_{q(3)}$ (обычное поточечное) по z (супер)дифференцируемых функций f_1, f_2, f_3 на открытом множестве U в $\mathcal{A}_r$. Для любых $z_0 \in U$ имеем $\text{Res}(z_0, (\{f_1 f_2 f_3\}_{q(3)})' \cdot 1) = 0$, следовательно,

$$\text{Res}(z_0, \{(f_1' \cdot 1) f_2 f_3\}_{q(3)}) + \text{Res}(z_0, \{f_1 (f_2' \cdot 1) f_3\}_{q(3)}) + \text{Res}(z_0, \{f_1 f_2 (f_3' \cdot 1)\}_{q(3)}) = 0. \quad (6)$$

Имеет место разложение

$$P = {}_0 P i_0 + \dots + {}_{2^r-1} P i_{2^r-1}, \quad (7)$$

где ${}_j P$ — $\mathbb{R}$ -значная функция для каждого j и эти функции связаны формулами

$${}_0 P = \frac{P + (2^r - 2)^{-1} \left\{ -P + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j (P i_j^*) \right\}}{2}, \quad (8)$$

$${}_k P = \frac{i_k (2^r - 2)^{-1} \left\{ -P + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j (P i_j^*) \right\} - P i_k}{2} \quad (9)$$

для всех $k = 1, \dots, 2^r - 1$. Имеем естественное тождество

$${}_k P i_k \otimes {}_k v = {}_k P \otimes {}_k v i_k. \quad (10)$$

С другой стороны,

$$\omega(P \otimes x, Q \otimes y) = \psi_0((DP), Q) \cdot (x | y). \quad (11)$$

Следовательно, для чистых состояний ${}_k ai_k = P_k \otimes {}_k xi_k \in {}_k \mathcal{M}(\check{\mathfrak{g}})i_k$ и $bi_j = Q_j \otimes {}_j yi_j \in {}_j \mathcal{M}(\check{\mathfrak{g}})i_j$ мы получим

$$\omega({}_k P \otimes {}_k xi_k, {}_j Q \otimes {}_j yi_j) = (-1)^{\eta(k,j)+1} \omega({}_j Q \otimes {}_j yi_j, {}_k P \otimes {}_k xi_k), \quad (12)$$

так как форма $(x \mid y)$ симметрична на ${}_0 \mathfrak{g}(A)$ и, следовательно, на ${}_0 \check{\mathfrak{g}}$ и лево- $\mathcal{A}_r$ -линейна по левому аргументу и право- $\mathcal{A}_r$ -линейна по правому аргументу.

В то же время мы имеем тождества

$$\begin{aligned} & \text{Res}(z_0, (({}_k P {}_j Q)' \cdot 1)_s R) + \text{Res}(z_0, ({}_j Q {}_s R)' \cdot 1)_k P + \text{Res}(z_0, ({}_s R {}_k P)' \cdot 1)_j Q = \\ & = 2 \left(\text{Res}(z_0, (({}_k P)' \cdot 1)_j {}_s R) + \text{Res}(z_0, {}_k P (({}_j Q)' \cdot 1)_s R) + \right. \\ & \left. + \text{Res}(z_0, {}_k P {}_j Q (({}_s R)' \cdot 1)) \right) = 2 \text{Res}(z_0, ({}_k P {}_j Q {}_s R)' \cdot 1) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

и для чистых состояний ${}_k ai_k = {}_k P \otimes {}_k xi_k$, ${}_j bi_j = {}_j Q \otimes {}_j yi_j$, ${}_s ci_s = {}_s R \otimes {}_s zi_s$ выводим, принимая в расчёт теорему 2.21, свойства 1)–5) определения 2.18 и тождество (13), что

