Конечные разрешимые группы, силовские p-подгруппы которых либо бициклические, либо имеют порядок p^3

В. С. МОНАХОВ
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: monakhov@gsu.by

А. А. ТРОФИМУК
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: trofim08@yandex.ru

УДК 512.542

Ключевые слова: бициклическая группа, производная длина, A_4-свободная группа, дисперсивная группа, дисперсивная по Оре группа.

Аннотация

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Основным результатом данной работы является следующая теорема. Пусть G — разрешимая группа, у которой для каждого $p \in \pi(G)$ силовские p-подгруппы либо бициклические, либо порядка p^3. Тогда производная длина группы G не превышает 6. В частности, если G — A_4-свободная группа, то справедливы следующие утверждения: 1) G — дисперсивная группа; 2) если никакое простое $q \in \pi(G)$ не делит p^2+p+1 ни для какого простого $p \in \pi(G)$, то G — дисперсивная по Оре группа; 3) производная длина группы G не превышает 4.

Abstract

V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk, Finite solvable groups in which the Sylow p-subgroups are either bicyclic or of order p^3, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 2, pp. 121—131.

All groups considered in this paper will be finite. Our main result here is the following theorem. Let G be a solvable group in which the Sylow p-subgroups are either bicyclic or of order p^3 for any $p \in \pi(G)$. Then the derived length of G is at most 6. In particular, if G is an A_4-free group, then the following statements are true: (1) G is a dispersive group; (2) if no prime $q \in \pi(G)$ divides $p^2 + p + 1$ for any prime $p \in \pi(G)$, then G is Ore dispersive; (3) the derived length of G is at most 4.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Согласно теореме Цассенхауза [10, теорема IV.2.11] коммутант группы с циклическими силовскими подгруппами является циклической холловой подгруппой, фактор-группа по которой также циклическая. В частности, её производная длина не выше 2.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 2, с. 121—131.

Бициклической называют группу $G = AB$, факторизуемую циклическими подгруппами A и B. Инварианты конечных разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами получены в [5]. В частности, установлено, что производная длина таких групп не превышает 6, а нильпотентная длина не превышает 4.

Метациклическая группа — это группа, которая содержит нормальную циклическую подгруппу, фактор-группа по которой также циклическая. Ясно, что метациклическая группа всегда является бициклической. Обратное утверждение верно для примарных групп нечётного порядка и неверно для бициклических 2-групп [10, теорема III.11.5].

В настоящей заметке исследуется строение групп, у которых для любого $p \in \pi(G)$ силовские p-подгруппы либо бициклические, либо порядка p^3. Из [10, теорема I.14.10] следует, что группа порядка p^3 либо бициклическая, либо элементарная абелева, либо неабелева экспоненты p. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — разрешимая группа, у которой для каждого $p \in \pi(G)$ силовские p-подгруппы либо бициклические, либо порядка p^3. Тогда производная длина группы G не превышает 6. В частности, если G — A_4-свободная группа, то справедливы следующие утверждения*:

1) *G — дисперсивная группа*;
2) *если никакое простое $q \in \pi(G)$ не делит $p^2 + p + 1$ ни для каких простых $p \in \pi(G)$, то G — дисперсивная по Оре группа*;
3) *производная длина группы G не превышает 4.*

Следствие. *Пусть G — группа нечётного порядка, у которой для каждого $p \in \pi(G)$ силовская p-подгруппа либо бициклическая, либо порядка p^3. Тогда производная длина группы G не превышает 3.*

Группа G называется A_4-свободной, если она не содержит секций, изоморфных знакопеременной группе A_4. В данной работе запись $G = [A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A. Через $d(G)$ обозначим производную длину разрешимой группы G. Другие обозначения и определения соответствуют принятым в [4]. В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций, подробную информацию о которых можно найти в [4, 7].

Пример 1. Зафиксируем простые числа $p = 5$ и $q = 3$. Тогда показатель числа 5 по модулю 3 равен 2 и существует группа Шмидта $G = [P]Q$, такая что P неабелева порядка 5^3, а Q — циклическая подгруппа порядка 3 (см. [2, теорема 1.3]). Так как P неабелева, то $Z(P) = P' = \Phi(P)$. Из свойств групп Шмидта следует, что $G' = P$. Поэтому $\big((G')'\big)' = (P')' = \big(Z(P)\big)' = 1$ и $d(G) = 3$. Следовательно, оценка производной длины, полученная в теореме, является точной. Кроме того, данная группа является дисперсивной по Оре.

Пример 2. Зафиксируем простые числа $p = 5$ и $q = 31$. Тогда показатель числа 5 по модулю 31 равен 3 и существует группа Шмидта $G = [P]Q$, такая что P абелева порядка 5^3, а Q — циклическая подгруппа порядка 31 (см. [2, теорема 1.3]). Данная группа не является дисперсивной по Оре.

