О полупростых конечномерных алгебрах Хопфа

Р. Б. МУХАТОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: ruslan.mukhatov@gmail.com

УДК 512.667

Ключевые слова: алгебры Хопфа, проективные представления групп.

Аннотация

В работе находятся условия, при которых конструкция определённого вида является алгеброй Хопфа.

Abstract

R. B. Mukhatov, On semisimple finite-dimensional Hopf algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 2, pp. 133—143.

This paper considers conditions under which the construction of a certain form is a Hopf algebra.

1. Введение

Рассмотрим конечномерную полупростую алгебру Хопфа H над алгебраически замкнутым полем k, такую что $\operatorname{char} k$ и $\dim H$ взаимно просты. Пусть H как алгебра имеет только одно неприводимое представление размерности $n > 1$. Обозначим через G группу групповых элементов дуальной алгебры Хопфа H^*. Тогда H имеет полупростое разложение

$$H = \bigoplus_{g \in G} k e_g \oplus \operatorname{Mat}(n, k) E, \tag{1}$$

где $\{e_g,\ g \in G,\ E\}$ — система центральных ортогональных идемпотентов в H. В [1] показано, что в случае когда $|G| = n^2$, алгебра H принадлежит одной из двух серий.

Теорема 1 [1, теорема 5.1]. *Пусть H — алгебра вида* (1), $G = G(H^*)$ *и* $|G| = n^2$. *Рассмотрим матрицы U и V из $\mathrm{GL}(n,k)$, такие что $V = \frac{1}{n}U^{-1}$ и либо $U = E$, $V = \frac{1}{n}E$, либо $U = \mathcal{S}$, $V = -\frac{1}{n}\mathcal{S}$, где*

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 2, с. 133—143.

Тогда в обоих случаях коумножение Δ, *коединица* ε *и антипод* S *задаются следующим образом*:

$$\Delta(e_g) = \sum_{h\in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g} + \Delta_g, \quad \Delta_g \in \mathrm{Mat}(n,k)\otimes \mathrm{Mat}(n,k),$$
$$\Delta(x) = \sum_{g\in G} [(g \rightharpoonup x)\otimes e_g + e_g \otimes (x \leftharpoonup g)], \quad x \in \mathrm{Mat}(n,k),$$
$$\varepsilon(e_g) = \delta_{g,1}, \quad \varepsilon(x) = 0, \quad x \in \mathrm{Mat}(n,k),$$
$$S(y) = \begin{cases} e_{g^{-1}}, & y = g \in G,\\ nU\,{}^t y\, V = U\,{}^t y\, U^{-1}, & y \in \mathrm{Mat}(n,k),\end{cases}$$

где

$$\Delta_g = \sum_{i,j,p,q} (E_{ij} \leftharpoonup g^{-1}) \otimes u_{ip}v_{qj}E_{pq} = \sum_{i,j,p,q} E_{ij}\otimes u_{ip}v_{qj}(g^{-1} \rightharpoonup E_{pq}).$$

Более того, существует проективное представление

$$g \mapsto A_g = \big(a_{ij}(g)\big) \in \mathrm{GL}(n,k)$$

группы G *размерности* n, *такое что*

$$g \rightharpoonup x = A_g x A_{g^{-1}},$$
$$x \leftharpoonup g = n^2 U\,{}^t A_g\, V x U\,{}^t A_{g^{-1}}\, V = U\,{}^t A_g\, U^{-1} x U\,{}^t A_{g^{-1}}\, U^{-1},$$
$$A_g U\,{}^t A_h\, U^{-1} A_g^{-1} U\,{}^t A_h^{-1}\, U^{-1} = [A_g, U\,{}^t A_h^{-1}\, U^{-1}] = \mu_{g,h}E, \quad \mu_{g,h}\in k^*,$$
$$\Delta_g = \sum_{i,j,p,q,r,s=1}^{n} E_{ij}\otimes u_{ip}a_{rp}(g^{-1})a_{qs}(g)v_{qj}E_{rs}$$