$$\begin{aligned} & \omega(z_0; [{}_k ai_k, {}_j bi_j], {}_s ci_s) + (-1)^{\xi(k,j,s)} \omega(z_0; [{}_j bi_j, {}_s ci_s], {}_k ai_k) + \\ & + (-1)^{\xi(k,j,s)+\xi(j,s,k)} \omega(z_0; [{}_s ci_s, {}_k ai_k], {}_j bi_j) = \\ & = \text{Res}(z_0, (D({}_k P {}_j Q))_s R) \cdot ([{}_k xi_k, {}_j yi_j] \mid {}_s zi_s) + \\ & + (-1)^{\xi(k,j,s)} \text{Res}(z_0, (D({}_j Q {}_s R))_k P) \cdot ([{}_j yi_j, {}_s zi_s] \mid {}_k xi_k) + \\ & + (-1)^{\xi(k,j,s)+\xi(j,s,k)} \text{Res}(z_0, (D({}_s R {}_k P))_j Q) \cdot ([{}_s zi_s, {}_k xi_k] \mid {}_j yi_j) = \\ & = 2 \text{Res}(z_0, D({}_k P {}_j Q {}_s R)) \cdot ([{}_k xi_k, {}_j yi_j] \mid {}_s zi_s) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Формулы (12) и (14) означают, что ω — градуированный 2-коцикл над алгеброй Кэли–Диксона $\mathcal{A}_r$. $\square$

4.8. Определение. Положим $\check{\mathcal{M}}(\check{\mathfrak{g}}) := \mathcal{M}(\check{\mathfrak{g}}) \oplus F(W, \mathcal{A}_r)K$ и определим умножение

$$[a \oplus \alpha(z_0)K, b \oplus \beta(z_0)K] := [a, b]_0 + \omega(z_0; a, b)K \quad (1)$$

для любых $a, b \in \mathcal{L}(\check{\mathfrak{g}})$, $\alpha, \beta \in F(W, \mathcal{A}_r)$, $z_0 \in W$, где K — дополнительный генератор, $F(W, \mathcal{A}_r)$ обозначает $\mathcal{A}_r$ -квазивекторное пространство всех функций $\alpha, \beta: W \rightarrow \mathcal{A}_r$.

Введём оператор $d_l P(z) := -(dP(z)/dz) \cdot z^{l+1}$ для любых $P \in \mathcal{M}(V, W)$ и $z \in V \setminus W$, положим $d_l K := 0$, $d_l(P \otimes x) = d_l(P) \otimes x$, где $l \in \mathbb{Z}$.

Определим новую квазиалгебру $\hat{\mathcal{M}}(\check{\mathfrak{g}}) = \mathcal{M}(\check{\mathfrak{g}}) \oplus \mathcal{A}_r d$ с дифференцированием $dP(z) := (dP(z)/dz) \cdot z = -d_0 P(z)$ для любых $z \in U \setminus \{0\}$, $P \in \mathcal{M}(U)$ и положим $dK := 0$. В качестве умножения рассмотрим

$$\begin{aligned} & [{}_k P \otimes {}_k xi_k \oplus \alpha i_k K \oplus e i_k d, {}_j Q \otimes {}_j yi_j \oplus \beta i_j K \oplus t i_j d] := \\ & := ({}_k P {}_j Q \otimes [{}_k xi_k, {}_j yi_j] \oplus e i_k (d {}_j Q) \otimes {}_j yi_j - \\ & - (-1)^{\eta(k,j)} t i_j (d {}_k P) \otimes {}_k xi_k) \oplus \omega(z_0; {}_k P \otimes {}_k xi_k, {}_j Q \otimes {}_j yi_j) \end{aligned} \quad (2)$$

для чистых состояний ${}_k P \otimes x i_k \oplus \alpha i_k K \oplus e i_k d \in {}_k \hat{\mathcal{M}}(\check{\mathfrak{g}}) i_k$ и ${}_j Q \otimes y i_j \oplus \beta i_j K \oplus t i_j d \in {}_j \hat{\mathcal{M}}(\check{\mathfrak{g}}) i_j$, где $\alpha(W) \subset \mathbb{R}$, $\beta(W) \subset \mathbb{R}$, $e, t \in \mathbb{R}$. Продолжим это умножение на все элементы из $\hat{\mathcal{M}}(\check{\mathfrak{g}})$ по $\mathbb{R}$ -билинейности (см. формулы (1)).