Пример 3. Возможности системы Gap [1] позволили найти A_4-свободные группы $(216, 87)$ и $(216, 88)$, удовлетворяющие условию теоремы. Они имеют производную длину 4. Запись (n_1, n_2) означает группу из библиотеки SmallGroups, где n_1 — её порядок, n_2 — номер в списке групп порядка n_1. Группа $(216, 87)$ имеет строение $\big[[\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3]\mathbb{Z}_3\big]\mathrm{Q}_8$, а группа $(216, 88)$ — $\Big[\big[[\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3]\mathbb{Z}_3\big]\mathbb{Z}_4\Big]\mathbb{Z}_2$, где Q_8 — группа кватернионов порядка 8, а $\mathbb{Z}_n$ — циклическая группа порядка n. Таким образом, оценка производной длины A_4-свободной группы является точной. Кроме того, данные группы являются дисперсивными по Оре.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 [5, лемма 1]. *Пусть P — бициклическая p-группа и N — её дополняемая нормальная подгруппа. Тогда*

1) *если $p = 2$, то $|N/\Phi(N)| \leqslant 4$;*
2) *если $p > 2$, то либо $N = P$, либо подгруппа N циклическая.*

Напомним, что E_4 — элементарная абелева группа порядка 4.

Лемма 2. *Если G — разрешимая группа и $F(G) = \mathrm{E}_4 \neq G$, то $G \simeq \mathrm{A}_4$ или $G \simeq S_4$.*

Доказательство. Так как $F(G)$ — абелева группа, то $F(G) \leqslant C_G\big(F(G)\big)$. Согласно [4, теорема 4.22] $C_G\big(F(G)\big) \leqslant F(G)$. Поэтому $F(G) = C_G\big(F(G)\big)$. Так как $\mathrm{Aut}\big(F(G)\big) \simeq \mathrm{GL}(2,2) \simeq \mathrm{S}_3$, то либо $G/F(G) \simeq \mathbb{Z}_3$, либо $G/F(G) \simeq \mathrm{S}_3$. Если $G/F(G) \simeq \mathbb{Z}_3$, то $G \simeq \mathrm{A}_4$. Если $G/F(G) \simeq \mathrm{S}_3$, то $G \simeq \mathrm{S}_4$. □

Лемма 3 [9, теорема 5.4.1]. *Пусть P — циклическая группа порядка p^n и $A = \mathrm{Aut}(P)$. Тогда $|A| = p^{n-1}(p-1)$ и A абелева с циклической подгруппой порядка $p - 1$.*

Лемма 4. *Пусть G — p-разрешимая группа, силовская p-подгруппа которой либо бициклическая, либо порядка p^3. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $p = 2$, то фактор-группа $G/\mathrm{O}_{2',2}(G)$ либо имеет нечётный порядок, либо изоморфна S_3. В частности, $l_2(G) \leqslant 2$.*
2. *Если $p = 3$, то фактор-группа $G/\mathrm{O}_{3',3}(G)$ либо $3'$-группа, либо изоморфна $\mathrm{SL}(2,3)$. В частности, если силовская 3-подгруппа бициклическая, то $l_3(G) \leqslant 1$.*
3. *Если $p > 3$, то $l_p(G) \leqslant 1$.*

В частности, если G — A_4-свободная группа, то $l_p(G) \leqslant 1$ для любого $p \in \pi(G)$.

Доказательство. По индукции, учитывая [10, лемма VI.6.9], можно считать, что $\mathrm{O}_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Поэтому подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ будет элементарной абелевой p-подгруппой и $C_G(F) = F$ по [4, леммы 4.21, 4.22]. Теперь фактор-группа G/F изоморфна некоторой подгруппе группы автоморфизмов группы F. Так как $F = \mathrm{O}_p(G)$, то $\mathrm{O}_p(G/F) = 1$.

Если F — силовская p-подгруппа, то $l_p(G) = 1$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что F не является силовской p-подгруппой группы G.

Пусть G_p — бициклическая подгруппа. Тогда по [4, теорема 4.23] подгруппа F является нормальной дополняемой подгруппой группы G_p. Из леммы 1 следует, что при $p = 2$ порядок подгруппы F не превышает 4, а при $p > 2$ подгруппа F циклическая. Очевидно, что во втором случае группа $\mathrm{Aut}(F)$ абелева порядка $p-1$ по лемме 3. Тогда G/F — p'-группа и F — силовская p-подгруппа группы G. Противоречие. Если $p = 2$ и $|F| = 2$, то $\mathrm{Aut}(F) = 1$ и F — силовская 2-подгруппа группы G. Противоречие. Если $p = 2$ и $|F| = 4$, то по [4, теорема 2.50] $G/F \simeq \mathrm{Aut}(F) = \mathrm{GL}(2,2) \simeq \mathrm{S}_3$ и $l_2(G) \leqslant 2$.

Предположим, что G_p — небициклическая подгруппа, тогда G_p имеет порядок p^3 и экспоненту p. Так как $F < G_p$, то $|F| = p$ или $|F| = p^2$. Если $|F| = p$, то G/F — p'-группа и F — силовская p-подгруппа группы G. Противоречие. Поэтому F — элементарная абелева подгруппа порядка p^2, $F = C_G(F)$ и G/F изоморфна pd-подгруппе H группы $\mathrm{Aut}(F) = \mathrm{GL}(2,p)$, для которой $\mathrm{O}_p(H) = 1$.