для всех $g \in G$. *Кроме того,* $\operatorname{tr} A_g = n\delta_{g,1}$ *и*

$$\mathcal{R} = \sum_{i,j} E_{ij}\otimes E_{ji} = \sum_{g\in G} U\,{}^t A_{g^{-1}} \otimes {}^t A_g\, V.$$

Алгебра H имеет базис, состоящий из e_g, $g \in G$, и E_{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, где $\{E_{ij},\ 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$ — система матричных единиц в $\mathrm{Mat}(n,k)$. По этой системе строится дуальный к ней базис $\{E^{ij} = UE_{ij}U^{-1} \mid i,j = 1,\ldots,n\}$. Обозначим через $\mathrm{Mat}(n,k)^*$ линейную оболочку всех E^{ij}. В [3] показывается, что дуальная алгебра H^* представляется в виде прямой суммы

$$H^* = kG \oplus \mathrm{Mat}(n,k)^*,$$

где kG — групповая алгебра группы G. В случае когда $|G| = n^2$, можно в явном виде выписать выражения для умножения $*$, единицы u^*, коумножения Δ^*, коединицы ε^* и антипода S^* в H^*.

Теорема 2 [3]. *Дуальная к* (1) *алгебра Хопфа* H^* *как линейное пространство представляется в виде* $H^* = kG \oplus M$, *где* $M = \mathrm{Mat}(n,k)^*$. *Пусть* $|G| = n^2$. *Тогда умножение* $*$, *единица* u^*, *коумножение* Δ^*, *коединица* ε^* *и антипод* S^* *в* H^* *описываются следующим образом.*

- *Умножение* $*$: *на* M *имеется невырожденная билинейная форма*
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\big(A\cdot S(B)\big) = \mathrm{tr}(A\cdot U\ {}^tB\,U^{-1}).$$
Тогда
$$g*h = gh,\quad g*X = g\rightharpoonup X,\quad X*g = X\leftharpoonup g,$$
$$X*Y = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\langle Y\leftharpoonup g^{-1}, X\rangle g = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}(B_{g^{-1}}YB_gU\ {}^tX\,U^{-1})g$$
для всех $g, h\in G$, $X, Y\in M$.

- *Единица* u^*: $u^*(1)$ — *единичный элемент* $e\in G$.

- *Коумножение* Δ^*:
$$\Delta^*(g) = g\otimes g,\ g\in G,$$
$$\Delta^*(E_{ij}) = \sum_k E_{ik}\otimes E_{kj},\ E_{ij}\in M.$$

- *Коединица* ε^*:
$$\varepsilon^*(g) = 1,\ g\in G,$$
$$\varepsilon^*(E_{ij}) = \delta_{ij},\ E_{ij}\in M.$$

- *Антипод* S^*:
$$S^*(g) = g^{-1},\ g\in G,$$
$$S^*(X) = U\ {}^tX\,U^{-1},\ X\in M,$$
где U — *(косо)симметричная матрица из теоремы* 1.

2. Постановка задачи

Рассмотрим обратную задачу. Пусть теперь дано пространство
$$H = kG\oplus M_1\oplus\ldots\oplus M_p,$$
где G — произвольная группа, $M_\alpha = \mathrm{Mat}(n_\alpha, k)$, p — произвольное натуральное число, $\mathrm{char}\,k$ и $\dim H$ взаимно просты.

На H определяются следующие отображения.

- Умножение $*$: на каждом M_α заданы невырожденная билинейная форма
$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}\big(X\cdot S(Y)\big) = \mathrm{tr}(X\cdot U_\alpha\ {}^tY\,U_\alpha^{-1})$$
и левое и правое действия
$$g\rightharpoonup X = A_g^{(\alpha)}XA_{g^{-1}}^{(\alpha)},\quad X\leftharpoonup g = B_g^{(\alpha)}XB_{g^{-1}}^{(\alpha)},$$

причём эти действия согласованные:

$$(g \rightharpoonup X) \leftharpoonup h = g \rightharpoonup (X \leftharpoonup h)$$

для всех $g, h \in G$, $X \in M_\alpha$. Здесь $A_g^{(\alpha)}$, $B_g^{(\alpha)}$, U_α — некоторые обратимые матрицы из M_α для всех $\alpha = 1, \ldots, p$ и $g \in G$.