4.9. Следствие. Множество $\check{\mathcal{M}}(\check{\mathfrak{g}})$ является лиевой квазиалгеброй над $\mathcal{A}_r$.

Доказательство. По построению $\check{\mathcal{M}}(\check{\mathfrak{g}})$ есть $\mathcal{A}_r$ -квазивекторное пространство. Поскольку $\mathcal{M}(\check{\mathfrak{g}})$ — лиева квазиалгебра и ω удовлетворяет условиям (12), (14) (см. доказательство предложения 4.7), умножение в $\check{\mathcal{M}}(\check{\mathfrak{g}})$, определённое формулой (1) определения 4.8, удовлетворяет тождествам (1), (2) замечания 4.2 и (1) предложения 4.3. $\square$

4.10. Предложение. Оператор d_l из определения 4.8 является дифференцированием квазиалгебры $\check{\mathcal{M}}(\check{\mathfrak{g}})$.

Доказательство. Из определения d_l мы получаем

$$\begin{aligned} d_l([P \otimes x, Q \otimes y]_0) &= d_l(PQ \otimes [x, y]) = (d_l(PQ)) \otimes [x, y] = \\ &= - \left\{ \left(\left(\frac{dP(z)}{dz} \right) \cdot z^{l+1} \right) Q + P \left(\left(\frac{dQ(z)}{dz} \right) \cdot z^{l+1} \right) \right\} \otimes [x, y] = \\ &= ((d_l P)Q + P(d_l Q)) \otimes [x, y] = [(d_l P) \otimes x, Q \otimes y]_0 + [P \otimes x, (d_l Q) \otimes y]_0. \end{aligned} \quad (1)$$

По биаддитивности

$$d_l[a, b]_0 = [d_l a, b]_0 + [a, d_l b]_0, \quad (2)$$

следовательно,

$$d_l[a + \alpha K, b + \beta K] = [d_l a, b]_0 + [a, d_l b]_0$$

для всех $a, b \in \check{\mathcal{M}}(\check{\mathfrak{g}})$, $\alpha, \beta \in F(W, \mathcal{A}_r)$. С другой стороны,

$$[d_l a, b] = [d_l a, b]_0 + \omega(d_l a, b)K.$$

Поскольку

$$\text{Res}(z_0, (d_0 d_l P)Q) + \text{Res}(z_0, (d_l P)(d_0 Q)) = \text{Res}(z_0, d_0((d_l P)Q)) = 0$$

и симметрично

$$\text{Res}(z_0, P d_0 d_l Q) + \text{Res}(z_0, (d_0 P)(d_l Q)) = \text{Res}(z_0, d_0(P d_l Q)) = 0,$$

то

$$\begin{aligned} & \left(\text{Res}(z_0, (d_0 d_l P)Q) + \text{Res}(z_0, (d_l P)(d_0 Q)) \right) \cdot (x | y) = \\ & = \left(-\text{Res}(z_0, (d_l P)(d_0 Q)) + \text{Res}(z_0, (d_l P)(d_0 Q)) \right) \cdot (x | y) = 0, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\omega(d_l a, b) + \omega(a, d_l b) = 0 \quad (3)$$

для любых $a = P \otimes x$ и $b = Q \otimes y$. Используя $\mathbb{R}$ -линейность оператора $\text{Res}(z_0, (d_0 P)Q) \cdot (x | y)$ по P, Q, x, y и равенства (1)–(3), мы завершаем доказательство данного предложения. $\square$

4.11. Предложение. Коммутатор дифференцирований d_k и d_j на квазипространстве $\mathcal{M}(V, W)$ задаётся формулой $[d_k, d_j] = (k - j)d_{j+k}$.