Если $p = 2$, то $\mathrm{GL}(2,2) \simeq \mathrm{S}_3$, и утверждение 1 доказано.

Пусть $p = 3$. Тогда G/F изоморфна $3d$-подгруппе H группы $\mathrm{GL}(2,3)$, для которой $\mathrm{O}_3(H) = 1$. Из строения группы $\mathrm{GL}(2,3)$ следует, что $H \in \{\mathrm{SL}(2,3), \mathrm{GL}(2,3)\}$. Так как силовская 2-подгруппа в группе $\mathrm{GL}(2,3)$ имеет порядок 16 и не является бициклической, то $H \simeq \mathrm{SL}(2,3)$. Поэтому $l_3(G) \leqslant 2$.

Далее считаем, что $p > 3$. Пусть P_1 и P_2 — различные силовские p-подгруппы группы G. Предположим, что подгруппа $\langle P_1, P_2\rangle$, порождённая ими, является собственной подгруппой группы G. Тогда по индукции $l_p(\langle P_1, P_2\rangle) \leqslant 1$. Так как $\mathrm{O}_{p'}(\langle P_1, P_2\rangle) \subseteq C_G(F) = F$, то $\mathrm{O}_{p'}(\langle P_1, P_2\rangle) = 1$ и P_1 нормальна в $\langle P_1, P_2\rangle$. Поэтому $P_1 = P_2$, противоречие. Следовательно, $\langle P_1, P_2\rangle = G$, а по [11, теорема 8.6.7] фактор-группа G/F изоморфна подгруппе группы $\mathrm{SL}(2,p)$. Подгруппа Фиттинга $F(G/F)$ является p'-подгруппой, и $[F(G/F), PF/F] \neq 1$. По [11, теорема 8.6.12] это возможно лишь в случае $p = 3$.

Пусть теперь группа G — A_4-свободная группа. Предположим, что $l_p(G) > 1$. Тогда из утверждений 1—3 следует, что $p \in \{2,3\}$ и $G/\mathrm{O}_{2',2}(G) \simeq \mathrm{S}_3$ при $p = 2$ или $G/\mathrm{O}_{3',3}(G) \simeq \mathrm{SL}(2,3)$ при $p = 3$. Так как группа $\mathrm{SL}(2,3)$ содержит знакопеременную группу A_4 в качестве подгруппы, то в последнем случае получаем противоречие с A_4-свободностью. Поэтому утверждение надо доказать при $p = 2$. Применяя индукцию по порядку группы G, по [10, лемма VI.6.9] можно считать, что $\mathrm{O}_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, значит, $G/\mathrm{O}_2(G) \simeq \mathrm{S}_3$.

Если силовская 2-подгруппа G_2 бициклическая, то $\mathrm{O}_2(G)$ дополняема в G_2, и по лемме 1 $|\mathrm{O}_2(G)| = 2$ или $|\mathrm{O}_2(G)| = 4$. Если G_2 небициклическая, то $|G_2| = 8$, и порядок $\mathrm{O}_2(G)$ равен 4.

Пусть $\mathrm{O}_2(G)$ — циклическая группа порядка 2 или 4. Тогда подгруппа Фиттинга группы G является циклической, и значит, G сверхразрешима по [4, лемма 4.46]. По [4, теорема 4.52] группа G метанильпотентна, и $l_p(G) \leqslant 1$ для всех

$p \in \pi(G)$ по [5, лемма 5]. Предположим, что $F(G) = \mathrm{O}_2(G)$ — элементарная абелева группа порядка 4. Тогда по лемме 2 группа G изоморфна либо A_4, либо S_4, и G не A_4-свободна. Противоречие. Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть H — неприводимая подгруппа нечётного порядка группы* $\mathrm{GL}(n,p)$. *Тогда*

1) *если $n = 2$, то подгруппа H циклическая и $|H|$ делит $p^2 - 1$;*
2) *если $n = 3$, то подгруппа H метабелева.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из [10, лемма VI.8.1], второе — из [12, теорема 4B]. □

Лемма 6 ([8, теорема 3.4]). *Пусть G — подгруппа группы* $\mathrm{GL}(2,q)$. *Тогда возможны следующие случаи*:

1) *подгруппа G циклическая*;
2) *$G = QM$, где Q — подгруппа p-группы $\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{smallmatrix}\right) | \, \tau \in GF(q)\}$ и $M \subseteq N_G(Q)$ — подгруппа группы D всех диагональных матриц*;
3) *$G = \{Z_u, S\}$, где u делит $q^2 - 1$, $S\colon Y \to Y^q$, для всех $Y \in Z_u$ и S^2 — скалярный 2-элемент в Z_u*;
4) *$G = \{M, S\}$, где $M \subseteq D$ и $|G : M| = 2$*;
5) *$G = \{\mathrm{SL}(2,p^\beta), V\}$, где V — скалярная матрица*;
6) *$G/\{-I\}$ изоморфна $\mathrm{S}_4 \times Z_u$, $\mathrm{A}_4 \times Z_u$ или $\mathrm{A}_5 \times Z_u$, если $p \neq 5$, где Z_u — скалярная подгруппа $\mathrm{GL}(2,q)/\{-I\}$*;
7) *G не является группой из пункта 6), но $G/\{-I\}$ содержит $\mathrm{A}_4 \times Z_u$ как подгруппу индекса 2, A_4 — подгруппа с циклической фактор-группой, Z_u — группа как в пункте 6), где u — чётное число.*

Лемма 7. *Пусть H — A_4-свободная p'-подгруппа группы* $\mathrm{GL}(2,p)$. *Тогда H метабелева.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся леммой 6. Так как подгруппа H A_4-свободна, она не может быть группой из пунктов 5)—7). Очевидно, что H — абелева группа, если она из пункта 1). Подгруппа H не может быть группой из пункта 2), так как её порядок не делится на простое число p. Учитывая, что группа всех диагональных матриц является абелевой, получим, что в случаях 3), 4) группа H имеет нормальную абелеву подгруппу, фактор-группа по которой также абелева. Поэтому в общем случае H метабелева. □

Лемма 8. *Если H — A_4-свободная разрешимая неприводимая подгруппа группы* $\mathrm{GL}(3,p)$, *то $d(H) \leqslant 3$.*

Доказательство. Заключим H в максимальную разрешимую подгруппу M группы $\mathrm{GL}(3,p)$. Очевидно, M — неприводимая подгруппа. По теореме Д. А. Супруненко [6, с. 234] возможны три случая: группа M импримитивна; группа M примитивна и её максимальная нормальная подгруппа F изоморфна мультипликативной группе поля $GF(p^3)$; группа M примитивна и $F = GF(p)^*\mathrm{E}_3$ — её максимальная абелева нормальная подгруппа.

Предположим, что группа M импримитивна. Тогда она мономиальна и согласно [6, теорема 18.5] является сопряжённой в $\mathrm{GL}(3,p)$ сплетению $GF(p)^* \wr \mathrm{S}_3$, где S_3 — симметрическая группа порядка 6 (см. [6, с. 234]). Кроме того, группа M состоит из линейных преобразований пространства $V = V\big(3, GF(p)\big)$, таких что $g(v_i) = \lambda_i v_{i_1}$, где $\{v_1, v_2, v_3\}$ — базис V. По [10, теорема II.7.2] преобразования d, для которых $d(v_i) = \lambda_i v_i$, образуют абелеву подгруппу D порядка $(p-1)^3$, нормальную в M, и $M/D \simeq \mathrm{S}_3$. Поэтому $d(M) \leqslant 3$ и $d(H) \leqslant 3$.

Пусть M примитивна и её максимальная абелева нормальная подгруппа F изоморфна мультипликативной группе поля $GF(p^3)$. Группа F циклическая, и $|F| = p^3 - 1$. По [6, теорема 21.1] $|M| = 3(p^3-1)$, $d(M) \leqslant 2$ и $d(H) \leqslant 2$.

Пусть M примитивна и $F = GF(p)^*\mathrm{E}_3$ — её максимальная абелева нормальная подгруппа. Подгруппа F состоит из скалярных матриц [6, с. 235, формула (13)], поэтому F содержится в центре M. В M существует нормальная подгруппа A, такая что A содержит F и A/F изоморфна элементарной абелевой группе порядка 9, а M/A изоморфна симметрической группе степени 4 [6, с. 234, формулы (13) и (14)]. Таким образом, группа M обладает нормальным рядом

$$1 < F < A < M, \quad \text{где} \quad F \subseteq Z(M), \quad A/F \simeq \mathrm{E}_9, \quad M/A \simeq \mathrm{S}_4.$$

Для подгруппы H получаем ряд

$$1 \leqslant F\cap H \leqslant A\cap H \leqslant H, \quad F\cap H \leqslant Z(H), \quad H/F\cap H \simeq HF/F \leqslant M/F.$$

Так как H — A_4-свободная подгруппа, то HF/F — A_4-свободная подгруппа группы M/F, являющаяся расширением элементарной абелевой группы порядка 9 с помощью S_4. Отсюда следует, что $d(H) \leqslant 3$. Лемма доказана. □

Лемма 9. *Пусть G — p-разрешимая группа и её силовская p-подгруппа бициклическая. Если M — максимальная подгруппа в G и p делит $|G:M|$, то $|G:M| \in \{p, p^2\}$.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G. Можно считать, что $M_G = 1$. В p-разрешимой группе индексы максимальных подгрупп либо не делятся на p, либо являются степенями числа p. Поэтому $|G:M| = p^n$ и $G = MG_p$.