Операция $*$ задаётся соотношениями

$$g * h = gh, \quad g * X = g \rightharpoonup X, \quad X * g = X \leftharpoonup g,$$
$$X_1 * X_2 = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \langle Y \leftharpoonup g^{-1}, X \rangle g = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}\big(B_{g^{-1}}^{(\alpha)} Y B_g^{(\alpha)} U_\alpha \, {}^t X \, U_\alpha^{-1}\big) g, \tag{2}$$
$$X * Y = 0$$

для всех $g, h \in G$, $X, X_1, X_2 \in M_\alpha$, $Y \in M_\beta$, $\alpha \neq \beta$.

- Единица u: $u(1)$ — единичный элемент $e \in G$.
- Коумножение Δ:

  $\Delta(g) = g \otimes g$, $g \in G$,

  $\Delta(E_{ij}) = \sum\limits_k E_{ik} \otimes E_{kj}$, $E_{ij} \in M_\alpha$.
- Коединица ε:

  $\varepsilon(g) = 1$, $g \in G$,

  $\varepsilon(E_{ij}) = \delta_{ij}$, $E_{ij} \in M_\alpha$.
- Антипод S:

  $S(g) = g^{-1}$, $g \in G$,

  $S(X) = U_\alpha \, {}^t X \, U_\alpha^{-1}$, $X \in M_\alpha$.

Покажем, что с этими операциями H становится алгеброй Хопфа в том и только в том случае, если H имеет вид, указанный в теореме 2, т. е. $H = kG \oplus \operatorname{Mat}(n, k)$ и $|G| = n^2$.

3. Вычисления

Необходимо и достаточно проверить следующие условия.

1. Ассоциативность умножения $*$:

$$(X * Y) * Z = X * (Y * Z), \quad X, Y, Z \in H.$$

2. Согласованность умножения $*$ и единицы u:

$$* \circ (u \otimes \mathrm{id})(1 \otimes X) = X, \quad * \circ (\mathrm{id} \otimes u)(X \otimes 1) = X,$$

где $X \in H$.

3. Коассоциативность коумножения Δ:
$$(\Delta \otimes 1)\Delta(X) = (1 \otimes \Delta)\Delta(X), \quad X \in H.$$
4. Согласованность коумножения Δ и коединицы ε:
$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(X) = 1 \otimes X, \quad (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(X) = X \otimes 1,$$
где $X \in H$.
5. Согласованность умножения $*$ и коумножения Δ:
$$\Delta(X * Y) = \Delta(X)(* \otimes *)\Delta(Y), \quad X, Y \in H.$$
6. Условие на антипод S:
$$(S \otimes \mathrm{id})\big(\Delta(X)\big) = \varepsilon(X)e, \quad (\mathrm{id} \otimes S)\big(\Delta(X)\big) = \varepsilon(X)e,$$
где $X \in H$.

Предложение 1. *Для выполнения условий* 1—6 *необходимо, чтобы в полупростом разложении* H *было ровно одно слагаемое вида* M_α.