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned} d_k d_j P Q &= d_k ((d_j P) Q + P d_j Q) = \\ &= (d_k d_j P) Q + (d_j P)(d_k Q) + (d_k P)(d_j Q) + P(d_k d_j Q), \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} [d_k, d_j] P Q &= (d_k d_j - d_j d_k) P Q = \\ &= ([d_k, d_j] P) Q + (d_j P)(d_k Q) - (d_k P)(d_j Q) + (d_k P)(d_j Q) - \\ &\quad - (d_j P)(d_k Q) + P([d_k, d_j] Q) = ([d_k, d_j] P) Q + P([d_k, d_j] Q). \end{aligned}$$

Для любого члена αz^l с константой $\alpha \in \mathcal{A}_r$

$$[d_k, d_j] \alpha z^l = l(j + l) \alpha z^{j+l+k} - l(k + l) \alpha z^{k+l+j} = (j - k) l \alpha z^{j+l+k} = (k - j) d_{j+k} \alpha z^l$$

на $V \setminus W$ для любых $l \in \mathbb{Z}$. Мы также имеем

$$\begin{aligned} d_j \{ \alpha_{m_1, j} z^{m_1} \cdots \alpha_{m_p, j} z^{m_p} \}_{q(2p)} &= \\ &= \sum_{s=1}^p \{ \alpha_{m_1, j} z^{m_1} \cdots \alpha_{m_{s-1}, j} z^{m_{s-1}} (\alpha_{m_s, j} d_l z^{m_s}) \alpha_{m_{s+1}, j} z^{m_{s+1}} \cdots \alpha_{m_p, j} z^{m_p} \}_{q(2p)}. \end{aligned}$$

В силу некоммутативного аналога теоремы Стоуна—Вейерштрасса (см. § 2 в [21, 26]) для каждого компактного канонического замкнутого подмножества J в $V \setminus W$ множество полиномов над $\mathcal{A}_r$ плотно в множестве непрерывных $\mathcal{A}_r$ -значных функций на J . Для любых z -(супер)дифференцируемых функций f на J существует последовательность полиномов f_n , сходящаяся к f на J , для которой последовательность f'_n сходится к f' равномерно на $J \times \{h \in \mathcal{A}_r : |h| \leq 1\}$. Применяя выведенные выше тождества $[d_k, d_j] P Q = ([d_k, d_j] P) Q + P([d_k, d_j] Q)$ и $[d_k, d_j] \alpha z^l = (k - j) d_{j+k} \alpha z^l$ к упорядоченным произведениям членов $\alpha_{m_k, j} z^{m_k}$ с ассоциаторами $q(2p)$, где $\alpha_{m_k, j}$ — константы Кэли—Диксона, $p \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{Z}$, мы получим, что

$$[d_k, d_j] f = (k - j) d_{k+j} f$$

для любых $f \in \mathcal{M}(V, W)$ на области $V \setminus W$. $\square$

4.12. Замечание. Из определения операторов d_j вытекает, что

$$[p\beta d_j, d_k] = [p d_j, \beta d_k] = p\beta [d_j, d_k] \quad (1)$$

для всех вещественных чисел p и чисел Кэли—Диксона β . Конечно,

$$[\alpha d_s + \beta d_j, d_k] = [\alpha d_s, d_k] + [\beta d_j, d_k], \quad [d_k, \alpha d_s + \beta d_j] = [d_k, \alpha d_s] + [d_k, \beta d_j] \quad (2)$$

для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_r$. Мы определим квазиалгебру $\mathfrak{d} := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_r d_j$ векторных полей на $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$. Рассмотрим некоммутативный аналог алгебры Вирасоро

$\mathcal{V}_r := \mathcal{D} \oplus \mathcal{A}_r c$, где c обозначает дополнительный генератор, с умножением

$$[d_j + sc, d_k + tc] = (j - k)d_{j+k} + \left[\frac{(j^3 - j)\delta_{j,-k}}{12} \right] c, \quad (3)$$

где $s, t \in \mathcal{A}_r$. Тогда можно определить полупрямое произведение $\mathcal{V}_r \otimes^s \check{\mathcal{M}}(\check{\mathfrak{g}})$ с умножением, задаваемым формулами (1)–(3), равенством (1) определения 4.8 и равенством $[c, \check{\mathcal{M}}(\check{\mathfrak{g}})] = 0$. Эта квазиалгебра может быть полезной к квантовой теории поля над октонионами, которые всё шире применяются в физике в последнее время.