Поскольку $\mathrm{O}_{p'}(G) \subseteq M$ и $M_G = 1$, то $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$ и $F = F(G)$ является p-подгруппой. Так как группа G примитивна, то по [4, теорема 4.41] $G = [F]M$. Для силовской p-подгруппы верно $G_p = [F]M_p$. Тогда $|F| = p$ или $|F| = p^2$ по лемме 1. Лемма доказана. □

Лемма 10. *Пусть в p-разрешимой группе G силовская p-подгруппа либо бициклическая, либо порядка p^3. Если M — максимальная подгруппа в G и простое число p делит $|G:M|$, то $|G:M| \in \{p, p^2, p^3\}$.*

Доказательство. Так как группа G разрешима и M — максимальная подгруппа в G, то $|G:M| = p^n$. Если силовская p-подгруппа в G бициклическая, то $n \leqslant 2$ по лемме 9. Если $|G_p| = p^3$, то, так как p делит $|G:M|$, получаем, что $n \leqslant 3$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы. Сначала докажем, что $d(G) \leqslant 6$. По индукции можно считать, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Поэтому $F = F(G) = \mathrm{O}_p(G) \leqslant G_p$ для некоторого $p \in \pi(G)$ и $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$. Так как G_p — бициклическая группа или $|G_p| = p^3$, то $d(F) \leqslant d(G_p) \leqslant 2$.

Данная группа G удовлетворяет условию леммы 10, и поэтому по [3, следствие 1.1 теоремы 1] $d\big(G/\Phi(G)\big) \leqslant 6$. Если $\Phi(G) = 1$, то $d(G) \leqslant 6$.

Пусть теперь $\Phi(G) \neq 1$. Поскольку группа G разрешима, то по [4, леммы 4.21, 4.22] $\Phi(G) \neq F$ и $F/\Phi(G)$ совпадает со своим централизатором в группе $G/\Phi(G)$. По [4, теорема 4.23] группа $F/\Phi(G)$ дополняема в $G/\Phi(G)$, т. е. существует такая подгруппа $H/\Phi(G)$, что $G/\Phi(G) = [F/\Phi(G)]\big(H/\Phi(G)\big)$. Так как $F/\Phi(G) \leqslant G_p/\Phi(G)$, то $F/\Phi(G)$ дополняема в $G_p/\Phi(G)$.

Поскольку силовская p-подгруппа G_p либо бициклическая, либо $|G_p| = p^3$ и $1 \neq \Phi(G) \leqslant G_p$, то группа $G_p/\Phi(G)$ бициклическая.

Если $p = 2$, то $|F/\Phi(G)| \leqslant 4$ по лемме 1. Тогда фактор-группа $H/\Phi(G) \simeq \mathrm{Aut}\big(F/\Phi(G)\big)$ абелева или изоморфна S_3. Для каждого случая $d(G/F) \leqslant 2$. Поэтому $d(G) \leqslant 4$.

Если $p > 2$, то либо $F/\Phi(G) = G_p/\Phi(G)$ — элементарная абелева подгруппа порядка p или p^2, либо $F/\Phi(G)$ циклическая по лемме 1.

Пусть $F/\Phi(G)$ — элементарная абелева подгруппа порядка p^2. По [4, теорема 4.24] фактор-группа $F/\Phi(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп фактор-группы $G/\Phi(G)$. Если $F/\Phi(G)$ — минимальная нормальная подгруппа фактор-группы $G/\Phi(G)$, то $\big(G/\Phi(G)\big)/\big(F/\Phi(G)\big) \simeq G/F$, и эта фактор-группа изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathrm{GL}(2,p)$. По [5, лемма 3] $d(G/F) \leqslant 4$ и $d(G) \leqslant 6$. Если $\bar{F} = F/\Phi(G)$ является прямым произведением двух минимальных нормальных подгрупп $\bar{F}_1 = F_1/\Phi(G)$ и $\bar{F}_2 = F_2/\Phi(G)$ простых порядков p, то для каждого фактора $\bar{F}_i$ верно, что фактор-группа $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{F}_i)$ абелева. Поэтому группа $\bar{G}/\big(C_{\bar{G}}(\bar{F}_1) \cap C_{\bar{G}}(\bar{F}_2)\big) = \bar{G}/\bar{F}$ абелева и $d(G) \leqslant 3$.

Если $F/\Phi(G)$ — циклическая группа, то фактор-группа $G/F \simeq H/\Phi(G)$ абелева по лемме 3. Тогда $d(G) \leqslant 3$. Таким образом, доказано неравенство $d(G) \leqslant 6$.

Перейдём к доказательству утверждения теоремы для случая, когда группа G является A_4-свободной группой.

1. Покажем, что группа G дисперсивна. По индукции можно считать, что $Z(G) = \Phi(G) = 1$. Поэтому подгруппа $F = F(G)$ абелева и её силовские подгруппы элементарные абелевы (см. [4, теорема 4.24]).

Очевидным является следующий факт: если группа G содержит нормальную силовскую подгруппу G_q для некоторого $q \in \pi(G)$ и фактор-группа G/G_q дисперсивна, то группа G является дисперсивной. Поэтому следует считать, что в группе G нет нормальных силовских подгрупп, т. е. подгруппа Фиттинга F группы G не содержит силовских подгрупп группы G.