Доказательство. Предположим, что таких слагаемых больше одного и существуют различные M_α и M_β. Тогда из условия ассоциативности умножения для элементов
$$X = E_{ij}, \quad Y = E_{pq}, \quad Z = E_{rs}, \quad X, Y \in M_\alpha, \quad Z \in M_\beta,$$
получаем следующее. Из определения умножения (2) на каждой из компонент M_α, M_β для любых i, j, p, q, r, s, k, l выполнено равенство
$$\sum_{g \in G} \mathrm{tr}\big(B^{(\alpha)}_{g^{-1}} E_{pq} B^{(\alpha)}_g U_\alpha E_{ji} U_\alpha^{-1}\big) a'_{kr}(g) a'_{sl}(g^{-1}) = 0,$$
где $a'_{kr}(g)$ — элементы матрицы $A^{(\beta)}_g$. Суммируя систему равенств по $r = s$, получаем
$$\sum_{g \in G} \mathrm{tr}\big(B^{(\alpha)}_{g^{-1}} E_{pq} B^{(\alpha)}_g U_\alpha E_{ji} U_\alpha^{-1}\big) = 0.$$
Но левая часть вычисляется явно:
$$\sum_{g \in G} \sum_{k,l} b_{kp}(g^{-1}) b_{ql}(g) U_{lj} U^{-1}_{ik} = \sum_{g \in G} \big(U^{-1} B^{(\alpha)}_{g^{-1}}\big)_{ip} \big(B^{(\alpha)}_g U\big)_{lj} = 0,$$
где U_{ij}, $b_{kl}(g)$ — элементы матриц U_α, $B^{(\alpha)}_g$ соответственно. На языке тензорных произведений это означает, что
$$\sum_{g \in G} U_\alpha^{-1} B^{(\alpha)}_{g^{-1}} \otimes B^{(\alpha)}_g U_\alpha = 0.$$
Умножим теперь это равенство на $U_\alpha \otimes 1$ слева и на $1 \otimes U_\alpha^{-1}$ справа:
$$\sum_{g \in G} B^{(\alpha)}_{g-1} \otimes B^{(\alpha)}_g = 0. \tag{3}$$

С другой стороны, рассмотрим случай, когда все три матрицы X, Y, Z лежат в одном и том же M_α. Проводя аналогичные вычисления, находим, что для любых i, j, k, l, p, q, r, s

$$\sum_{g\in G}\bigl(B_g^{(\alpha)}U_\alpha\bigr)_{lj}\bigl(U_\alpha^{-1}B_{g^{-1}}^{(\alpha)}\bigr)_{ik}a_{rp}(g)a_{qs}(g^{-1}) = \\ = \sum_{g\in G}\bigl(B_g^{(\alpha)}U_\alpha\bigr)_{ql}\bigl(U_\alpha^{-1}B_{g^{-1}}^{(\alpha)}\bigr)_{kp}b_{ri}(g)b_{js}(g^{-1}),$$

где $a_{ij}(g)$, $b_{kl}(g)$ — элементы матриц $A_g^{(\alpha)}$, $B_g^{(\alpha)}$ соответственно. Просуммируем систему по двум индексам $p = q$:

$$\sum_{g\in G}\bigl(B_g^{(\alpha)}U_\alpha\bigr)_{lj}\bigl(U_\alpha^{-1}B_{g^{-1}}^{(\alpha)}\bigr)_{ik}\delta_{rs} = \sum_{g\in G}\delta_{kl}b_{ri}(g)b_{js}(g^{-1}).$$

Теперь просуммируем ещё по двум индексам $k = l$. Получим

$$\sum_{g\in G}\delta_{ij}\delta_{rs} = n\sum_{g\in G}b_{ri}(g)b_{js}(g^{-1}).$$

Отсюда вытекает формула

$$\frac{n}{|G|}\sum_{g\in G}B_g^{(\alpha)}\otimes B_{g^{-1}}^{(\alpha)} = \sum_{i,j}E_{ij}\otimes E_{ji} = \mathcal{R}, \tag{4}$$

противоречащая полученной выше формуле (3). Значит, слагаемое вида M_α может быть только одно. □

Пусть далее $M_1 = M$, $A_g^{(1)} = A_g$, $B_g^{(1)} = B_g$, $U_1 = U$.

Проверим условие 1 на базисных элементах X, Y, Z. Исследуем следующие сочетания базисных элементов (на остальных сочетаниях равенства выполняются автоматически).

- $X = g$, $Y = h$, $Z = E_{ij}$. Это означает, что
$$gh \rightharpoonup E_{ij} = g \rightharpoonup (h \rightharpoonup E_{ij}),$$
т. е.
$$A_{gh}E_{ij}A_{gh}^{-1} = A_gA_hE_{ij}A_h^{-1}A_g^{-1}.$$
Итак, отображение $g \mapsto A_g$ является проективным представлением. Аналогично, если положить $X = E_{ij}$, $Y = g$, $Z = h$, получим, что $g \mapsto {}^tB_g$ тоже проективное представление. В [4, теорема 1.4] показано, что для выполнения соотношений (4) необходима и достаточна неприводимость проективного представления ${}^tB_g$. Аналогично должно быть неприводимо и представление A_g.