Литература

- [1] Бахтурин Ю. А. Основные структуры современной алгебры. — М.: Наука, 1990.
- [2] Гамильтон У. Р. Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. — М.: Наука, 1994.
- [3] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.
- [4] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973.
- [5] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987.
- [6] Лютковский С. В. Нормальные семейства функций и группы псевдоконформных диффеоморфизмов кватернионных и октонионных переменных // СМФН. — 2006. — Т. 18. — С. 101–164.
- [7] Менский М. Б. Группы путей. Измерения. Поля. Частицы. — М.: Наука, 1983.
- [8] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1–3. — М.: Наука, 1966.
- [9] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.
- [10] Baez J. C. The octonions // Bull. Amer. Math. Soc. — 2002. — Vol. 39, no. 2. — P. 145–205.
- [11] Bartocci C., Bruzzo U., Hernández-Ruipérez D. The Geometry of Supermanifolds. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1991.
- [12] Dickson L. E. The Collected Mathematical Papers. Vols. 1–5. — New York: Chelsea, 1975.
- [13] Emch G. Méchanique quantique quaternionnienne et relativité restreinte // Helv. Phys. Acta. — 1963. — Vol. 36. — P. 739–788.
- [14] Goto M., Grosshans F. D. Semisimple Lie Algebras. — New York: Marcel Dekker, 1978.
- [15] Harvey F. R. Spinors and Calibrations. — Boston: Academic Press, 1990. — (Perspectives in Math.; Vol. 9).
- [16] Кас В. G. Infinite-Dimensional Lie Algebras. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
- [17] Kantor I. L., Solodovnikov A. S. Hypercomplex Numbers. — Berlin: Springer, 1989.
- [18] Lawson H. B., Michelson M.-L. Spin Geometry. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1989.

- [19] Ludkovsky S. V. Poisson measures for topological groups and their representations // Southeast Asian Bull. Math. — 2002. — Vol. 25. — P. 653–680.
- [20] Ludkovsky S. V. Generalized geometric loop groups of complex manifolds, Gaussian quasi-invariant measures on them and their representations // J. Math. Sci. — 2004. — Vol. 122, no. 1. — P. 2984–3011.
- [21] Ludkovsky S. V. Differentiable functions of Cayley–Dickson numbers and line integration // J. Math. Sci. — 2007. — Vol. 141, no. 3. — P. 1231–1298.
- [22] Ludkovsky S. V. Geometric loop groups and diffeomorphism groups of manifolds, stochastic processes on them, associated unitary representations // Focus on Groups Theory Research. — New York: Nova Science Publishers, 2006. — P. 59–136.
- [23] Ludkovsky S. V. Functions of several Cayley–Dickson variables and manifolds over them // J. Math. Sci. — 2007. — Vol. 141, no. 3. — P. 1299–1330.
- [24] Ludkovsky S. V. Stochastic processes on geometric loop groups and diffeomorphism groups of connected manifolds, associated unitary representations // J. Math. Sci. — 2007. — Vol. 141, no. 3. — P. 1331–1384.
- [25] Ludkovsky S. V. Quasi-conformal functions of quaternion and octonion variables, their integral transformations // Far East J. Math. Sci. — 2008. — Vol. 28, no. 1. — P. 37–88.
- [26] Ludkovsky S. V., van Oystaeyen F. Differentiable functions of quaternion variables // Bull. Sci. Math. Ser. 2. — 2003. — Vol. 127. — P. 755–796.
- [27] Ward J. P. Quaternions and Cayley Numbers. — Dordrecht: Kluwer, 1997. — (Math. Its Appl.; Vol. 403).