Предположим, что F — p-подгруппа группы G для некоторого простого $p \in \pi(G)$. Тогда подгруппа F совпадает с наибольшей нормальной p-подгруппой

$\mathrm{O}_p(G)$ группы G, и $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$. Так как по лемме 4 $l_p(G) \leqslant 1$, то G — p-замкнутая группа. Получили противоречие. Поэтому в дальнейшем считаем, что F — непримарная подгруппа.

Зафиксируем наименьшее простое $p \in \pi(F)$. Тогда F_p — силовская p-подгруппа из F, F_p — элементарная абелева подгруппа и $F_p < G_p$. Так как $Z(G) = 1$, то $C = C_G(F_p)$ — собственная нормальная подгруппа в G. Обозначим через π множество простых делителей фактор-группы G/C.

Согласно [4, теорема 4.23] подгруппа F_p дополняема в G, а значит, и в G_p. Если G_p — бициклическая группа, то по лемме 1 $|F_p| = p$ или $p = 2$ и $|F_p| = 4$. Если G_p не бициклическая, то $|F_p| = p$ или $|F_p| = p^2$. Обобщая, получаем, что $|F_p| = p$ или $|F_p| = p^2$.

Если $|F_p| = p$, то фактор-группа G/C изоморфна подгруппе абелевой группы $\mathrm{Aut}(F_p)$ порядка $p-1$ и $\pi \subseteq \pi(p-1)$. Если $|F_p| = p^2$ и F_p не является минимальной нормальной подгруппой группы G, то $F_p = A \times B$, где $|A| = |B| = p$ и подгруппы A и B нормальны в группе G. Следовательно, G/C изоморфна подгруппе группы $G/C_G(A) \times G/C_G(B)$ и $\pi \subseteq \pi(p-1)$. Если F_p является минимальной нормальной подгруппой группы G, то G/C изоморфна подгруппе группы $\mathrm{GL}(2,p)$. Поэтому $\pi \subseteq \{\pi(p-1) \cup \pi(p+1) \cup p\}$.

Итак, если $p > 2$, то $\pi = \{p \cup \pi(p-1)\}$. Если $p = 2$, то $\pi = \{2,3\}$.

По индукции подгруппа C дисперсивна, поэтому в C существует нормальная силовская q-подгруппа C_q, которая, очевидно, нормальна и в самой группе G. Однако C_q не может быть силовской q-подгруппой группы G.

Так как $C_q \leqslant F$, то $q \geqslant p$. Если $q = p$, то $C_q = F_p$ — силовская подгруппа в C. Поэтому $C = F_p \times C_{p'}$. Ясно, что $1 \neq F_{p'} \leqslant C_{p'}$ и $C_{p'}$ дисперсивна по индукции. Теперь в $C_{p'}$ существует нормальная r-подгруппа C_r. Так как $C_r \subseteq F_{p'}$, то $r > p$. Итак, мы можем выбрать такое простое число q, что $q > p$ и силовская q-подгруппа C_q нормальна в C.

Если $q > 3$, то q не принадлежит множеству π и C_q является силовской q-подгруппой группы G. Противоречие.

Пусть $q = 3$. Тогда $p = 2$. Если группа F_2 циклическая, то G/C — 2-группа, и силовская q-подгруппа из C является силовской в G, противоречие. Значит, F_2 является элементарной абелевой подгруппой порядка 4. Тогда $G/C \simeq \mathrm{S}_3$ и $|G_3 : C_3| = 3$. Рассмотрим подгруппу F_2G_3 группы G и её фактор-группу F_2G_3/C_3. Покажем, что F_2G_3/C_3 не является 3-замкнутой. Предположим противное. Тогда силовская 3-подгруппа G_3/C_3 нормальна в группе F_2G_3/C_3. Поэтому G_3 нормальна в F_2G_3 и $F_2G_3 = F_2 \times G_3$. Значит, G_3 содержится в централизаторе C. Противоречие.

Таким образом, $|\mathrm{O}_3(F_2G_3/C_3)| = 1$ и подгруппа Фиттинга группы F_2G_3/C_3 совпадает с F_2C_3/C_3. Так как $F_2C_3/C_3 \simeq \mathrm{E}_4$, то по лемме 2 $F_2G_3/C_3 \simeq \mathrm{A}_4$. Противоречие с условием.

2. Применим индукцию по порядку группы G. Так как условия теоремы наследуются фактор-группами группы G, то по [4, лемма 4.50(4)] можно считать, что $Z(G) = \Phi(G) = 1$. По пункту 1 группа G дисперсивна, поэтому в ней существует нормальная силовская подгруппа. В случае когда в группе G существует

две минимальные нормальные подгруппы, утверждение теоремы верно по индукции. Предположим, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с некоторой силовской p-подгруппой G_p, и G_p является элементарной абелевой самоцентрализуемой подгруппой. По индукции фактор-группа G/G_p дисперсивна по Оре. Остаётся доказать, что простое число p является наибольшим в $\pi(G)$. По условию силовская p-подгруппа G_p либо бициклическая, либо порядка p^3. Поэтому $|G_p| = p$, $|G_p| = p^2$ или $|G_p| = p^3$.