- $X = g$, $Y = E_{ij}$, $Z = h$. В этом случае имеем следующую цепочку равносильностей:
$$(g \rightharpoonup E_{ij}) \leftharpoonup h = g \rightharpoonup (E_{ij} \leftharpoonup h) \iff \\ \iff B_hA_gE_{ij}A_{g^{-1}}B_{h^{-1}} = A_gB_hE_{ij}B_{h^{-1}}A_{g^{-1}} \iff$$

$$\begin{aligned}
&\iff (B_hA_g)_{ki}(A_{g^{-1}}B_{h^{-1}})_{jl} = (A_gB_h)_{ki}(B_{h^{-1}}A_{g^{-1}})_{jl} \iff \\
&\iff B_hA_g \otimes A_{g^{-1}}B_{h^{-1}} = A_gB_h \otimes B_{h^{-1}}A_{g^{-1}} \iff \\
&\iff B_hA_g = \mu_{gh}A_gB_h, \quad \mu_{gh} \in k^*. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Рассмотрим отображение $\rho\colon G \times G^{\mathrm{op}} \to \mathrm{GL}(n,k)$, такое что $A_g = \rho(g,1)$, $B_g = \rho(1,g)$. В терминах теории представлений выражение (5) в объединении с вышесказанным означает, что ρ — проективное представление группы $G \times G^{\mathrm{op}}$.

- $X = E_{ij}$, $Y = E_{pq}$, $Z = g$. Имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{h\in G}\mathrm{tr}(B_{h^{-1}}E_{pq}B_hUE_{ij}U^{-1})hg = E_{ij} * (B_gE_{pq}B_g^{-1}) \iff$$
$$\iff \sum_{h\in G}\mathrm{tr}(B_{h^{-1}}E_{pq}B_hUE_{ij}U^{-1})hg = \sum_{f\in G}\mathrm{tr}(B_{f^{-1}g}E_{pq}B_{g^{-1}f}UE_{ij}U^{-1})f.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых групповых элементах $hg = f$, получаем равенство

$$\mathrm{tr}(B_{gf^{-1}}E_{pq}B_{fg^{-1}}UE_{ji}U^{-1}) = \mathrm{tr}(B_{f^{-1}g}E_{pq}B_{g^{-1}f}UE_{ji}U^{-1}).$$

Его левая часть равна

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\begin{pmatrix} b_{1p}(gf^{-1})b_{q1}(fg^{-1}) & \dots & b_{1p}(gf^{-1})b_{qn}(fg^{-1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{np}(gf^{-1})b_{q1}(fg^{-1}) & \dots & b_{nk}(gf^{-1})b_{jn}(fg^{-1}) \end{pmatrix} \times \\
&\quad\times \begin{pmatrix} u_{1j}u_{i1}^{(-1)} & \dots & u_{1j}u_{in}^{(-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{nj}u_{i1}^{(-1)} & \dots & u_{nj}u_{in}^{(-1)} \end{pmatrix} = \\
&\quad= \sum_{k,l} b_{kp}(gf^{-1})b_{ql}(fg^{-1})u_{lj}u_{ik}^{(-1)} = (U^{-1}B_{gf^{-1}})_{ip}(B_{fg^{-1}}U)_{qj},
\end{aligned}$$

где $u_{ij}^{(-1)}$ — элементы матрицы U^{-1}. Аналогично получаем, что правая часть равна

$$(U^{-1}B_{f^{-1}g})_{ip}(B_{g^{-1}f}U)_{qj}.$$

Тогда

$$U^{-1}B_{gf^{-1}} \otimes B_{fg^{-1}}U = U^{-1}B_{f^{-1}g} \otimes B_{g^{-1}f}U,$$

что равносильно следующему:

$$\forall\, f,g \in G \quad B_{gf} = \lambda_{gf}B_{fg}, \quad \lambda_{gf} \in k^*. \qquad (6)$$

Аналогично при $X = g$, $Y = E_{pq}$, $Z = E_{ij}$ имеем условие на представление A_g:

$$\forall\, f,g \in G \quad A_{gf} = \lambda'_{gf}A_{fg}, \quad \lambda'_{gf} \in k^*.$$

- $X = E_{ij}$, $Y = g$, $Z = E_{pq}$. Применяя этот же способ, получаем условие
$$\forall\, g \in G \quad A_g = \mu_g U\, {}^tB_g\, U^{-1}, \quad \mu_g \in k^*, \tag{7}$$
означающее эквивалентность в широком смысле проективных представлений A_g и ${}^tB_g$.