Если порядок G_p — простое число p, то по лемме 3 фактор-группа G/G_p изоморфна подгруппе циклической группы порядка $p-1$, и значит, p — наибольший простой делитель порядка группы G.

Если $|G_p| = p^2$, то по [4, теорема 2.50] фактор-группа G/G_p изоморфна подгруппе полной линейной группы $\mathrm{GL}(2,p)$. Порядок группы $\mathrm{GL}(2,p)$ равен $p(p-1)^2(p+1)$. Если $p > 2$, то все простые делители порядка G/G_p меньше числа p. Если $p = 2$, то $G/G_2 \simeq Z_3$ и $G \simeq \mathrm{A}_4$ по лемме 2. Противоречие.

Если $|G_p| = p^3$, то по [4, теорема 2.50] фактор-группа G/G_p изоморфна подгруппе полной линейной группы $\mathrm{GL}(3,p)$. Порядок группы $\mathrm{GL}(3,p)$ равен $p^3(p-1)^3(p+1)(p^2+p+1)$. По условию пункта 2) доказываемой теоремы никакие простые делители порядка фактор-группы G/G_p не делят числа p^2+p+1. Поэтому если $p > 2$, то все простые делители порядка фактор-группы G/G_p меньше числа p. Пусть $p = 2$. Тогда G/G_2 изоморфна подгруппе группы $\mathrm{GL}(3,2)$, и поэтому $G/G_2 \simeq Z_3$. Но в этом случае силовская 2-подгруппа не является минимальной нормальной подгруппой. Противоречие.

Таким образом, p — наибольший простой делитель порядка группы G. Значит, дисперсивной по Оре будет и сама группа G.

3. По индукции можно считать, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N.

Поскольку группа G дисперсивна, то существует силовская p-подгруппа G_p, которая является нормальной в группе G, и $N \leqslant \mathrm{O}_p(G) = F(G) = F$. Таким образом, подгруппа Фиттинга F совпадает с подгруппой G_p. Если G_p — бициклическая группа или $|G_p| = p^3$, то $d(F) = d(G_p) \leqslant 2$.

Предположим, что $\Phi(G) = 1$. Тогда по [4, леммы 4.21, 4.22] подгруппа Фиттинга F есть элементарная абелева подгруппа, совпадающая со своим централизатором в группе G. Если G_p — бициклическая группа, то $|F| = p$ или $|F| = p^2$. В противном случае $|F| = p^3$. По [4, теорема 2.8] фактор-группа G/F изоморфна подгруппе группы $\mathrm{Aut}\, F$.

Пусть $|F| = p$. Тогда $G/F \simeq Z_{p-1}$ и $d(G) \leqslant 2$. Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F — p'-подгруппа группы $\mathrm{GL}(2,p)$. По лемме 7 фактор-группа G/F метабелева и $d(G) \leqslant 3$. Предположим, что $|F| = p^3$. Так как $\mathrm{Aut}\, F = \mathrm{GL}(3,p)$, то по лемме 8 $d(G/F) \leqslant 3$. Значит, $d(G) \leqslant 4$.

Пусть теперь $\Phi(G) \neq 1$. Так как группа G разрешима, то по [4, лемма 4.21] $\Phi(G) \neq F$ и $F\bigl(G/\Phi(G)\bigr) = F/\Phi(G)$. Хорошо известно, что в этой ситуации $\Phi(G) = \Phi(F)$ и $F/\Phi(G)$ — элементарная абелева подгруппа, совпадающая со своим централизатором в группе $G/\Phi(G)$. Если G_p бициклическая, то $|F/\Phi(G)| = p$ или $|F/\Phi(G)| = p^2$. Если G_p небициклическая, то $|F/\Phi(G)| = p^2$.

Таким образом, $F/\Phi(G)$ — элементарная абелева группа порядка не выше p^2. Очевидно, $G/\Phi(G)/F/\Phi(G) \simeq G/F$.

Предположим, что $|F/\Phi(G)| = p$. Тогда по лемме 3 $G/F \simeq Z_{p-1}$. Поэтому $d(G) \leqslant 3$. Пусть $|F/\Phi(G)| = p^2$. По [4, теорема 2.50] $\mathrm{Aut}\big(F/\Phi(G)\big) = \mathrm{GL}(2,p)$ и группа G/F изоморфна p'-подгруппе группы $\mathrm{GL}(2,p)$. Тогда по лемме 7 $d(G/F) \leqslant 2$ и $d(G) \leqslant 4$. Теорема доказана. □

Доказательство следствия. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Покажем, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Допустим противное. Пусть N_1 и N_2 — две минимальные нормальные подгруппы группы G. Так как $|G/N_i| < |G|$, $i = 1, 2$, то по предположению индукции $d(G/N_i) \leqslant 3$ и $d(G) \leqslant 3$. Итак, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N.

По пункту 1) теоремы группа G является дисперсивной группой, поэтому существует нормальная силовская подгруппа G_p и $\mathrm{O}_p(G) = G_p$. Так как N — единственная минимальная нормальная подгруппа, то $N \leqslant \mathrm{O}_p(G) = G_p$ и $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$. Таким образом подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ совпадает с силовской подгруппой G_p группы G.

Так как группа G разрешима, то по [4, лемма 4.21] $\Phi(G)$ — собственная подгруппа в G_p и $F\big(G/\Phi(G)\big) = G_p/\Phi(G)$. Хорошо известно, что в этой ситуации $\Phi(G) = \Phi(G_p)$. Если группа G_p бициклическая, то $G_p/\Phi(G)$ — элементарная абелева группа порядка p или p^2. Если G_p небициклическая, то $G_p/\Phi(G)$ — элементарная абелева группа порядка p^2 или p^3. Таким образом, $G_p/\Phi(G)$ — элементарная абелева группа порядка не выше p^3, и $G_p/\Phi(G)$ по [4, теорема 4.24] является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп фактор-группы $G/\Phi(G)$. Если G_p — бициклическая группа или $|G_p| = p^3$, то $d(G_p) \leqslant 2$.

Предположим, что $G_p/\Phi(G)$ — минимальная нормальная подгруппа. Согласно [4, теорема 4.23] существует такая подгруппа $H/\Phi(G)$, что $G/\Phi(G) = [G_p/\Phi(G)]\big(H/\Phi(G)\big)$. Подгруппа $H/\Phi(G)$ действует неприводимо на $G_p/\Phi(G)$. Если $|G_p/\Phi(G)| = p^3$, то $\Phi(G) = 1$ и подгруппа G_p абелева. По лемме 5 $d(H) \leqslant 2$, поэтому $d(G) \leqslant 3$. Если $|G_p/\Phi(G)| = p^2$, то по лемме 5 подгруппа $G/G_p \simeq H/\Phi(G)$ абелева. Значит, $d(G) \leqslant 3$. Если $|G_p/\Phi(G)| = p$, то G/G_p будет циклической группой по лемме 3, и $d(G) \leqslant 3$.

Пусть теперь $G_p/\Phi(G)$ не является минимальной нормальной подгруппой. Тогда фактор-группа $G_p/\Phi(G)$ есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$. Прямые сомножители будут элементарными абелевыми подгруппами порядка p или p^2, и их не более трёх. Пусть $K_i/\Phi(G)$ — прямой сомножитель подгруппы $G_p/\Phi(G)$, $i \leqslant 3$. Если $|K_i/\Phi(G)| = p$, то фактор-группа $\big(G/\Phi(G)\big)/C_{G/\Phi(G)}\big(K_i/\Phi(G)\big)$ абелева. Если $|K_i/\Phi(G)| = p^2$, то по лемме 5 фактор-группа $\big(G/\Phi(G)\big)/C_{G/\Phi(G)}\big(K_i/\Phi(G)\big)$ абелева. По [4, лемма 2.33] фактор-группа

$$\big(G/\Phi(G)\big)/\bigcap_{i\leqslant 3} C_{G/\Phi(G)}\big(K_i/\Phi(G)\big)$$

абелева. Так как

$$\bigcap_{i\leqslant 3} C_{G/\Phi(G)}\big(K_i/\Phi(G)\big) \leqslant C_{G/\Phi(G)}\big(G_p/\Phi(G)\big) = G_p/\Phi(G),$$

то $G/\Phi(G)/G_p/\Phi(G) \simeq G/G_p$ есть абелева группа. Поскольку $d(G_p) \leqslant 2$, то $d(G) \leqslant 3$. Следствие доказано. $\square$

Литература

[1] Коновалов А. Б. Система компьютерной алгебры GAP 4.4. — 2008.

[2] Монахов В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Алгебра і теорія чисел: Праці Укр. мат. конгр. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. — С. 81—90.

[3] Монахов В. С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп // Алгебра и логика. — 2004. — Т. 43, № 4. — С. 411—424.

[4] Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. — Минск: Вышэйшая школа, 2006.

[5] Монахов В. С., Грибовская Е. Е. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп // Мат. заметки. — 2001. — Т. 70, № 4. — С. 603—612.

[6] Супруненко Д. А. Группы матриц. — М.: Наука, 1972.

[7] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978.

[8] Bloom D. The Subgroups of $\mathrm{PSL}(3, q)$ for Odd q. — New York: Brooklyn, 1967.

[9] Gorenstein D. Finite Groups. — New York: Harper and Row, 1968.

[10] Huppert B. Endliche Gruppen. I. — Berlin, 1967.

[11] Kurzweil H., Stellmacher B. The Theory of Finite Groups. — New York: Springer, 2004.

[12] Palfy P. P. Bounds for linear groups of odd order // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. — 1990. — Vol. 39, Suppl. no. 23. — P. 253—263.