Условия 2, 3, 4 проверяются тривиально и ничего нового не дают.

Проверим условие 5 на базисных элементах $E_{ij}, E_{pq} \in \mathrm{Mat}(n,k)$. На остальных возможных комбинациях оно выполняется всегда. Имеем

$$\Delta(E_{ij} * E_{pq}) = \Delta\left(\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\langle E_{pq} \leftharpoonup g^{-1}, E_{ij}\rangle g\right) = \\ = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}\big(B^{(i)}_{g^{-1}} E_{pq} B_g U E_{ji} U^{-1}\big) g\otimes g = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\alpha_g g\otimes g,$$

где

$$\alpha_g = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} b_{1p}(g^{-1})b_{q1}(g) & \dots & b_{1p}(g^{-1})b_{qn}(g) \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{np}(g^{-1})b_{q1}(g) & \dots & b_{np}(g^{-1})b_{qn}(g)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1j}u^{(-1)}_{i1} & \dots & u_{1j}u^{(-1)}_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{nj}u^{(-1)}_{i1} & \dots & u_{nj}u^{(-1)}_{in}\end{pmatrix} = \\ = \sum_{k,l} b_{kp}(g^{-1})b_{ql}(g)u_{lj}u^{(-1)}_{ik}.$$

Значит,
$$\Delta(E_{ij} * E_{pq}) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\sum_{k,l} b_{kp}(g^{-1})b_{ql}(g)u_{lj}u^{(-1)}_{ik} g\otimes g.$$

С другой стороны,

$$\Delta(E_{ij})(*\otimes *)\Delta(E_{pq}) = \\ = \sum_k E_{ik}\otimes E_{kj}(*\otimes *)\sum_l E_{pl}\otimes E_{lq} = \sum_{k,l}(E_{ik} * E_{pl})\otimes(E_{kj} * E_{lq}) \\ = \sum_{k,l}\left(\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha p}(g^{-1})b_{l\beta}(g)u_{\beta k}u^{(-1)}_{i\alpha} g\right)\otimes\left(\frac{1}{n}\sum_{h\in G}\sum_{\gamma,\delta} b_{\gamma l}(h^{-1})b_{q\delta}(h)u_{\delta j}u^{(-1)}_{k\gamma} h\right) \\ = \sum_{g,h\in G,k,l,\alpha,\beta,\gamma,\delta}\frac{1}{n^2} b_{\alpha p}(g^{-1})b_{\gamma l}(h^{-1})b_{l\beta}(g)b_{q\delta}(h)u_{\beta k}u_{\delta j}u^{(-1)}_{i\alpha}u^{(-1)}_{k\gamma} g\otimes h \\ = \underbrace{\sum_{g=h}(\dots)}_{\Sigma_1} + \underbrace{\sum_{g\neq h}(\dots)}_{\Sigma_2}.$$

Посчитаем явно Σ_1:

$$\Sigma_1 = \sum_{g\in G}\frac{1}{n^2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} b_{\alpha p}(g^{-1})b_{q\delta}(g)u_{\delta j}u^{(-1)}_{i\alpha}\delta^{\beta}_{\gamma} g\otimes g =$$
$$= \sum_{g\in G,\,\alpha,\delta}\frac{1}{n} b_{\alpha p}(g^{-1})b_{q\delta}(g)u_{\delta j}u^{(-1)}_{i\alpha} g\otimes g = \Delta(E_{ij}*E_{pq}).$$

Следовательно, $\Sigma_2=0$, т. е. для всех i, j, p, q и $g\neq h$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{n^2}\sum_{g\neq h;\,l,\alpha,\beta,\delta} b_{\alpha p}(g^{-1})b_{\beta l}(h^{-1})b_{l\beta}(g)b_{q\delta}(h)u_{\delta j}u^{(-1)}_{i\alpha} g\otimes h = 0 \iff$$
$$\iff \sum_{\alpha} u^{(-1)}_{i\alpha}b_{\alpha p}(g^{-1})\sum_{\delta} b_{q\delta}(h)u_{\delta j}\sum_{\beta,l} b_{l\beta}(g)b_{\beta l}(h^{-1}) = 0 \iff$$
$$\iff \forall\, i,j,p,q \quad (U^{-1}B_{g^{-1}})_{ip}(B_hU)_{qj}\operatorname{tr}(B_{h^{-1}}B_g) = 0.$$

Матрицы U, B_g для любого g невырожденны, поэтому найдутся такие i, j, p, q, что $(U^{-1}B_{g^{-1}})_{ip}\neq 0$ и $(B_hU)_{qj}\neq 0$. Отсюда получаем условие

$$\forall\, g\neq h \quad \operatorname{tr}(B_{h^{-1}}B_g) = 0,$$

или, что то же самое,

$$\forall\, g\neq e \quad \operatorname{tr} B_g = 0. \tag{8}$$

Из формул (8) и (7) получаем, что

$$\forall\, g\neq e \quad \operatorname{tr} A_g = 0.$$

Предложение 2. *Для выполнения условий* 1—6 *необходимо, чтобы группа* G *была абелевой.*

Доказательство. Уравнение (8) означает, что проективные представления A_g и B_g точны. Поэтому если бы группа G не являлась абелевой, то в силу условия (6) коммутатор некоторых двух элементов, отличный от единицы, имел бы тривиальный проективный образ, что невозможно. □

Проверим условие 6 на базисном элементе $X=E_{ij}\in \operatorname{Mat}(n,k)$:

$$(S\otimes \mathrm{id})\big(\Delta(X)\big) = \delta_{ij}e.$$

Но

$$(S\otimes \mathrm{id})\big(\Delta(X)\big) = \sum_k (UE_{ki}U^{-1}*E_{kj}) =$$
$$= \sum_k \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\operatorname{tr}(B_{g^{-1}}E_{kj}B_gU\,{}^tU^{-1}\,E_{ik}\,{}^tU\,U^{-1})g.$$

Обозначим через V матрицу $U\,{}^tU^{-1}$. Тогда коэффициент при g равен

$$\sum_k \operatorname{tr}\begin{pmatrix} b_{1k}(g^{-1})b_{j1}(g) & \dots & b_{1k}(g^{-1})b_{jn}(g)\\ \dots & \dots & \dots\\ b_{nk}(g^{-1})b_{j1}(g) & \dots & b_{nk}(g^{-1})b_{jn}(g)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1i}v_{k1}^{(-1)} & \dots & v_{1i}v_{kn}^{(-1)}\\ \dots & \dots & \dots\\ v_{ni}v_{k1}^{(-1)} & \dots & v_{ni}v_{kn}^{(-1)}\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k,l,m} b_{lk}(g^{-1})b_{jm}(g)v_{mi}v_{kl}^{(-1)} = \begin{cases} n, & \text{если } i=j,\ g=e,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Рассмотрим три типа сочетаний.

- $g = e$, $i = j$. Тогда
$$\sum_{k,l,m}\delta_{lk}\delta_{im}v_{mi}v_{kl}^{(-1)} = n \iff \sum_k v_{ii}v_{kk}^{(-1)} = n \iff \forall\, i \quad v_{ii}\operatorname{tr}V^{-1} = n.$$

- $g = e$, $i \neq j$. Тогда
$$\sum_{k,l,m}\delta_{lk}\delta_{jm}v_{mi}v_{kl}^{(-1)} = 0 \iff \sum_k v_{ji}v_{kk}^{(-1)} = 0 \iff v_{ji} = 0,$$
поскольку $\operatorname{tr}V^{-1} \neq 0$. Значит, матрица V диагональная, $V = CE$.

- $g \neq e$. Тогда
$$\sum_{k,l,m} b_{lk}(g^{-1})b_{jm}(g)C\delta_{mi}C^{-1}\delta_{kl} = 0 \iff \sum_k b_{kk}(g^{-1})b_{ji}(g) = 0.$$
Это условие выполняется в силу (8).

Таким образом,
$${}^tU = \mu U \implies \det U = \det {}^tU = \mu^n * \det U \implies \mu^n = 1,$$
поскольку матрица U невырожденная. Если $n = \dim M$ нечётно, то матрица U симметричная, если чётно, то U либо симметричная, либо кососимметричная.

В [2] показано, что конечные абелевы группы, которые обладают точными неприводимыми проективными представлениями, имеют следующий вид.

Теорема 3 (Р. Фрухт [2, теорема 2.2]). *Конечная абелева группа G допускает точные неприводимые проективные представления над алгебраически замкнутым полем k, характеристика которого не делит порядка группы G, тогда и только тогда, когда G обладает симметрическим типом, т. е. разлагается в прямое произведение двух изоморфных групп. Размерности всех таких представлений группы G совпадают, и $|G| = n^2$, где n — размерность любого точного неприводимого проективного представления.*

Предложение 3. *Для выполнения условий* 1—6 *необходимо и достаточно, чтобы группа G представлялась в виде $G = A \times A$, где A — абелева группа порядка n.*

Доказательство. Групповая алгебра kG является подалгеброй Хопфа в H. Значит, порядок G должен делить размерность H. Но $\dim H = |G| + n^2$. Следовательно, порядок G должен делить n^2. Отсюда и из взаимной простоты $\operatorname{char} k$ и $\dim H$ вытекает, что $\operatorname{char} k$ не делит порядок группы G. Далее применяем теорему 3. □

4. Результаты

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пространство $H = kG \oplus M_1 \oplus \ldots \oplus M_m$ с операциями из постановки задачи является алгеброй Хопфа тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

- *в полупростом разложении H только одна компонента вида M_i, т. е.*
$$H = kG \oplus \operatorname{Mat}(n, k);$$
- *матрицы A_g и ${}^tB_g$ реализуют точные неприводимые проективные представления группы, эквивалентные в широком смысле*;
- $\forall\, g \neq e \ \ \operatorname{tr} A_g = \operatorname{tr} B_g = 0$;
- *отображение $\rho\colon G \times G^{\mathrm{op}} \to \mathrm{GL}(n, k)$, такое что $A_g = \rho(g, 1)$, $B_g = \rho(1, g)$, реализует проективное представление группы $G \times G^{\mathrm{op}}$*;
- *если $n = \dim M$ нечётно, то матрица U симметричная, если чётно, то U либо симметричная, либо кососимметричная*;
- *группа G представляется в виде $G = A \times A$, где A — абелева группа, $|A| = n$, и существуют проективные представления группы G с указанными выше свойствами.*

Литература

[1] Артамонов В. А. О полупростых конечномерных алгебрах Хопфа // Мат. сб. — 2007. — Т. 198, № 9. — С. 3—28.

[2] Жмудь Э. М. Симплектические геометрии и проективные представления конечных абелевых групп // Мат. сб. — 1972. — Т. 87, № 1. — С. 3—17.

[3] Artamonov V. A., Chubarov I. A. Dual algebras of some semisimple finite dimensional Hopf algebras // Modules and Comodules. Proc. of the Int. Conf., Porto, Portugal, September 6—8, 2006. Dedicated to Robert Wisbauer on the Occasion of His 65th Birthday / T. Brzeziński, ed. — Basel: Birkhäuser, 2008. — (Trends in Math.). — P. 65—85.

[4] Artamonov V. A., Chubarov I. A. Properties of some semisimple Hopf algebras // Algebras, Representations and Applications. Conf. in Honour of Ivan Shestakov's 60th Birthday, Maresias, Brazil, August 26—September 1, 2007 / V. Futorny, V. Kac, I. Kashuba, and E. Zelmanov, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 2009. — (Contemp. Math.; Vol. 483). — P. 23—36.